Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, Экстремальные свойства функций и дизайны на торе, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:57:43

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ И ДИЗАЙНЫ НА ТОРЕ

В. А. Юдин

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $xy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ – скалярное произведение x и y , $|x| = \sqrt{xx}$; $\omega_n = \pi^{n/2}\Gamma^{-1}(n/2+1)$ – объем единичного шара B_n , $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$; $\mathbb{T}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : -1/2 < x_k \leq 1/2\}$ – n -мерный тор; q_n – первый нуль функции Бесселя $J_\nu(z)$, $\nu = n/2$. Через

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu e^{2\pi i \nu x}, \quad \hat{f}_\nu = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx,$$

обозначим ряд Фурье функции $f(x)$ из $L(\mathbb{T}^n)$, а через $\text{sp } f = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : \hat{f}_\nu \neq 0\}$ – спектр функции $f(x)$. Пусть D – центрально-симметрическая область из $\mathbb{R}^n$. Множество точек $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N = W$, $W \subset \mathbb{T}^n$, называется *дизайном типа D* , если кубатурная формула

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^{(k)})$$

точна для любого тригонометрического полинома $f(x)$, $\text{sp } f \subset D$. Это определение эквивалентно выполнению следующих тождеств:

$$\sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \equiv 0, \quad \nu \in D \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Основная задача состоит в построении дизайнов с наименьшим количеством точек N . Первоначальные исследования [1], [2] относятся к случаю, когда область D имеет вид

$$D = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_1| + \dots + |\nu_n| < s\}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

В [3] рассматривается общий случай, получена оценка

$$N \geq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n, \nu \in \frac{1}{2}D} 1, \quad \lambda D = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{x}{\lambda} \in D\right\}, \quad \lambda > 0.$$

Близкую оценку

$$N \geq \text{mes } \frac{1}{2}D = \frac{\text{mes } D}{2^n}, \quad (1)$$

где D – выпуклая центрально-симметрическая область из $\mathbb{R}^n$, можно извлечь из доказательства К. Зигеля теоремы Г. Минковского о целой точке в выпуклом теле. Аналогичная задача возникает и для других компактов. Наиболее интенсивные исследования

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00212.

относятся к случаю многомерной сферы (см. известные обзоры [4], [5] с подробной историей вопроса). Последние достижения в оценках снизу мощности дизайнов получены с помощью аналитических методов, основанных на экстремальных свойствах полиномов и функций.

Совокупность непрерывных на $\mathbb{T}^n$ функций, удовлетворяющих условиям

- 1) $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{T}^n$;
- 2) $\hat{f}_0 > 0, \hat{f}_\nu \leq 0, \nu \in \mathbb{Z}^n \setminus D$,

обозначим через $M(D)$.

Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)} - x^{(l)}).$$

Из первого условия находим

$$I \geq \sum_{k=1}^N f(x^{(k)} - x^{(l)}) = Nf(0). \quad (2)$$

За исключением конечного числа все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ имеют одинаковый знак. Следовательно, ряд Фурье функции $f(x), f(x) \in M(D)$, является абсолютно сходящимся. Поэтому из условия 2) получим

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu \sum_{k,l=1}^N e^{2\pi i \nu(x^{(k)} - x^{(l)})} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \\ &= N^2 \hat{f}_0 + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \in D \setminus \{0\}}} \hat{f}_\nu \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}^n \\ \nu \notin D}} \hat{f}_\nu \left| \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu x^{(k)}} \right|^2 \leq N^2 \hat{f}_0, \end{aligned} \quad (3)$$

так как $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ — дизайн типа D . Из (2), (3) найдем

$$N \geq \frac{f(0)}{\hat{f}_0}. \quad (4)$$

Таким образом, для оценки снизу мощности дизайнов приходим к экстремальной задаче: среди всех функций из класса $M(D)$ найти функцию, доставляющую наибольшее значение отношения (4).

В одномерном случае $D = \{\nu \in \mathbb{Z} : |\nu| < q\}$ хорошо известно, что минимальным дизайном являются q узлов формулы прямоугольников: $x^{(k)} = k/q, k = 0, 1, \dots, q-1$. Так что для всякой функции $f(x) \in M(D)$ выполняется неравенство $f(0) \leq q\hat{f}_0$, оно не может быть улучшено. Знак равенства достигается для функции $f(x), f(x) \in M(D)$, построенной следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(x-k), \quad F(x) = (F_1 * F_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x-y) F_2(y) du, \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} \cos^2 \pi q x, & |x| \leq \frac{1}{2q}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2q}, \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2q}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

В многомерном случае точное решение неизвестно. Для случая $D = RB$, $R > 1$, построим функцию $f(x)$, $f(x) \in M(RB)$, с помощью которой из неравенства (4) найдем новую оценку снизу мощности дизайна. С ростом размерности, $n \rightarrow \infty$, она улучшает известную (1) на экспоненциальный множитель. Имеет место

ТЕОРЕМА. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $R > 1$ выполняется неравенство

$$N \geq (2\pi R)^n \omega_n^{-1} q_n^{-n}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения функции $f(x)$ из $M(RB)$ будем использовать известную конструкцию из [6], где построена радиальная, непрерывная функция $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с конечным носителем, удовлетворяющая условиям

а) на функцию $W(x)$:

$$W(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad W(0) = m \omega_n q_n^n, \quad m = -q_n^n J_{n/2}(q_n); \quad (6)$$

б) на преобразование Фурье [7]:

$$\widehat{W}(s) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x) e^{-2\pi i s x} dx, \quad \widehat{W}(s) \leq 0, \quad |s| \geq R, \quad \widehat{W}(0) = m(2\pi R)^{-n} \omega_n^2 q_n^{2n}. \quad (7)$$

Рассмотрим периодизацию $W(x)$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(x - k). \quad (8)$$

Из (6), (8) находим, что $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^n$, и

$$f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(k) \geq W(0) = m \omega_n q_n^n. \quad (9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\nu &= \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} W(x - k) e^{-2\pi i \nu x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} W(x - k) e^{-2\pi i \nu x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(x) e^{-2\pi i \nu x} dx = \widehat{W}(\nu), \end{aligned}$$

то из (7) получаем

$$\widehat{f}_\nu \leq 0, \quad |\nu| \geq R, \quad \widehat{f}_0 = \widehat{W}(0) = m(2\pi R)^{-n} \omega_n^2 q_n^{2n}. \quad (10)$$

Таким образом, построенная функция $f(x)$ принадлежит классу $M(RB)$. Оценим снизу отношение $f(0)/\hat{f}_0$. Из (9), (10) находим

$$\frac{f(0)}{\hat{f}_0} \geq \frac{m\omega_n q_n^n}{m(2\pi R)^{-n}\omega_n^2 q_n^{2n}} = (2\pi R)^n \omega_n^{-1} q_n^{-n}.$$

Используя неравенство (4) получаем (5). Теорема доказана.

Для первого нуля q_n функции Бесселя $J_{n/2}(z)$ известно [8] асимптотическое поведение

$$q_n = \frac{n}{2}(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Дополнительно привлекая асимптотику гамма функции при больших значениях аргумента, находим, что

$$N \gg \left(\frac{8\pi}{en}\right)^{n/2} R^n. \quad (11)$$

Скорость роста написана в экспоненциальной шкале. Степенные множители не учитываются. Неравенство (11) улучшает известную (1) с $D = RB$ оценку в $(4/e)^n$ раз.

При фиксированной размерности n и $R \rightarrow \infty$ существование дизайнов порядка R с количеством точек R^n (по порядку) очевидно. Однако, при $n \rightarrow \infty$ точная зависимость от размерности неизвестна.

Московский энергетический институт

Поступило

15.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мысовских И. П. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. №1. С. 28–31.
2. Beckers M., Cools M. // Inter. Series of Numer. Math. 1993. V. 112. P. 13–24.
3. Резцов А. В. // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №1. С. 151–152.
4. Reznick B. // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 96. №463.
5. Seidel J. // Diskrete Math. 1994. V. 136. P. 281–293.
6. Юдин В. А. // Дискретная матем. 1989. Т. 1. №2. С. 155–158.
7. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
8. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949.