Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Зефилов, Коммутирующие алгебраические соответствия и группы, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 662–670

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 03:04:24

УДК 512

КОММУТИРУЮЩИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТВЕТСТВИЯ И ГРУППЫ

И. В. Зефиров

В статье рассматривается естественность возникновения группового подхода в решении задачи алгебраического коммутирования. Получены новые, ранее неизвестные решения. Особое внимание уделено примеру коммутирования, получающемуся из икосаэдрального уравнения.

Библиография: 8 названий.

Важность задачи о коммутирующих отображениях в теории динамических систем и ее связи с интегрируемостью продемонстрирована в обзоре А. П. Веселова [1]. Для полиномиальных и рациональных отображений эта задача была решена при некоторых естественных предположениях в замечательных работах Жюлиа, Фату и Ритта [2]–[4]. Настоящая работа посвящена случаю многозначных алгебраических отображений или соответствий.

Алгебраическим соответствием $P: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$, заданным уравнением $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ – полином, называется многозначное отображение, сопоставляющее точке x набор $\{y_i\}$ всех таких точек, что $P(x, y_i) = 0$, причем с учетом кратности. Композицией двух алгебраических соответствий, задаваемых полиномами $P_1(x, y)$ и $P_2(y, z)$, естественно называть соответствие, задаваемое полиномом $P_3(x, z)$, получающимся после исключения y из $P_1(x, y) = 0$ и $P_2(y, z) = 0$. Композиция обозначается $P_2 \circ P_1$, а коммутирование означает независимость композиции от порядка применения P_1 и P_2 , т.е. $P_3 = P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2$.

Иначе говоря, имеет место совпадение наборов $\{z_i\}$, $\{x_i\}$, где $\{z_i\}$ получается действием P_2 на набор $\{y_i\}$, полученный действием P_1 на произвольную точку $x = a$. Набор $\{x_i\}$ получается аналогично, только соответствия P_2 , P_1 действуют на ту же точку $z = a$ в обратном порядке.

В случае алгебраических соответствий известны лишь некоторые примеры коммутирования (см. [1] и ниже).

В этой работе мы построим новый пример коммутирующего алгебраического соответствия, а также предложим групповой подход к построению других подобных примеров. Интерес к ним обусловлен, в частности, возможностью применения в теории интегрируемых моделей статистической механики (см. [1]).

Автор признателен А. П. Веселову, привлечшему его внимание к этой задаче, за полезные обсуждения.

1. Новый пример коммутирующих алгебраических соответствий. Упомянутые в [1] примеры такого коммутирования задаются симметричными полиномами. Это модулярные соответствия Φ_m, Φ_n при взаимно простых m и n и соответствия Эйлера–Шалля. Соответствие $P(x, y)$ называется *симметричным*, если $P(x, y) \equiv P(y, x)$. Докажем сначала следующее простое утверждение.

ЛЕММА. *Два симметричных соответствия P_1 и P_2 коммутируют тогда и только тогда, когда их композиция симметрична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточности положим $P^*(x, y) = P(y, x)$ и заметим, что $(P_2 \circ P_1)^* = P_1^* \circ P_2^*$, тогда

$$P_3^* = (P_2 \circ P_1)^* = P_1^* \circ P_2^* = P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = P_3.$$

Необходимость следует из цепочки

$$P_2 \circ P_1 = P_3 = P_3^* = (P_2 \circ P_1)^* = P_1^* \circ P_2^* = P_1 \circ P_2.$$

В дальнейшем мы используем это утверждение для построения нового примера коммутирования. Он получается из икосаэдрального уравнения, подробно описанного в классической работе Ф. Клейна [5]. Есть несколько причин для его подробного рассмотрения. Во-первых, для доказательства коммутирования применяется другая техника, во-вторых, использование икосаэдра придает задаче наглядную геометрическую интерпретацию. И, в-третьих, становится ясно, что важную роль играют свойства конкретных групп дробно-линейных подстановок. Ниже будет показано, как известные примеры коммутирующих соответствий можно уложить в одну общую схему проведением прямых аналогий.

Основная идея заключается в переходе к параметризации кривых, задаваемых полиномами $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(y_1, y_2)$. Так как в нашем примере кривые $P_1(x_1, y_1) = 0$, $P_2(x_2, y_2) = 0$, $P_3(y_1, y_2) = 0$ рациональны, то удобно сразу сделать ограничение на рациональность. Симметричность рациональной кривой означает, что найдутся такая рациональная функция f и дробно-линейная инволюция σ , что любую точку (x, y) этой кривой можно представить в виде $x = f(\tau), y = f \circ \sigma(\tau)$ при некотором τ .

Тогда кривые P_1, P_2 запишутся в виде

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = f_1(\tau), \\ y_1 = f_1 \circ \sigma_1(\tau), \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x_2 = f_2(\tau), \\ y_2 = f_2 \circ \sigma_2(\tau), \end{cases}$$

где f_1, f_2 – рациональные функции, σ_1, σ_2 – дробно-линейные инволюции, т.е. $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \tau$.

Исключение общей переменной $x_1 = x_2$ записывается в виде: $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$, где g_1, g_2 снова предполагаются рациональными. Поэтому $P_3(y_1, y_2) = 0$ представляется как

$$P_3 : \begin{cases} y_1 = f_1 \circ \sigma_1 \circ g_1, \\ y_2 = f_2 \circ \sigma_2 \circ g_2. \end{cases}$$

Это исключение можно понимать как результат замены переменной τ на $g_1(\tau)$ для P_1 и τ на $g_2(\tau)$ для P_2 . Как мы увидим в дальнейшем, в нашем примере такое представление для P_3 будет иметь место, хотя, вообще говоря, в случае приводимости уравнения

$P_3(y_1, y_2) = 0$ это не так. Симметрия P_3 означает, что существует инволюция σ_3 такая, что $f_1 \circ \sigma_1 \circ g_1 = f_2 \circ \sigma_2 \circ g_2 \circ \sigma_3$. Таким образом, мы сможем указать решение исходной задачи, если предъявим решение системы из двух функциональных уравнений, куда входят только рациональные функции

$$f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2, \quad (1)$$

$$f_1 \circ \sigma_1 \circ g_1 = f_2 \circ \sigma_2 \circ g_2 \circ \sigma_3. \quad (2)$$

Для получения равенства (1) рассмотрим конечную группу H , состоящую из 60 дробно-линейных подстановок, являющуюся группой вращений икосаэдра

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau' = \varepsilon^\mu \tau, \quad \tau' = \varepsilon^\nu \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^\mu \tau + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^\mu \tau + (\varepsilon - \varepsilon^4)}, \\ \tau' = -\frac{\varepsilon^4 \mu}{\tau}, \quad \tau' = -\varepsilon^{4\nu} \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^\mu \tau + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^\mu \tau + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \varepsilon = e^{2\pi i/5}, \\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4. \end{array} \quad (3)$$

Любое вращение икосаэдра можно отождествить с подстановкой, так как любому повороту единичной сферы соответствует дробно-линейное преобразование λ комплексной плоскости, полученной из этой сферы с помощью стереографической проекции.

Назовем функцию f принадлежащей группе H , если она инвариантна относительно H , и любая другая H -инвариантная функция выражается через нее рационально.

Группа (3) содержит шесть сопряженных 5-диэдральных подгрупп, а также пять сопряженных тетраэдральных подгрупп. Обозначим H_1 5-диэдральную группу, порожденную подстановками $\tau' = -1/\tau$, $\tau' = \varepsilon\tau$, а H_2 – тетраэдральную группу, построенную по неподвижным точкам подстановок

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau' = \frac{(\varepsilon - \varepsilon^4)\tau + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\tau - (\varepsilon^4 - \varepsilon)}, \quad \tau' = \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\tau + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{(\varepsilon - \varepsilon^4)\tau - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}.$$

Теперь нужно воспользоваться тем, что функция f , принадлежащая H , выражается рационально как через функцию g_1 , принадлежащую H_1 , так и через функцию g_2 , принадлежащую H_2 . В силу конечности H функции f, g_1, g_2 сами являются рациональными, поэтому мы сразу имеем искомое равенство (1), причем в [5] указаны явные формулы:

$$\begin{aligned} & \frac{-(\tau^{20} + 1) + 228(\tau^{15} - \tau^5) - 494\tau^{10})^3}{1728\tau^5(\tau^{10} + 11\tau^5 - 1)^5} = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\tau} \circ \frac{125\tau^5}{(\tau^{10} + 11\tau^5 - 1)} \\ & = \frac{(\tau - 3)^3(\tau^2 - 11\tau + 64)}{-1728} \circ \frac{(\tau^6 + 1 + 2(\tau^5 - \tau) - 5(\tau^4 + \tau^2))^2}{\tau(\tau^{10} + 11\tau^5 - 1)}. \end{aligned}$$

Чтобы получить (2), мы используем (1) и отмеченное свойство о соответствии между подстановками H и поворотами сферы. Рассмотрим на единичной сфере конфигурацию выбранного 5-диэдра как множество точек, соответствующее полюсам 5-диэдра, его вершинам и серединам ребер. Функция $d = (v/w)^2$, являющаяся квадратом отношения произведения линейных форм вершин 5-диэдра к произведению линейных форм середин ребер, принадлежит H_1 , а, значит, дробно-линейно выражается через g_1 . Любой поворот сферы, переводящий друг в друга вершины и середины ребер, меняет местами

числитель и знаменатель в d . $\tau' = 1/\tau$ является примером такого поворота, вследствие чего мы имеем равенство

$$d \circ \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau} \circ d.$$

Но оно влечет

$$g_1 \circ \frac{1}{\tau} = \sigma_1 \circ g_1,$$

где σ_1 отличается от $1/\tau$ сопряжением, поэтому тоже будет инволюцией. Точное значение

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{22\tau/125 - 1}.$$

Для нахождения σ_2 воспользуемся аналогичной геометрической интерпретацией. Заметим, что любой октаэдральный поворот четвертого порядка переводит его двойственные тетраэдры друг в друга. Одна из диагоналей октаэдра, который содержит выбранный нами тетраэдр, задается неподвижными точками подстановки $\tau' = -1/\tau$. Возьмем подстановку четвертого порядка $\tau' = (\tau - 1)/(\tau + 1)$, у которой те же неподвижные точки, и функцию $t = (\varphi/\psi)^3$, принадлежащую H_2 , где φ, ψ — произведение линейных форм вершин тетраэдра и двойственного тетраэдра. Снова имеем

$$t \circ \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = \frac{1}{\tau} \circ t \quad \text{и} \quad g_2 \circ \frac{\tau - 1}{\tau + 1} = \sigma_2 \circ g_2, \quad \text{где} \quad \sigma_2 = \frac{\tau}{11\tau/64 - 1}.$$

Подставляя в (1) полученные равенства, приходим к (2), причем

$$\sigma_3 = \left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right)^{-1} \circ \frac{1}{\tau} = \frac{\tau + 1}{\tau - 1}$$

— снова инволюция. Итак, окончательный вид нового решения задачи о коммутировании такой:

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\tau}, \\ y_1 = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\tau} \circ \frac{\tau}{22\tau/125 - 1}, \end{cases} \quad (4)$$

$$P_2 : \begin{cases} x_2 = \frac{(\tau - 3)^3(\tau^2 - 11\tau + 64)}{-1728}, \\ y_2 = \frac{(\tau - 3)^3(\tau^2 - 11\tau + 64)}{-1728} \circ \frac{\tau}{11\tau/64 - 1}. \end{cases} \quad (5)$$

Подытоживая все вышеизложенное, мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Соответствия (4) и (5) коммутируют между собой.*

Нужно сразу отметить, что такое коммутирование нетривиально в том смысле, что P_1 и P_2 не имеют общих итераций, т.е. $P_1^{(n_1)} \neq P_2^{(n_2)}$ ни при каких целых положительных n_1 и n_2 , потому что иначе было бы верно равенство $(\deg P_1)^{n_1} = (\deg P_2)^{n_2}$, но степени P_1 и P_2 равны 6 и 5.

Оба полученных соответствия допускают сходное представление через функцию f , принадлежащую икосаэдральной группе, и дробно-линейные функции λ_i , являющиеся вращениями единичной сферы

$$P_i : \begin{cases} x_i = f(\tau), \\ y_i = f \circ \lambda_i(\tau), \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Это представление позволяет подойти к решению поставленной задачи методами теории групп. Такой подход приводит к существенным упрощениям.

2. Групповой подход к построению коммутирующих соответствий. Пусть H – некоторая, возможно бесконечная, группа дробно-линейных подстановок с рациональным фактором, f – автоморфная функция, через которую любая H -инвариантная функция выражается рационально (такие фундаментальные функции мы называем *принадлежащими H*), λ_1, λ_2 – подстановки. Будем искать коммутирующие соответствия в виде

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = f, \\ y_1 = f \circ \lambda_1, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x_2 = f, \\ y_2 = f \circ \lambda_2. \end{cases} \quad (6)$$

Симметричность P_1, P_2 и рациональность f изначально не предполагаются. Соответствие P_i *алгебраично*, если в H найдется подгруппа конечного индекса H_i такая, что $\lambda_i H_i \lambda_i^{-1}$ есть снова принадлежащая H группа. Если H_i – наибольшая из таких подгрупп, т.е. подгруппа минимально возможного индекса, то степень соответствующего уравнения $P_i(x_i, y_i) = 0$ по каждой переменной (см. далее) равна индексу: $[H : H_i]$. Для нетривиальности P_i потребуем еще, чтобы $[H : \lambda_i H_i \lambda_i^{-1}] = [H : H_i] \neq 1$, т.е. $\lambda_i H_i \lambda_i^{-1} \neq H$ или $\lambda_i \notin N(H)$, где $N(H)$ – нормализатор. Потребуем также, чтобы $\lambda_1 h_1 \neq h_2 \lambda_2$ ни при каких $h_1, h_2 \in H$, так как иначе P_1 и P_2 фактически совпадают. Объединяя все требования вместе, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 H_1 \lambda_1^{-1} \in H, \quad \lambda_1 \notin N(H), \quad \lambda_2 H_2 \lambda_2^{-1} \in H, \quad \lambda_2 \notin N(H), \\ \lambda_1 h_1 \neq h_2 \lambda_2, \quad 1 \neq [H : \lambda_i H_i \lambda_i^{-1}] = [H : H_i] < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $f(\tau_0) = a$ при каком-нибудь τ_0 , то из-за того, что f принадлежит H , она принимает значение a в точках $H\tau_0$ и только в них. Поэтому, зная, что $x_1 = a$, $x_1 = \{f \circ H\tau_0\}$, мы можем найти все $y_1 : \{f \circ \lambda_1 H\tau_0\}$. Полагая $y_1 = x_2$ (изменение исключаемой переменной введено для удобства), находим все $x_2 : \{f \circ H\lambda_1 H\tau_0\}$, а затем и все $y_2 : \{f \circ \lambda_2 H\lambda_1 H\tau_0\}$.

Поступая так же со значением $x_2 = a$, получаем набор $y_1 : \{f \circ \lambda_1 H\lambda_2 H\tau_0\}$. Так как коммутирование P_1 и P_2 означает равенство наборов $\{y_1\}$ и $\{y_2\}$ при всех τ_0 , то нужно чтобы выполнялось $f \circ \lambda_2 H\lambda_1 H = f \circ \lambda_1 H\lambda_2 H$ или ему эквивалентное равенство

$$H\lambda_2 H\lambda_1 H = H\lambda_1 H\lambda_2 H. \quad (8)$$

Таким образом, верна

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что группы H, H_1, H_2 дробно-линейных преобразований и подстановки λ_1, λ_2 удовлетворяют условиям (7), (8). Тогда соответствия (6) коммутируют между собой.*

Теперь для решения исходной задачи остается “всего лишь” обеспечить равенство (8) при условиях (7). Этого можно добиться, например, следующим образом. Пусть H_1 и H_2 порождают все H и коммутируют, т.е. имеет место равенство $H = H_1 H_2 = H_2 H_1$, тогда (8) следует из (7), если выполнено

$$\lambda_1 \lambda_2 h_1 = h_2 \lambda_2 \lambda_1, \quad h_1, h_2 \in H. \quad (9)$$

Для выяснения коммутирования подгрупп H_1 и H_2 можно использовать известные результаты теории групп (см., например, [6]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Подгруппа $\{H_1, H_2\}$, порожденная подгруппами H_1, H_2 в группе H , тогда и только тогда совпадает с произведением $H_1 H_2$, когда подгруппы H_1 и H_2 перестановочны.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Индексы подгруппы H_1 в подгруппе $\{H_1, H_2\}$ и пересечения $H_1 \cap H_2$ в подгруппе H_2 равны тогда и только тогда, когда подгруппы H_1 и H_2 перестановочны. Индексы предполагаются конечными.*

Иными словами, в предположении конечности индексов $H_1 H_2 = H_2 H_1$, если произведение их индексов в $H = \{H_1, H_2\}$ равно индексу пересечения в H .

Рассмотрим теперь примеры описанной схемы.

ПРИМЕР 1. Пусть H, H_1, H_2 – рассмотренная выше группа (3), ее 5-диэдральная и тетраэдральная группы соответственно, f – икосаэдральная функция, $\lambda_1 = 1/\tau$ и $\lambda_2 = (\tau - 1)/(\tau + 1)$ – уже известные дробно-линейные подстановки. Тогда коммутирование H_1, H_2 устанавливается вычислением индексов: $[H : H_1] = 6$, $[H : H_2] = 5$, $[H : H_1 \cap H_2] = 30$, так как $H_1 \cap H_2$ состоит из $\tau' = \tau$ и $\tau' = -1/\tau$. λ_1 принадлежит нормализатору H_1 , λ_2 – нормализатору H_2 . Остальные требования (7) тоже выполнены. Равенство

$$\lambda_1 \circ \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \circ \lambda_2 \circ \lambda_1$$

показывает, что верно (9), и тем самым заканчивает построение первого примера.

Заметим, что при тех же $\lambda_1, \lambda_2, H_2$ вместо H_1 можно выбрать не указанную 5-диэдральную группу, а ее циклическую подгруппу пятого порядка. Тогда все утверждения остаются в силе, кроме того, что $[H : H_1] = 12$ и $[H : H_1 \cap H_2] = 60$. Это значит, что при фиксированных λ_1, λ_2 может существовать некоторый произвол в выборе H_1, H_2 , никак не сказывающийся на вычислении P_1, P_2 .

ПРИМЕР 2. Рассматривая другие группы вращений правильных многогранников, можно найти еще одно решение, во многом похожее по своему построению на пример 1. У 4-диэдральной группы H тоже имеются две подгруппы, которые порождают ее, коммутируя между собой. Группа H_1 – квадратичная с “вершинами” в точках $0, \infty, 1, -1, i, -i$ на единичной сфере, а H_2 – циклическая второго порядка, ось которой проходит через точки $\varepsilon_8, -\varepsilon_8$, где $\varepsilon_8 = e^{2\pi i/8}$. Подсчет индексов дает $[H : H_1] = 2$, $[H : H_2] = 4$, $[H : H_1 \cap H_2] = 8$. Выбирая

$$\lambda_1 = \frac{\tau + 1}{\tau - 1}, \quad \lambda_2 = \frac{-\tau + (1 - i)}{\tau(1 + i) + 1},$$

замечаем, что и $\lambda_1 \in N(H_1)$, $\lambda_2 \in N(H_2)$ и $\lambda_1 \notin N(H)$, $\lambda_2 \notin N(H)$, а также $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \lambda_1$.

Явный вид функций, принадлежащих этим группам, следующий:

$$f = \frac{(\tau^4 - 1)^2}{4\tau^4}, \quad g_1 = \frac{(\tau^2 - 1)^2}{4\tau^2}, \quad g_2 = \frac{(\tau - \varepsilon_8)^2}{(\tau + \varepsilon_8)^2}.$$

Учитывая, что

$$f = 4\tau(\tau + 1) \circ g_1 = -\frac{(\tau^2 + 6\tau + 1)^2}{(\tau - 1)^4} \circ g_2, \quad g_1 \circ \lambda_1 = \sigma_1 \circ g_1, \quad g_2 \circ \lambda_2 = \sigma_2 \circ g_2,$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\tau}, \quad \sigma_2 = \frac{k}{\tau}, \quad k = \left(\frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i} \right)^2,$$

получаем ответ:

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = 4\tau(\tau + 1), \\ y_1 = 4\tau(\tau + 1) \circ \frac{1}{\tau}, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x_2 = -\frac{(\tau^2 + 6\tau + 1)^2}{(\tau - 1)^4}, \\ y_2 = -\frac{(\tau^2 + 6\tau + 1)^2}{(\tau - 1)^4} \circ \frac{k}{\tau}. \end{cases}$$

Нетривиальность этого решения в смысле несовпадения итераций соответствий тоже имеет место. Если $P_1^{(n_1)} = P_2^{(n_2)}$, то n_1 четно, поэтому из-за симметрии P_1 $P_1^{(n_1)}$ содержит множитель $(x_1 - y_1)^m$, где $m = 2$ по модулю 4. Но $P_2^{(n_2)}$ не может иметь множителя $(x_2 - y_2)^m$ с таким m .

ПРИМЕР 3. Пусть H – модулярная группа, состоящая из преобразований вида

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Определим подгруппы $H_0(M)$, $H^0(M)$ как состоящие из подстановок H , имеющих вид

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

по модулю M . Индексы $H_0(M)$ и $H^0(M)$ равны $M \cdot \prod_p (1 + 1/p)$, где произведение берется по простым делителям M . Положим $H_1 = H_0(m)$, $H_2 = H_0(n)$, где m и n взаимно просты. $\lambda_1 = m\tau$, $\lambda_2 = n\tau$, $f = J(\tau)$ – автоморфная функция для H , так называемый абсолютный инвариант. H порождается преобразованиями

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

h_1 всегда принадлежит $H_0(M)$, а h_2 можно получить в виде композиции

$$\begin{pmatrix} m & -v \\ n & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & -u \\ m & n \end{pmatrix}$$

преобразований, принадлежащих H_1 и H_2 , где u, v – целые числа, удовлетворяющие равенству $um = vn = 1$. Пересечением $H_1 \cap H_2$ является $H_0(mn)$, причем ее индекс в силу взаимной простоты m и n равен произведению индексов H_1 и H_2 ; $\lambda_1 H_1 \lambda_1^{-1} = H^0(m)$, $\lambda_2 H_2 \lambda_2^{-1} = H^0(n)$ и, наконец, $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \lambda_1$. Снова все требования выполнены, поэтому модулярные соответствия $P_1 = \Phi_m$, $P_2 = \Phi_n$ коммутируют.

Приведем самый простой пример из этого семейства решений, когда $m = 2$, $n = 3$:

$$P_1 = \Phi_2 : \begin{cases} x_1 = \frac{(1+4\tau)^3}{27\tau}, \\ y_1 = \frac{(1+4\tau)^3}{27\tau} \circ \frac{1}{\tau}, \end{cases} \quad P_2 = \Phi_3 : \begin{cases} x_2 = \frac{(\tau+1)(9\tau+1)^3}{64\tau}, \\ y_2 = \frac{(\tau+1)(9\tau+1)^3}{64\tau} \circ \frac{1}{\tau}. \end{cases}$$

Вывод явных формул для параметризаций других Φ_m при малых m имеется в [7].

ПРИМЕР 4. Вместо модулярной группы можно рассматривать некоторые ее подгруппы. В частности, подгруппа $\Gamma(2)$, состоящая из подстановок, сравнимых с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ по модулю 2, имеет рациональный фактор. Аналогом $J(\tau)$ здесь является $k^2(\tau)$, эта функция известна как квадрат модуля для эллиптических функций Якоби. Если взять, например, $\lambda_1 = 2\tau$, $\lambda_2 = 3\tau$, то легко найти подгруппы индексов 2 и 4 в $H = \Gamma(2)$ со всеми нужными свойствами:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

по модулю 2, причем c_1 должно делиться на 4, а c_2 – на 6. Полученные таким образом соответствия задаются рациональными кривыми, их параметризации имеют вид

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = 1 - \tau \circ \tau^2, \\ y_1 = \tau^2 \circ \frac{-\tau+1}{\tau+1}, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x_2 = \frac{\tau^3(\tau-2)}{(-2\tau+1)}, \\ y_2 = \frac{\tau^3(\tau-2)}{(-2\tau+1)} \circ \frac{\tau-2}{2\tau-1}. \end{cases}$$

Отметим, что соответствие P_1 в этом случае не является симметричным, но обладает свойством $P_1(x, y) = P_1(\varphi(y), \varphi(x))$, где $\varphi(\tau) = 1 - \tau$. Кроме этого, P_1 и соответствия, получающиеся подобным образом из других подгрупп модулярной группы, имеют многие другие замечательные свойства, в том числе, и динамические (см. [8]).

Для примеров 1–4 использовались утверждения 1 и 2. В этих случаях результирующая кривая неприводима, что обеспечивается условием $H = \{H_1, H_2\}$ вместе с (7).

ПРИМЕР 5. Несколько другая ситуация складывается в случае Эйлера–Шаля. Возьмем в качестве $H_1 = H_2$ группу сдвигов по комплексной решетке с примитивными периодами $(2\omega_1, 2\omega_2)$. Эта группа имеет индекс 2 в расширенной группе

$$H = \{\tau' = \tau + 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2, \tau' = -\tau\}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z};$$

$\lambda_1 = \tau + b_1$, $\lambda_2 = \tau + b_2$ есть сдвиги, не принадлежащие $N(H)$ и не сравнимые по модулю решетки. Здесь очевидно выполнение (7), но из-за того, что $H \neq \{H_1, H_2\}$, следует применить другие соображения для проверки (8). Если $h = \tau + 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2$ при некоторых k_1, k_2 , то (8) следует из $\lambda_2 h \lambda_1 = \lambda_1 h \lambda_2$, а если $h = -\tau + 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2$, то достаточно проверить, что $-\tau \circ \lambda_2 \circ -\tau \circ \lambda_1 = \lambda_1 \circ -\tau \circ \lambda_2 \circ -\tau$. Автоморфной функцией

H является двояко-периодическая и четная $\wp$ -функция Вейерштрасса. Используя для нее теорему сложения, можно вычислить P_1 и P_2 явно. Это будут 2–2 соответствия, задаваемые формулой

$$\left(xy + p_i(x+y) + \frac{g_2}{4}\right)^2 - (x+y+p_i)(4p_i xy - g_3) = 0,$$

$$x = \wp(\tau), \quad y = \wp(\tau \pm b_i), \quad p_i = \wp(b_i),$$

g_2, g_3 – модулярные формы.

Так как $H \neq \{H_1, H_2\}$, то $P_3 = P_2 \circ P_1$ будет приводимой кривой, но каждая из двух компонент будет иметь вид (10).

Остается заметить, что данная конструкция переносится на эллиптические кривые, имеющие большие группы симметрии, и кристаллографические группы первого рода и может быть использована для параметрического задания m – m соответствий (см. [1]).

ПРИМЕР 6. Этот пример похож на предыдущий тем, что $H_1 = H_2$ и $H_1, H_2 \neq H$, только теперь H – циклическая группа порядка n , а H_1 и H_2 – ее единичные подгруппы. Так как порядок H конечный, то ее единичная подгруппа имеет конечный индекс. Сдвиги $\lambda_1 = \tau + b_1$, $\lambda_2 = \tau + b_2$, как и вообще любые дробно-линейные функции, принадлежат соответственно $N(H_1)$ и $N(H_2)$. Сходство завершается равенством

$$\frac{\tau}{\varepsilon} \circ \tau + b_1 \circ \varepsilon \tau \circ \tau + b_2 = \tau + b_2 \circ \frac{\tau}{\varepsilon} \circ \tau + b_1 \circ \varepsilon \tau,$$

где ε – корень n -й степени из единицы, которое обеспечивает выполнение (8). Итак,

$$P_1 : \begin{cases} x_1 = \tau^n, \\ y_1 = \tau^n \circ \tau + b_1, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x_2 = \tau^n, \\ y_2 = \tau^n \circ \tau + b_2. \end{cases}$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
04.05.95
Исправленный вариант
12.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Веселов А. П. Интегрируемые отображения // УМН. 1991. № 5. С. 3–45.
- [2] Julia G. Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles // Ann. Acad. École Norm. 1922. V. 39. № 3. P. 131–215.
- [3] Fatou P. Sur l'itération analytique et les substitutions permutables // J. Math. Pure Appl. 1924. V. 23. P. 1–49.
- [4] Ritt J. F. Permutable rational functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1923. V. 25. P. 399–448.
- [5] Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989.
- [6] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [7] Fricke F. Die elliptischen Functionen und ihre Anwendungen. V. 2. Leipzig, 1922.
- [8] Bullett S. Critically finite correspondences and subgroups of the modular group // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 65. № 3. P. 423–448.