Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Арлинский, Замкнутые секториальные формы и однопараметрические полугруппы сжатий, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 643–654

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:48:39

УДК 517.98

ЗАМКНУТЫЕ СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ СЖАТИЙ

Ю. М. Арлинский

Пусть $s[u, v]$ – замкнутая полуторалинейная секториальная форма с вершиной в нуле, полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$ и плотной областью определения $\mathcal{D}(s)$ в гильбертовом пространстве H , S – m -секториальный оператор, ассоциированный с формой s , S_R – его “реальная часть”, $T(t) = \exp(-tS)$ – голоморфная в секторе $|\arg t| < \pi/2 - \alpha$ полугруппа сжатий с производящим оператором $-S$.

В работе охарактеризована форма s в терминах полугруппы $T(t)$. Так, в частности, доказана эквивалентность следующих условий: 1) $u \in \mathcal{D}(s)$; 2) функция $\|T(t)u\|$ дифференцируема в нуле; 3) функция $(T(t)u, u)$ дифференцируема в нуле.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть H – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, I – единичный оператор в H , $s[u, v]$ – полуторалинейная (линейная по первому аргументу и антилинейная по второму) форма с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(s)$, $s[u] = s[u, u]$ – соответствующая квадратичная форма.

Предположим, что s – замкнутая секториальная форма с вершиной в нуле и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$ [1], [2], т.е.

- а) числовая область формы $W(s) = \{s[u] : u \in \mathcal{D}(s), \|u\| = 1\}$ есть подмножество сектора $\Theta(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\}$;
- б) если $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(s)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u, \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} s[u_n - u_m] = 0,$$

то $u \in \mathcal{D}(s)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s[u - u_n] = 0$.

Как известно [1, первая теорема о представлении], с формой s ассоциирован m -секториальный оператор S с вершиной в нуле и полууглом α , т.е.

- а) $(Sx, v) = s[x, v] \quad \forall x \in \mathcal{D}(S), \forall v \in \mathcal{D}(s)$;
- б) область определения $\mathcal{D}(S)$ оператора S плотна в H и является ядром формы s ;
- в) резольвентное множество $\rho(S)$ оператора S непусто (содержит $\text{Ext } \Theta(\alpha)$);
- г) для любого $x \in \mathcal{D}(S)$ выполняется неравенство $|\text{Im}(Sx, x)| \leq \text{tg } \alpha \text{ Re}(Sx, x)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Международной соросовской программы в области точных наук (ISSEP), грант APU051009.

Тот факт, что $\mathcal{D}(S)$ является ядром формы s можно выразить соотношением

$$\inf \{ \operatorname{Re} s[u - x] + \|u - x\|^2, x \in \mathcal{D}(S) \} = 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(s).$$

Пусть $s^*[u, v] = \overline{s[v, u]}$, $u, v \in \mathcal{D}(s)$ сопряженная форма. Тогда с s^* ассоциирован сопряженный оператор $S^*[1]$.

Обозначим $s_R[u, v] = (s[u, v] + s^*[u, v])/2$. Форма s_R является замкнутой и неотрицательной, с ней ассоциирован неотрицательный самосопряженный оператор S_R , $\mathcal{D}(S_R)$ — ядро формы s и по второй теореме о представлении [1] выполняется $\mathcal{D}(s) = \mathcal{D}(S_R^{1/2})$.

Оператор $-S$ является (см. [1], [2]) инфинитезимальным производящим оператором сильно непрерывной однопараметрической полугруппы сжатий

$$T(t) = \exp(-tS), \quad t \geq 0,$$

имеющей голоморфное сжимающее продолжение в область $\operatorname{Int} \Theta(\pi/2 - \alpha)$.

При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(S) &= \left\{ x \in H : \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(I - T(t))x \text{ существует} \right\}, \\ Sx &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(I - T(t))x. \end{aligned}$$

Область определения $\mathcal{D}(S)$ может быть также охарактеризовано следующим образом [3]:

$$\mathcal{D}(S) = \left\{ x \in H : \sup_{t > 0} \|t^{-1}(I - T(t))x\| < \infty \right\}.$$

В настоящей работе в терминах полугруппы $T(t)$ охарактеризована форма s .

Примем обозначения: $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, определенных на гильбертовом пространстве H_1 со значениями в гильбертовом пространстве H_2 , $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H, H)$; $\operatorname{Ker} T$, $\mathcal{R}(T)$ — соответственно ядро и область значений оператора T , $T_R = (T + T^*)/2$ для $T \in \mathcal{L}(H)$, $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$, $\mathcal{D}_T = \overline{\mathcal{R}(D_T)}$ для сжатия $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $\sigma(T)$ и $\rho(T)$ — соответственно спектр и резольвентное множество оператора T .

Мы докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $u \in \mathcal{D}(s)$;
- 2) $\varliminf_{t \rightarrow +0} |s[T(t)u]| < \infty$;
- 3) $\sup \{ t^{-1} |(I - T(t))u, u|, t > 0 \} < \infty$;
- 4) $\sup \{ \operatorname{Re}(t^{-1}(I - T(t))u, u), t > 0 \} < \infty$;
- 5) *существует производная* $\frac{d}{dt}(T(t)u, u)|_{t=0}$;
- 6) *существует производная* $\frac{d}{dt}(\|T(t)u\|)|_{t=0}$.

Если $u, v \in \mathcal{D}(s)$, то справедливы равенства

$$\frac{d}{dt} (\|T(t)u\|) \Big|_{t=0} = -\frac{s_R[u]}{\|u\|}; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (T(t)u, v) \Big|_{t=0} = -s[u, v]; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (T(t)u, T(t)v) \Big|_{t=0} = -2s_R[u, v]; \quad (3)$$

$$\|(I - T(t))u\| = o(\sqrt{t}), \quad t \rightarrow +0. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $t \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ справедливы равенства

$$\mathcal{R}(D_{T(t)}) = \mathcal{R}(D_{T^*(t)}) = \mathcal{R}((I - T_R(t))^{1/2}) = \mathcal{R}(S_R^{1/2}).$$

2. Предварительные результаты. Имеют место соотношения [1], [2]

$$s[u, v] = ((I + iG)S_R^{1/2}u, S_R^{1/2}v), \quad u, v \in \mathcal{D}(s), \quad (5)$$

$$S = S_R^{1/2}(I + iG)S_R^{1/2}, \quad (6)$$

где $G = G^* \in \overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(S_R^{1/2}))}$, $\|G\| \leq \text{tg } \alpha$.

Из (6) следует $\text{Ker } S = \text{Ker } S^* = \text{Ker } S_R$, поэтому для простоты в дальнейшем предположим, что $\text{Ker } S_R = \{0\}$.

Приведем ряд результатов, используемых в последующем.

ТЕОРЕМА 3 [1, гл. 6, теорема 1.16]. Пусть s – замкнутая секториальная форма, $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(s)$, $\lim u_n = u$ и последовательность $\{s[u_n]\}$ ограничена. Тогда $u \in \mathcal{D}(s)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Справедливы равенства

$$\mathcal{R}(S_R^{1/2}) = \left\{ x \in H : \sup_{y \in \mathcal{D}(S)} \frac{|(x, y)|^2}{\text{Re } s[y]} < \infty \right\} = \left\{ x \in H : \sup_{y \in \mathcal{D}(S^*)} \frac{|(x, y)|^2}{\text{Re } s[y]} < \infty \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем только одно равенство. Пусть $u \in \mathcal{D}(S_R^{1/2})$.

Из (5) с учетом того, что $\mathcal{D}(S)$ ядро оператора $S_R^{1/2}$ и $\mathcal{R}(S_R^{1/2})$ плотно в H , имеем

$$\sup_{y \in \mathcal{D}(S)} \frac{|(S_R^{1/2}u, y)|^2}{\text{Re } s[y]} = \sup_{y \in \mathcal{D}(S)} \frac{|(u, S_R^{1/2}y)|^2}{\|S_R^{1/2}y\|^2} = \|u\|^2.$$

Наоборот, если справедливо $|(x, y)|^2 \leq C(x) \text{Re } s[y]$ для всех $y \in \mathcal{D}(S)$ с некоторой постоянной $C(x)$, то опять, принимая во внимание (5) и то, что $\mathcal{D}(S)$ – ядро оператора $S_R^{1/2}$, получим уже для всех $y \in \mathcal{D}(S_R^{1/2}) = \mathcal{D}(s)$ выполнено $|(x, y)|^2 \leq C(x) \|S_R^{1/2}y\|^2$. Отсюда $|(x, S_R^{-1/2}z)|^2 \leq C(x) \|z\|^2 \quad \forall z \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$. По теореме Рисса $x \in \mathcal{D}(S_R^{-1/2}) = \mathcal{R}(S_R^{1/2})$.

Из предложения 1 следует

$$\mathcal{D}(s) = \left\{ u \in H : \sup_{y \in \mathcal{D}(S)} \frac{|(Sy, u)|^2}{\operatorname{Re} s[y]} < \infty \right\} = \left\{ u \in H : \sup_{y \in \mathcal{D}(S^*)} \frac{|(S^*y, u)|^2}{\operatorname{Re} s[y]} < \infty \right\}. \quad (7)$$

Действительно, рассмотрим определенную на $\mathcal{R}(S_R^{1/2})$ замкнутую секториальную форму $\omega[f, g] = ((I + iG)^{-1}S_R^{-1/2}f, S_R^{-1/2}g)$.

Очевидно, что с формой ω ассоциирован m -секториальный оператор

$$S^{-1} = S_R^{-1/2}(I + iG)^{-1}S_R^{-1/2}.$$

Имеем

$$\operatorname{Re} \omega[f] = \|(I + iG)^{-1}S_R^{-1/2}f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{R}(S_R^{1/2}).$$

Обозначим через W_R неотрицательный самосопряженный оператор, ассоциированный с формой ω_R . Тогда $\mathcal{D}(W_R^{1/2}) = \mathcal{R}(S_R^{1/2}) = \mathcal{D}(\omega_R)$ и

$$\|W_R^{1/2}f\|^2 = \|(I + iG)^{-1}S_R^{-1/2}f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{R}(S_R^{1/2}).$$

Поэтому $W_R^{1/2}f = U(I + iG)^{-1}S_R^{-1/2}f$, $f \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$, где U – унитарный оператор в H . Отсюда

$$(I - iG)^{-1}U^{-1}\mathcal{R}(S_R^{1/2}) = \mathcal{R}(S_R^{1/2}), \\ W_R^{1/2}f = S_R^{-1/2}(I - iG)^{-1}U^{-1}f, \quad f \in \mathcal{R}(S_R^{1/2}).$$

Следовательно, $\mathcal{R}(W_R^{1/2}) = \mathcal{R}(S_R^{1/2})$. Теперь из предложения 1 следуют равенства (7).

Отметим, что предложение 1 и (7) известны для случая неотрицательных замкнутых форм (см., например, [4]–[6]).

Отнесем $T \in \mathcal{L}(H)$ к классу $C(\alpha)$ ($\alpha \in [0, \pi/2)$), если

$$\|T \sin \alpha \pm i \cos \alpha I\| \leq 1. \quad (8)$$

Условия (8) при всех $f \in H$ эквивалентны неравенству

$$\operatorname{tg} \alpha (\|f\|^2 - \|Tf\|^2) \geq 2 |\operatorname{Im}(Tf, f)|. \quad (9)$$

Поэтому операторы класса $C(\alpha)$ являются сжатиями, $C(0)$ – класс всех самосопряженных сжатий.

Обозначим $\tilde{C} = \bigcup \{C(\alpha), \alpha \in [0, \pi/2)\}$.

Нетрудно видеть, что дробно-линейное преобразование $T = (I - S)(I + S)^{-1}$ устанавливает биективное соответствие между m -секториальными операторами S с вершиной в нуле и полуглом α и операторами T класса $C(\alpha)$, для которых $\operatorname{Ker}(I + T) = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 4 [7]. Если $T \in \tilde{C}$, то

- 1) подпространства $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_{T^*}$ совпадают, $T \mid \mathcal{D}_T$ — принадлежит классу C_{00} [8], $T \mid H \ominus \mathcal{D}_T$ — самосопряженный унитарный оператор;
- 2) справедливы равенства

$$\mathcal{R}(D_T) = \mathcal{R}(D_{T^*}) = \mathcal{R}(D_{T_R}); \quad (10)$$

- 3) для того чтобы сильно непрерывная полугруппа сжатий $T(t)$ допускала голоморфное сжимающее продолжение в сектор $\text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ необходимо, чтобы для всех $t \geq 0$ и достаточно, чтобы при $t \in [0, \delta]$, $\delta > 0$, операторы $T(t)$ принадлежали классу $C(\alpha)$.

Из (10) в подпространстве $\mathcal{D}_T$ следуют равенства

$$D_T = D_{T^*}L = D_{T_R}M, \quad (11)$$

где $L^{\pm 1}, M^{\pm 1} \in \mathcal{L}(D_T)$.

Для любого сжатия $T \in \mathcal{L}(H)$ очевидны равенства

$$\|(I \pm T)f\|^2 + \|D_T f\|^2 = 2\|(I \pm T_R)^{1/2}f\|^2, \quad (12)$$

$$\|(I \pm T^*)f\|^2 + \|D_{T^*} f\|^2 = 2\|(I \pm T_R)^{1/2}f\|^2. \quad (13)$$

Из (9), (12) для $T \in C(\alpha)$ следует, что $I \pm T$ — m -секториальные операторы с вершиной в нуле и полууглом α . Из (12) получаем, что $\pm 1 \in \rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\pm 1 \in \rho(T_R)$.

Принимая во внимание результаты [9] об операторных областях, из (12) и (13) получаем $\mathcal{R}(I \pm T), \mathcal{R}(I \pm T^*) \subseteq \mathcal{R}((I \pm T_R)^{1/2})$.

Из (11) при $-1 \in \rho(T)$ для $T \in \tilde{C}$ имеем

$$\mathcal{R}(D_T) = \mathcal{R}(D_{T^*}) = \mathcal{R}((I - T_R)^{1/2}). \quad (14)$$

Нам понадобится один результат Ю. Л. Шмудляна.

ТЕОРЕМА 5 [10]. Пусть $T(\lambda) \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ — сжимающая оператор-функция, аналитическая на связном n -мерном многообразии $\mathfrak{S}$. Тогда

- 1) линейалы $\mathcal{R}(D_{T(\lambda)})$ и $\mathcal{R}(D_{T^*(\lambda)})$ не зависят от $\lambda \in \mathfrak{S}$;
- 2) если $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — точки из $\mathfrak{S}$ не обязательно различные, то оператор-функция $T(\lambda)$ допускает представление

$$T(\lambda) = T(\lambda_0) + D_{T^*(\lambda_1)}\Psi(\lambda)D_{T(\lambda_2)}, \quad (15)$$

где $\Psi(\lambda) \in \mathcal{R}(\mathcal{D}_{T(\lambda_2)}, \mathcal{D}_{T^*(\lambda_1)})$ — аналитическая в $\mathfrak{S}$ оператор-функция.

Из теорем 4 и 5 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть S – m -секториальный оператор с вершиной в нуле и полуглом α , $T(\lambda) = \exp(-\lambda S)$, $\lambda \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$. Тогда

- 1) линейалы $\mathcal{R}(D_{T(\lambda)})$, $\mathcal{R}(D_{T^*(\lambda)})$, $\mathcal{R}((I - T_R(\lambda))^{1/2})$ не зависят от точки $\lambda \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ и совпадают между собой;
- 2) при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ и любом $f \in H$ вектор

$$g = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (I - T(\lambda)) f d\lambda$$

лежит в линейале $\mathfrak{N} = \mathcal{R}(D_{T(\lambda)})$ (не зависящем от λ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $|\arg \lambda| < \pi/2 - \alpha$, то оператор λS является m -секториальным с вершиной в нуле и полуглом $\alpha + |\arg \lambda|$. По теореме 4 оператор $T(\lambda) = \exp(-\lambda S)$ лежит в классе $C(\alpha + |\arg \lambda|)$ и $\mathcal{R}(D_{T(\lambda)}) = \mathcal{R}(D_{T^*(\lambda)})$. По теореме 5 в силу голоморфности $T(\lambda)$ в $\text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ линейалы $\mathcal{R}(D_{T(\lambda)})$, $\mathcal{R}(D_{T^*(\lambda)})$ не зависят от λ и, таким образом, совпадают между собой.

Обозначим $\mathfrak{N} = \mathcal{R}(D_{T(\lambda)})$, $\lambda \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$.

Как известно [1], для голоморфной полугруппы $T(t)$ при $t > 0$ справедлива оценка $\|T'(t)\| \leq Mt^{-1}$.

Поэтому оператор-функция $T(t)$ равномерно непрерывна на $[\delta, \infty)$ при любом $\delta > 0$. Но тогда справедлива теорема об отображении спектра [3, предложение 8.5]:

$$\exp(-t\sigma(S)) = \sigma(T(t)) / \{0\}, \quad t > 0.$$

По той же причине и $\exp(-\lambda\sigma(S)) = \sigma(T(\lambda)) / \{0\} \quad \forall \lambda \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$. Отсюда следует, что $-1 \in \rho(T(\lambda))$. Из $T(\lambda) \in \tilde{C}$ и (14) получаем

$$\mathcal{R}(D_{T(\lambda)}) = \mathcal{R}(D_{T^*(\lambda)}) = \mathcal{R}((I - T_R(\lambda))^{1/2}) = \mathfrak{N} \quad \forall \lambda \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha).$$

2) Положим в (15) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, $T_0 = T(\lambda_0)$, $D_{T_0} = D_{T(\lambda_0)}$, $D_{T_0^*} = D_{T^*(\lambda_0)}$.

Из (15) $T(\lambda) = T_0 + D_{T_0^*} \Psi(\lambda) D_{T_0}$, где $\Psi(\lambda)$ – голоморфная оператор-функция из $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ в $\text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$.

При любом $f \in H$ имеем $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$

$$g = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (I - T(\lambda)) f d\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1)(I - T_0)f + D_{T_0^*} \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Psi(\lambda) D_{T_0} f d\lambda \right).$$

Как уже отмечалось, $\mathcal{R}(I - T_0) \subseteq \mathcal{R}((I - T_{0R})^{1/2}) = \mathfrak{N}$. Значит $g \in \mathfrak{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для полугруппы $T(t) = \exp(-tS)$ при любых $f \in H$, $u \in \mathcal{D}(s)$ и $0 < \tau < t$ справедливо неравенство

$$|((T(\tau) - T(t))f, u)|^2 \leq \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} (t - \tau) \|S_R^{1/2} u\|^2 (\|T(\tau)f\|^2 - \|T(t)f\|^2). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [1], [2], $T(t)f \in \mathcal{D}(S) \quad \forall f \in H, \forall t \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$. Справедливы также равенства [1], [2]:

$$\begin{aligned} T(\tau)f - T(t)f &= \int_{\tau}^t ST(\xi)f d\xi, \\ \|T(\tau)f\|^2 - \|T(t)f\|^2 &= 2 \int_{\tau}^t \|S_R^{1/2}T(\xi)f\|^2 d\xi \quad \forall f \in H. \end{aligned}$$

Пусть $u \in \mathcal{D}(s)$, тогда из (5)

$$\begin{aligned} |(T(\tau) - T(t))f, u| &= \left| \left(\int_{\tau}^t ST(\xi)f d\xi, u \right) \right| \leq \int_{\tau}^t |(S_R^{1/2}T(\xi)f, (I - iG)S_R^{1/2}u)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{\cos \alpha} \|S_R^{1/2}u\| \int_{\tau}^t \|S_R^{1/2}T(\xi)f\| d\xi \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2} \cos \alpha} \sqrt{t - \tau} \|S_R^{1/2}u\| \sqrt{\|T(\tau)f\|^2 - \|T(t)f\|^2}. \end{aligned}$$

Устремляя в (16) $\tau \rightarrow +0$, получаем $\forall f \in H, \forall u \in \mathcal{D}(s)$

$$|((I - T(t))f, u)|^2 \leq \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} t \|S_R^{1/2}u\|^2 \|D_{T(t)}f\|^2. \quad (17)$$

Полагая в (17) $f = u$, используя (12) и $\text{Re}((I - T(t))u, u) \leq |((I - T(t))u, u)|$, получаем для любого $u \in \mathcal{D}(s)$

$$\|(I - T_R(t))^{1/2}u\|^2 \leq |((I - T(t))u, u)| \leq \frac{1}{\cos^2 \alpha} \|S_R^{1/2}u\|^2 t. \quad (18)$$

Обозначим $A(t) = t^{-1}(I - T(t))$, тогда (18) можно переписать в виде

$$\|A_R^{1/2}(t)u\|^2 \leq |(A(t)u, u)| \leq \frac{1}{\cos^2 \alpha} \|S_R^{1/2}u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(s). \quad (19)$$

Из (19) $A_R^{1/2}(t)u = M(t)S_R^{1/2}u$, где $M(t) \in \mathcal{L}(H)$. Отсюда при любом $f \in H$ имеем $M^*(t)f \in \mathcal{D}(s)$ и $A_R^{1/2}(t)f = S_R^{1/2}M^*(t)f$.

Следовательно, при любом $t > 0$

$$\mathcal{R}((I - T_R(t))^{1/2}) = \mathfrak{N} \subseteq \mathcal{R}(S_R^{1/2}). \quad (20)$$

3. Доказательство теоремы 1. $2) \Rightarrow 1)$ – это теорема 3 с учетом

$$\lim_{t \rightarrow +0} T(t)f = f \quad \forall f \in H.$$

$3) \Leftrightarrow 4)$ из $I - T(t) \in C(\alpha)$, $t > 0$, т.е. при любом $f \in H$

$$\|(I - T_R(t))^{1/2}f\|^2 \leq |((I - T(t))f, f)| \leq \frac{1}{\cos \alpha} \|(I - T_R(t))^{1/2}f\|^2. \quad (21)$$

$1) \Rightarrow 3)$ и $1) \Rightarrow 4)$ следует из (21) и (18).

$4) \Rightarrow 2)$. Пусть $t^{-1} \|(I - T_R(t))^{1/2}u\|^2 \leq C$ при $t > 0$, где C зависит от u .

Из (12) следует

$$t^{-1} \|D_{T(t)}u\|^2 \leq C. \quad (22)$$

Рассмотрим функцию $u(t) = \|D_{T(t)}u\|^2 = \|u\|^2 - \|T(t)u\|^2$. Она непрерывна на $[0, \infty)$ и дифференцируема на $(0, \infty)$, причем

$$u'(t) = 2\|S_R^{1/2}T(t)u\|^2, \quad t > 0, \quad u(0) = 0.$$

По теореме Лагранжа $u(t) = u'(\xi(t))t$, где $\xi(t) \in (0, t)$.

Значит, $u(t) = 2\|S_R^{1/2}T(\xi(t))u\|^2 t$. Из (22) получаем $\|S_R^{1/2}T(\xi(t))u\|^2 \leq C$ при $t > 0$. Следовательно, функция $|s[T(\xi(t))u]|$ ограничена при $t \rightarrow +0$, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +0} |s[T(t)u]| < \infty.$$

$1) \Rightarrow 6)$. Пусть $x \in \mathcal{D}(S)$, тогда из

$$Sx = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1}(I - T(t))x, \quad \|x\|^2 - \|T(t)x\|^2 = \operatorname{Re}((I - T(t))x, (I + T(t))x)$$

следует

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} \|D_{T(t)}x\|^2 = 2 \operatorname{Re}(Sx, x) = 2\|S_R^{1/2}x\|^2.$$

Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(s)$. Из (18) и (12)

$$t^{-1} \|D_{T(t)}u\|^2 \leq \frac{2}{\cos^2 \alpha} \|S_R^{1/2}u\|^2. \quad (23)$$

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{-1} \|D_{T(t)}u\|^2 = 2\|S_R^{1/2}u\|^2.$$

Так как $\mathcal{D}(S)$ ядро формы s , то для $u \in \mathcal{D}(s)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор $x \in \mathcal{D}(S)$, что выполняется неравенство $\|S_R^{1/2}u - S_R^{1/2}x\| < \varepsilon$. Из (23)

$$\sqrt{t^{-1}} \|D_{T(t)}u - D_{T(t)}x\| < \sqrt{2} \frac{\varepsilon}{\cos \alpha}.$$

Для $x \in \mathcal{D}(S)$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ такое, что при $t < \delta$ выполнено

$$|\sqrt{t^{-1}} \|D_{T(t)}x\| - \sqrt{2} \|S_R^{1/2}x\|| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $t < \delta$ выполняется

$$\begin{aligned} |\sqrt{2}\|S_R^{1/2}u\| - \sqrt{t^{-1}}\|D_{T(t)}u\|| &\leq |\sqrt{2}(\|S_R^{1/2}u\| - \|S_R^{1/2}x\|)| \\ &\quad + |\sqrt{2}\|S_R^{1/2}x\| - \sqrt{t^{-1}}\|D_{T(t)}x\|| \\ &\quad + |\sqrt{t^{-1}}(\|D_{T(t)}u\| - \|D_{T(t)}x\|)| \\ &< \left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha}\right)\varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(\|T(t)u\|^2)|_{t=\pm 0} = -2\|S_R^{1/2}u\|^2. \quad (24)$$

Отсюда следует существование $(d/dt)(\|T(t)u\|)|_{t=0}$ и равенство (1).

6) $\Rightarrow$ 2). Из существования производной следует ограниченность функции $t^{-1}(\|u\| - \|T(t)u\|)$ при $t \rightarrow +0$. Следовательно, функция

$$t^{-1}(\|u\|^2 - \|T(t)u\|^2) = t^{-1}(\|u\| - \|T(t)u\|)(\|u\| + \|T(t)u\|)$$

ограничена при $t \rightarrow +0$, т.е. справедливо (22). Далее проводим те же рассуждения, что и при доказательстве импликации 4) $\Rightarrow$ 2).

5) $\Rightarrow$ 3). Из существования производной следует

$$\sup_{t>0} |t^{-1}(I - T(t))u, u| < \infty.$$

1) $\Rightarrow$ 5). Покажем, что для

$$\frac{d}{dt}(T(t)u, u)|_{t=+0} = -S[u]. \quad (25)$$

Пусть $\omega[f, g]$ произвольная замкнутая плотно заданная полуторалинейная секториальная форма с вершиной в нуле и полууглом $\beta \in [0, \pi/2)$, W_R – неотрицательный самосопряженный оператор, ассоциированный с ω_R , тогда

$$\omega[f, g] = ((I + i\Gamma)W_R^{1/2}f, W_R^{1/2}g) \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(\omega),$$

где $\Gamma = \Gamma^* \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(W_R))$, $\|\Gamma\| \leq \tan \beta$.

При $f, g \in \mathcal{D}(\omega)$ имеем

$$\begin{aligned} |\omega[f] - \omega[g]| &= |\omega[f - g, f] - \omega[g, g - f]| \\ &\leq |((I + i\Gamma)W_R^{1/2}(f - g), W_R^{1/2}f)| + |((I + i\Gamma)W_R^{1/2}g, W_R^{1/2}(f - g))|. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $f, g \in \mathcal{D}(\omega)$

$$|\omega[f] - \omega[g]| \leq \frac{1}{\cos \beta} \|W_R^{1/2}(f - g)\| (\|W_R^{1/2}f\| + \|W_R^{1/2}g\|). \quad (26)$$

Пусть $u \in \mathcal{D}(s)$. Тогда при любом $x \in \mathcal{D}(S)$

$$\begin{aligned} |(A(t)u, u) - s[u]| &\leq |(A(t)u, u) - (A(t)x, x)| + |(A(t)x, x) - (Sx, x)| \\ &\quad + |(Sx, x) - s[u]|. \end{aligned}$$

Применяя (26) для форм $(A(t)u, u)$, $s[u]$ и используя (19), получаем

$$\begin{aligned} |(A(t)u, u) - s[u]| &\leq \frac{1}{\cos \alpha} \|A_R^{1/2}(t)(u - x)\| (\|A_R^{1/2}(t)u\| + \|A_R^{1/2}(t)x\|) \\ &\quad + |(A(t)x, x) - (Sx, x)| + \frac{1}{\cos \alpha} \|S_R^{1/2}(u - x)\| (\|S_R^{1/2}u\| + \|S_R^{1/2}x\|) \\ &\leq C \|S_R^{1/2}(u - x)\| (\|S_R^{1/2}u\| + \|S_R^{1/2}x\|) + |(A(t)x, x) - (Sx, x)|, \end{aligned}$$

причем C не зависит от t, u, x .

Так как для $x \in \mathcal{D}(S)$ выполняется

$$\lim_{t \rightarrow +0} (A(t)x, x) = (Sx, x) \quad \text{и} \quad \inf \{ \|S_R^{1/2}(u - x)\|, x \in \mathcal{D}(S) \} = 0,$$

то получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} (A(t)u, u) = s[u].$$

Следовательно, справедливо (25). Теперь равенства (2) и (3) получаются из (25) и (21) с использованием поляризованного тождества

$$\omega[u, v] = \frac{1}{4} \{ \omega[u + v] - \omega[u - v] + i\omega[u + iv] - i\omega[u - iv] \},$$

верного для любой полуторалинейной формы ω .

Из равенства

$$t^{-1} \|(I - T(t))u\|^2 + t^{-1} \|D_{T(t)}u\|^2 = 2 \operatorname{Re}(t^{-1}(I - T(t))u, u)$$

при $u \in \mathcal{D}(s)$ из (24) и (25) получаем (4).

4. Доказательство теоремы 2. Равенства

$$\mathcal{R}(D_{T(t)}) = \mathcal{R}(D_{T^*(t)}) = \mathcal{R}((I - T_R(t))^{1/2}) = \mathfrak{N}$$

при всех $t \in \operatorname{Int} \Theta(\pi/2 - \alpha)$ уже установлены.

Пусть вектор $x \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$. По предложению 1 имеем $|(x, u)| \leq C(x) \|S_R^{1/2}u\|$ для всех $u \in \mathcal{D}(s) = \mathcal{D}(S_R^{1/2})$. Так как $T^*(\xi)f \in \mathcal{D}(S^*)$ для любого $f \in H$, $\xi \in \operatorname{Int} \Theta(\pi/2 - \alpha)$, то

$$|(x, T^*(\xi)f)| \leq C(x) \|S_R^{1/2}T^*(\xi)f\|. \quad (27)$$

Из (27) при $0 < \tau < t$ получаем

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t |(T(\xi)x, f)| d\xi &\leq C(x) \int_{\tau}^t \|S_R^{1/2}T^*(\xi)f\| d\xi \\ &\leq C(x)\sqrt{t-\tau} \sqrt{\int_{\tau}^t \|S_R^{1/2}T^*(\xi)f\|^2 d\xi} \\ &\leq C(x)\sqrt{t-\tau} \left(\frac{1}{2} (\|T^*(\tau)f\|^2 - \|T^*(t)f\|^2) \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} C(x)\sqrt{t-\tau} \|D_{T^*(t)}f\|. \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \left(\int_{\tau}^t T(\xi)x d\xi, f \right) \right| \leq \int_{\tau}^t |(T(\xi)x, f)| d\xi,$$

то

$$\left| \left(\int_{\tau}^t T(\xi)x d\xi, f \right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} C(x)\sqrt{t-\tau} \|D_{T^*(t)}f\|. \quad (28)$$

Из предложения 1 и (28) следует

$$h = \int_{\tau}^t T(\xi)x d\xi \in \mathcal{R}(D_{T^*(t)}) = \mathfrak{N}.$$

По предложению 2 вектор

$$g = \int_{\tau}^t (I - T(\xi))x d\xi$$

лежит в $\mathfrak{N}$. Поскольку $h = -g + (t - \tau)x$, то $x \in \mathfrak{N}$.

Таким образом, $\mathcal{R}(S_R^{1/2}) \leq \mathfrak{N}$. Противоположное включение (20) уже установлено.

Отметим, что

- 1) $T(t)x \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$, $t \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha)$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$;
- 2) $\int_{\tau}^t T(\xi)x d\xi \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$.

Эти утверждения следуют из равенств $T(t)x = x - (I - T(t))x$,

$$\int_{\tau}^t T(\xi)x d\xi = (t - \tau)x - \int_{\tau}^t (I - T(\xi))x d\xi,$$

предложения 2 и теоремы 2.

Кроме того, из (16) и предложения 1 при любом $f \in H$

$$\begin{aligned} (T(t) - T(\tau))f &\in \mathcal{R}(S_R^{1/2}), \quad t, \tau \in \text{Int } \Theta(\pi/2 - \alpha), \\ \|S_R^{-1/2}(T(t) - T(\tau))f\|^2 &\leq \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} (t - \tau) (\|T(\tau)f\|^2 - \|T(t)f\|^2), \quad 0 < \tau < t. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $x \in \mathcal{R}(S_R^{1/2})$ вектор-функция $S_R^{-1/2}T(t)x$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$ и

$$\|S_R^{-1/2}x - S_R^{-1/2}T(t)x\| = o(\sqrt{t}), \quad t \rightarrow +0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [3] Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. Однопараметрические полугруппы. М.: Мир, 1992.
- [4] Крейн С. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Матем. сб. 1947. Т. 20. № 3. С. 431–490.
- [5] Шмультян Ю. Л. Двустороннее деление в кольце операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 5. С. 605–610.
- [6] Ando T., Nishio K. Positive self-adjoint extensions of positive symmetric operators // Tôhoku Math. J. 1970. V. 22. P. 65–75.
- [7] Арлинский Ю. М. Об одном классе сжатий в гильбертовом пространстве // Укр. матем. ж. 1977. Т. 39. № 6. С. 691–696.
- [8] Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
- [9] Fillmore P. A., Williams J. P. On operator ranges // Adv. Math. 1971. V. 7. P. 254–281.
- [10] Шмультян Ю. Л. О некоторых свойствах стабильности для аналитических оператор-функций // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 511–520.