Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Григорян, Дивизор обобщенной аналитической функции, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 655–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:03:36

УДК 517.966

ДИВИЗОР ОБОБЩЕННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

С. А. Григорян

Для обобщенных аналитических функций определен порядок нуля и доказана теорема о делении: если порядки нулей числителя мажорируют порядки нулей знаменателя, то частное есть обобщенная аналитическая функция.

Библиография: 10 названий.

Пусть f – аналитическая функция в единичном круге D комплексной плоскости; $\text{ord}_z f$ – порядок нуля f в $z \in D$. Как хорошо известно, аналитическая в D функция g делит функцию f тогда и только тогда, когда $\text{ord}_z g \leq \text{ord}_z f$, $z \in D$. В заметке доказывается аналогичная теорема для обобщенных аналитических функций.

1. Введение. Пусть Γ – аддитивная подгруппа группы вещественных чисел $\mathbb{R}$, наделенная дискретной топологией; G – компактная группа характеров группы Γ . Обозначим через Δ локально компактное пространство, полученное из декартова произведения $G \times [0, 1)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. Полученную точку будем обозначать через 0. Модулем точки $s = \alpha r \in \Delta$ называется число r ($|s| = r$).

Для $a \in \Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$ пусть φ^a – непрерывная функция на Δ , равная $\varphi^a(\alpha r) = \alpha(a)r^a$, $r \neq 0$, и

$$\varphi^a(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0, \\ 0, & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$$

Алгебру полиномов от φ^a , $a \in \Gamma_+$, над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ будем обозначать через $\mathcal{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть D – открытое множество в Δ . Непрерывная функция f на D называется *обобщенной аналитической функцией*, если для каждой точки $s \in D$ существует такая окрестность $U \subset D$, что f аппроксимируется на U функциями из $\mathcal{P}$. Пространство обобщенных аналитических функций на D будем обозначать через $\mathcal{O}(D)$.

В случае, когда Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, обобщенная аналитическая функция есть в точности аналитическая функция одного комплексного переменного. Другой пример приведен в п. 4.

Пусть σ – нормированная мера Хаара группы G . Каждая функция $f \in \mathcal{O}(\Delta^0)$, где $\Delta^0 = \Delta \setminus \{0\}$, имеет формальный ряд Фурье

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a \varphi^a,$$

где коэффициенты

$$c_a = \int_G \frac{f(\alpha r)}{\varphi^a(\alpha r)} d\sigma(\alpha)$$

не зависят от выбора r . Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a \neq 0$, называется *спектром функции* f и обозначается через $\text{Sp } f$. Отметим, что если $\text{Sp } f \subset \Gamma_+$, то f однозначно продолжается до функции из $\mathcal{O}(\Delta)$ (см. [1], [2]).

Следующим шагом введем понятие дивизора обобщенной аналитической функции. Для этого заметим, что, локально, множество Δ^0 представимо в виде декартова произведения $K \times W$, где $K \subset G$, W – открытое в $\mathbb{C}$ множество. Сужение $f \in \mathcal{O}(\Delta^0)$ на это произведение есть функция $f(\alpha, z)$, аналитическая по z (см. [1]–[3]). Поэтому для каждой функции $f \in \mathcal{O}(\Delta^0)$ можно определить $\text{ord } f(s)$, полагая в точке $s = (\alpha, z_0) \in K \times W$

$$\text{ord } f(s) = \text{ord}_{z_0} f_\alpha,$$

где $\text{ord}_{z_0} f_\alpha$ – порядок нуля аналитической функции $f_\alpha(z) = f(\alpha, z)$ в z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дивизором функции $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ называется функция

$$\text{div } f(s) = \begin{cases} \text{ord } f(s) : & s \neq 0, \\ \inf \text{Sp } f : & s = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\text{div } fg = \text{div } f + \text{div } g$. Отметим, что $\text{div } \varphi^b(s) = 0$, если $s \in \Delta^0$ и $\text{div } \varphi^b(0) = b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$. Говорят, что g *делит* f , если найдется такая функция $h \in \mathcal{O}(\Delta)$, что $f = gh$.

Основное утверждение данной заметки следующее.

ТЕОРЕМА. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$. Функция g делит f тогда и только тогда, когда $\text{div } g \leq \text{div } f$.

Укажем два следствия этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\text{div } f = \text{div } g$. Тогда найдется такая функция $h \in \mathcal{O}(\Delta)$, что $f = g \exp h$.

СЛЕДСТВИЕ 2 [1]. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ не обращается в нуль на Δ^0 . Тогда найдутся $a \in \Gamma_+$ и $h \in \mathcal{O}(\Delta)$ такие, что $f = \varphi^a \exp h$.

2. Аналитические почти периодические функции. Как показали Р. Аренс и И. Зингер [4], существует тесная связь между обобщенными аналитическими и почти периодическими аналитическими функциями. Напомним, что непрерывная функция $f(t)$ на $\mathbb{R}$ называется *почти периодической*, если равномерно на $\mathbb{R}$ она аппроксимируется тригонометрическими полиномами вида $\sum c_n e^{ia_n t}$ (a_n – вещественное число).

Аналитическую в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq \delta\}$ функцию называют *почти непериодической*, если она почти периодична на каждой прямой $\mathbb{R} + i\delta_0$, $\delta_0 > \delta$. По теореме Г. Бора каждая аналитическая почти периодическая функция в верхней полуплоскости $\{\text{Im } z > 0\}$ представима в виде формального ряда Фурье

$$f(z) \sim \sum_{a \in \mathbb{R}} c_a e^{iaz},$$

где коэффициенты

$$c_a = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t + i\delta) e^{-ia(t+i\delta)} dt, \quad a \in \mathbb{R},$$

не зависят от $\delta > 0$. Множество тех $a \in \mathbb{R}$, для которых $c_a \neq 0$, называется спектром функции f и обозначается через $\text{Sp } f$.

Если аналитическая почти периодическая функция f ограничена в полуплоскости $\{\text{Im } z > \delta\}$, то $\text{Sp } f$ содержится в $\mathbb{R}_+$ (см. [5, с. 320]). Пусть $\mathcal{O}$ – пространство всех аналитических почти периодических функций на $\{\text{Im } z > 0\}$, ограниченных на $\{\text{Im } z > \delta\}$.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f \in \mathcal{O}$, $f \neq 0$, непрерывно продолжается до почти периодической функции на $\{\text{Im } z \geq 0\}$. Тогда для любого $\delta > 0$ функция

$$g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |f(t)| \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt, \quad z = x + iy, \quad (1)$$

ограничена снизу в полуплоскости $\{\text{Im } z \geq \delta\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция f ограничена сверху на $\{\text{Im } z \geq 0\}$, то, не теряя общности, можно предположить, что $|f| < 1$ на $\{\text{Im } z \geq 0\}$. По теореме Иессена (см. [6], а также [7]) для каждого $a > 0$ существует m , $0 < m < 1$, такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$0 \leq \int_x^{x+1} (\log |f(t)|_m - \log |f(t)|) dt < c,$$

где $|f(t)|_m = \max(f(t), m)$. Отсюда, полагая $d = \log m$, получим

$$\int_x^{x+1} \log |f(t)| dt \geq d - c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Определим функцию

$$b_n(x, y) = \sup_{t \in [n, n+1]} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Простое вычисление показывает, что число

$$k(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x, y), \quad y \in [\delta, +\infty),$$

ограничено сверху. Так как $d - c < 0$, то

$$g(x + iy) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \log |f(t)| \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dt > \frac{d-c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(x, y) > k(y) \frac{d-c}{\pi}.$$

Из ограниченности $k(y)$ на $[\delta, \infty)$ получаем, что $g(z)$ ограничена снизу на $\{\text{Im } z \geq \delta\}$.

По теореме о факторизации (см. [8, с. 190]) каждую ограниченную аналитическую в $\{\text{Im } z \geq \delta\}$ функцию можно представить в виде

$$f(z) = e^{iaz} B(z) S(z) F(z), \quad (2)$$

где $a \geq 0$, $B(z)$ – произведение Бляшке, построенное по нулям функции f , $S(z)$ – сингулярная внутренняя функция, а $F(z)$ – внешняя функция.

Применение этой теоремы к аналитической почти периодической функции приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. Пусть функция $f \in \mathcal{O}$ удовлетворяет условию леммы 1 и $a_f = \inf \operatorname{Sp} f$. Тогда

$$f(z) = e^{ia_f z} B(z) S(z) F(z) \quad (3)$$

и

$$\inf \{ |F(z)| : \operatorname{Im} z > \delta \} > 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $g(z) = f(z)/e^{ia_f z}$. По теореме 1.5.2 из [5] функция $g(z)$ принадлежит $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $a \leq a_f$. Отсюда из ограниченности всех функций в равенстве (2) получим $a = a_f$. Для доказательства второй части леммы заметим, что $\log |F(z)|$ есть в точности гармоническая функция $g(z)$, удовлетворяющая равенству (1). Так как $g(z)$ ограничена снизу в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > \delta\}$, то для функции $|F(z)| = \exp g(z)$ выполняется неравенство (4).

Пусть f и g – аналитические почти периодические функции на $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$. По теореме Бора (см. [9, с. 118]) функция f/g продолжается до аналитической почти периодической функции тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_z g \leq \operatorname{ord}_z f$. Доказательство этой теоремы в терминах обобщенной аналитической функции приведено в [1].

Следующее утверждение является, в некотором смысле, усилением этой теоремы.

ЛЕММА 3. Пусть $f, g \in \mathcal{O}$. Функция f/g продолжается до некоторой функции $h \in \mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_z g \leq \operatorname{ord}_z f$ и $a_g \leq a_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитическая функция g имеет не более чем счетное число нулей на $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Количество прямых $\operatorname{Im} z = a$, $a > 0$, – континуум. Следовательно, множество прямых, на которых функция g не имеет нулей, образует всюду плотное множество в полуплоскости $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Поэтому, не теряя общности, можно предположить, что функции f и g продолжаются до почти периодической функции на $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ и g не имеет нулей на $\mathbb{R}$. Предположим сначала, что $f/g = h \in \mathcal{O}$. Тогда из общих свойств аналитических функций и из (3) следует, что $\operatorname{ord}_z g \leq \operatorname{ord}_z f$ и $a_g \leq a_f$. Обратно, пусть $\operatorname{ord}_z g \leq \operatorname{ord}_z f$ и $a_g \leq a_f$. По леммам 1 и 2

$$g(z) = e^{ia_g z} B_1(z) F_1(z), \quad f(z) = e^{ia_f z} B_2(z) S(z) F_2(z).$$

Внешняя функция $F(z) = F_1(z)/F_2(z)$ ограничена по модулю на $\{\operatorname{Im} z > \delta\}$. Из $\operatorname{ord}_z g \leq \operatorname{ord}_z f$ следует, что $B(z) = B_1(z)/B_2(z)$ – произведение Бляшке. Согласно (2) аналитическая почти периодическая функция

$$h(z) = e^{ia_z z} B(z) S(z) F(z), \quad a = a_f - a_g,$$

ограничена на $\{\operatorname{Im} z > \delta\}$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$. Функция f/g продолжается до некоторой функции из $\mathcal{O}(\Delta^0)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} g(s) \leq \operatorname{div} f(s)$ на Δ^0 (см. [1], [3]). Пусть $\operatorname{div} g(s) \leq \operatorname{div} f(s)$ и $h \in \mathcal{O}(\Delta^0)$ – продолжение f/g на Δ^0 . Функция h продолжается до функции из $\mathcal{O}(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Sp} h \subset \Gamma_+$. Между алгебрами $\mathcal{O}(\Delta)$ и $\mathcal{O}(\Gamma_+) = \{f \in \mathcal{O} : \operatorname{Sp} f \subset \Gamma_+\}$ существует сохраняющий спектр изоморфизм (см. [4]). Следовательно, в силу леммы 3 $h \in \mathcal{O}(\Delta)$ тогда и только тогда, когда $a_g \leq a_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Из условия $\operatorname{div} f = \operatorname{div} g$ следует, что функции f/g и g/f продолжаются до функций из $\mathcal{O}(\Delta)$, т.е. f/g не имеет нулей на Δ . Так как пространство Δ стягиваемо в точку 0 или, что то же самое, группа одномерных целочисленных когомологий $H^1(\Delta, \mathbb{Z})$ пространства Δ тривиальна, то (по теореме Брушлинского) не имеющая нулей на Δ функция обладает непрерывным логарифмом [10]. Поэтому найдется непрерывная на Δ функция h такая, что $f = g \exp h$. А поскольку алгебра $\mathcal{O}(\Delta)$ определяется локально, то $h \in \mathcal{O}(\Delta)$.

Из изоморфизма пространств $\mathcal{O}(\Gamma_+)$ и $\mathcal{O}(\Delta)$ следует существование принципа максимума для обобщенных аналитических функций (см [2]): сужение каждой функции из $\mathcal{O}(\Delta)$ на $\Delta(r) = \{s \in \Delta : |s| < r\}$ достигает максимума модуля на $G \times \{r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Сначала предположим, что $\Gamma = \mathbb{R}$. Пусть $\Delta_1 = G_1 \times [0, 1)/G_1 \times \{0\}$, где G_1 – компакт Бора, т.е. группа характеров группы $\mathbb{R}$, наделенной дискретной топологией. $\mathcal{O}(\Delta_1)$ – алгебра обобщенных аналитических функций на Δ_1 . Если $f \in \mathcal{O}(\Delta_1)$ не обращается в нуль на $\Delta_1 \setminus \{0\}$, то либо $f(0) \neq 0$, либо $f(0) = 0$. В первом случае по теореме $f = \exp h$, $h \in \mathcal{O}(\Delta_1)$. Пусть $f(0) = 0$. Покажем, что $\operatorname{div} f(0) > 0$. Действительно, в противном случае по теореме для любого $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, найдется функция $h_b \in \mathcal{O}(\Delta_1)$ такая, что $f = \varphi^b h_b$. Так как

$$\lim_{b \rightarrow 0} |\varphi^b| = 1$$

на компактных подмножествах пространства $\Delta_1 \setminus \{0\}$, то на этих же множествах должно выполняться равенство $\lim_{b \rightarrow 0} |h_b| = 1/|f|$, которое противоречит принципу максимума для обобщенных аналитических функций. Отсюда $f = \varphi^a \exp h$, $a = \operatorname{div} f(0)$, $a > 0$.

Пусть $\Gamma \neq \mathbb{R}$. Вложение $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ порождает вложение $\mathcal{O}(\Delta)$ в $\mathcal{O}(\Delta_1)$. Поэтому и в этом случае $f = \varphi^a \exp h$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $a \in \Gamma$. Как нетрудно проверить, $\operatorname{Sp} f$ получается из $\operatorname{Sp}(\exp h)$ сдвигом на a . А поскольку $0 \in \operatorname{Sp}(\exp h)$ и $\operatorname{Sp}(\exp h) \subset \Gamma_+$, получим $a \in \operatorname{Sp} f$.

4. Приложение. Пусть M – гладкое многообразие в $\mathbb{C}^n$, $T_z(M)$ – касательное пространство к M в точке $z \in M$, $T_z^{\mathbb{C}}(M) = T_z(M) \cap iT_z(M) \subset \mathbb{C}^n$ – наибольшее комплексное подпространство в $T_z(M)$. Многообразие M называется *CR-многообразием*, если $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}}(M)$ не зависит от выбора $z \in M$. Функция f на CR-многообразии называется *CR-функцией*, если для любого комплексного векторного поля

$$\xi(z) = (\xi_1(z), \dots, \xi_n(z)) \in T_z^{\mathbb{C}}(M), \quad z \in M,$$

имеем

$$\sum_{j=1}^n \xi_j(z) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0, \quad (z_1, \dots, z_n) \in T_z^{\mathbb{C}}(M).$$

Приведем пример CR-многообразия. Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ – положительные иррациональные числа, линейно независимые над полем рациональных чисел,

$$\Omega = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| = \dots = |z_n|, |z_1| < 1\}.$$

Множество $M = \Omega \setminus \{0\}$ есть CR-многообразие и $\dim_{\mathbb{C}} T_z^{\mathbb{C}} = 1$, $z \in M$. Поэтому через каждую точку $z \in M$ проходит только одна комплексная прямая. Точка $0 \in \Omega$

является особой точкой множества Ω , в ней “склеиваются” все комплексные прямые многообразия M . Обозначим через $\mathcal{O}(\Omega)$ пространство всех непрерывных функций на Ω , которые являются CR-функциями на M . Мы ставим своей целью решить следующую задачу. Пусть $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Требуется найти необходимые и достаточные условия, при которых функция g делит функцию f , т.е. $f = gh$, $h \in \mathcal{O}(\Omega)$. Если $g(0) \neq 0$, то ответ сводится к теореме Римана об устранимых особенностях. Если же $g(0) = 0$, то при решении проблемы “о делении” сталкиваемся с существенными трудностями, которые связаны с поведением функции g в окрестности 0. Для преодоления этих трудностей покажем, что $\mathcal{O}(\Omega)$ изоморфно пространству обобщенных аналитических функций.

Пусть T – n -мерный тор в $\mathbb{C}^n$, Δ – топологическое пространство, полученное из тензорного произведения $T \times [0, 1)$ путем отождествления в точку слоя $T \times \{0\}$. Этот тор является группой характеров n -мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$. Если $\alpha = (e^{it_1}, \dots, e^{it_n}) \in T$, и $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, то

$$\alpha(m) = \prod_{k=1}^n e^{im_k t_k}.$$

С помощью чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ определим отображение $\mathbb{Z}^n$ в $\mathbb{R}$:

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \mapsto m^0 = m_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} m_2 + \dots + \frac{\gamma_1}{\gamma_n} m_n.$$

Так как $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел, это отображение является вложением. Поэтому можно считать, что $\mathbb{Z}^n$ – аддитивная подгруппа группы $\mathbb{R}$. Положим $\mathbb{Z}_+^n = \{m \in \mathbb{Z}^n : m^0 \geq 0\}$. Определим на пространстве Δ набор непрерывных функций φ^m , $m \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\varphi^m(\alpha r) = \alpha(m) r^{m^0}.$$

Пусть $\mathcal{O}(\Delta)$ – пространство обобщенных аналитических функций на Δ , порожденных семейством φ^m , $m \in \mathbb{Z}_+^n$. Покажем, что отображение

$$\psi: \Omega \rightarrow \Delta, \quad \psi(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{|z_1|} \dots \frac{z_n}{|z_n|} \right) |z_1|, \quad \psi(0) = 0,$$

порождает изоморфизм между пространствами $\mathcal{O}(\Omega)$ и $\mathcal{O}(\Delta)$. Действительно, функция

$$\psi^m(z_1, \dots, z_m) = \varphi^m \circ \psi(z_1, \dots, z_n) = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$$

принадлежит $\mathcal{O}(\Omega)$. Каждая функция из $\mathcal{O}(M)$ локально, в окрестности точки $z \in M$, аппроксимируется линейными комбинациями ψ^m , $m \in \mathbb{Z}_+^n$. Из определения обобщенной аналитической функции получаем, что $\mathcal{O}(M)$ изоморфно пространству $\mathcal{O}(\Delta \setminus \{0\})$. Так как каждая функция из $\mathcal{O}(\Delta \setminus \{0\})$, ограниченная в окрестности 0, продолжается до функции из $\mathcal{O}(\Delta)$ (см. [1]), то пространства $\mathcal{O}(\Omega)$ и $\mathcal{O}(\Delta)$ изоморфны. Следовательно, можно определить дивизор функции $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\operatorname{div} f = \operatorname{div} g$, где $f = g \circ \psi$, $g \in \mathcal{O}(\Delta)$.

Заметим, что $\operatorname{div} f(z) = \operatorname{ord}_z f$, $z \neq 0$, где $\operatorname{ord}_z f$ – порядок нуля сужения функции f на комплексную прямую, проходящую через точку z .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорян С. А. Обобщенные аналитические функции // УМН. 1994. Т. 49, № 2. С. 3–43.
- [2] Григорян С. А. Максимальные алгебры обобщенных аналитических функций // Изв. АН АрмССР. 1981. Т. 15, № 5. С. 358–365.
- [3] Григорян С. А. Обобщенные мероморфные функции // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 1. С. 147–166.
- [4] Arens R., Singer I. Generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81. P. 379–393.
- [5] Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [6] Jessen B. Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Function // Math. Ann. 1933. V. 108. P. 485–516.
- [7] Arens R. The boundary integral of $\log |\Phi|$ for generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 86. P. 57–69.
- [8] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1975.
- [9] Бор Г. Почти периодические функции. М.: ОГИЗ, 1934.
- [10] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.