Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Кадец, К. Э. Каибханов, О расширении линейного оператора до инволютивного, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 671–676

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:26:40

УДК 517

О РАСШИРЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ДО ИНВОЛЮТИВНОГО

М. И. Кадец, К. Э. Каибханов

Линейный ограниченный оператор $A: X \rightarrow X$ в линейно-топологическом пространстве X назовем p -инволютивным, $p \geq 2$, если $A^p = I$, где I – тождественный оператор. В статье дано описание линейных p -инволютивных операторов в линейно-топологическом пространстве над полем $\mathbb{C}$; доказана возможность расширения линейного оператора до инволютивного.

Библиография: 1 название.

Основной целью настоящей работы является доказательство возможности расширения линейного оператора до инволютивного.

Линейный ограниченный оператор $A: X \rightarrow X$ в линейно-топологическом пространстве X назовем p -инволютивным, $p \geq 2$, если $A^p = I$, где I – тождественный оператор; при $p = 2$ будем говорить просто инволюция. Договоримся все линейные операторы считать ограниченными. Простейшими примерами линейных p -инволютивных операторов в линейно-топологическом пространстве X над полем $\mathbb{C}$ являются операторы вида $A = e^{2\pi k i/p} I$, $0 \leq k \leq p-1$. Следующее утверждение показывает, что, по существу, этим набором и исчерпывается множество таких операторов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A: X \rightarrow X$ – линейный p -инволютивный оператор в линейно-топологическом пространстве X над полем $\mathbb{C}$. Положим $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$. Тогда существуют подпространства $X_1, X_2, \dots, X_p$ пространства X такие, что

- 1) $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_p$;
- 2) $A|_{X_k} = \varepsilon^k I|_{X_k}$, $0 \leq k \leq p-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторы

$$Q_k = \frac{1}{p} \left(\sum_{j=0}^{p-1} (\varepsilon^{p-k} A)^j \right), \quad 1 \leq k \leq p;$$

при этом считаем $A^0 = I$. Непосредственно проверяется, что Q_k – проекторы (т.е. $Q_k^2 = Q_k$). Положим $X_k = Q_k(X)$. Нетрудно проверить, что X_k обладают требуемыми свойствами.

Отметим, что при $p = 2$ эта теорема справедлива и для пространств над полем $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A: X \rightarrow X$ – линейный оператор в линейно-топологическом пространстве X (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $p \geq 2$. Тогда существуют линейно-топологическое пространство Z , содержащее X дополняемым образом с оператором проектирования $P: Z \rightarrow X$, и линейный p -инволютивный оператор $B: Z \rightarrow Z$ такие, что $PB|_X = A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_2, X_3, \dots, X_p$ – экземпляры пространства X , $X_1 = X$, и $U_k: X \rightarrow X_k$ – канонические изометрии, $U_1 = I|_X$. Образует прямую сумму $Z = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_p$. Пусть $Q_k: Z \rightarrow X_k$ – канонические проекторы. Определим операторы

$$V_1 = U_2 U_1^{-1} Q_1, \quad V_2 = U_3 U_2^{-1} Q_2, \quad \dots, \quad V_{p-1} = U_p U_{p-1}^{-1} Q_{p-1}, \quad V_p = U_1 U_p^{-1} Q_p, \\ V = V_1 + V_2 + \dots + V_p.$$

Определим, далее, оператор $S: Z \rightarrow X$:

$$S = U_2^{-1} Q_2 + U_3^{-1} Q_3 + \dots + U_p^{-1} Q_p.$$

Образует изоморфизм $T = I + AS$. Непосредственно проверяется, что $T^{-1} = I - AS$. Наконец, определим оператор $B: Z \rightarrow Z$, обладающий требуемыми свойствами, положив $B = TVT^{-1}$ (при этом $P = Q_1$).

Обратимся к случаю гильбертова пространства. Естественным образом, возникает вопрос о наилучшем в смысле нормы выборе оператора B в теореме 2. Проведенное выше доказательство при $p = 2$ дает оценку $\|B\| \leq (1 + \|A\|)^2$. Следующее утверждение показывает, что эта оценка может быть улучшена.

ТЕОРЕМА 3. Для любого линейного оператора $A: H \rightarrow H$ в гильбертовом пространстве H (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) существуют гильбертово пространство $E \supset H$ и линейная инволюция $B: E \rightarrow E$ такие, что

- 1) $PB|_H = A$, где $P: E \rightarrow H$ – оператор ортогонального проектирования;
- 2) имеет место оценка

$$\|B\| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{17 + 4\sqrt{2}}{2}}, & \text{если } \|A\| \leq \sqrt{2}; \\ \sqrt{4\|A\|^2 + \frac{1}{\|A\|^2} + 2\sqrt{2}}, & \text{если } \|A\| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Мы докажем эту теорему для случая бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства над полем $\mathbb{R}$, но доказательство переносится и на другие случаи. Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Примем обозначения: $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение элементов x и y ; $[x_j]_{j=1}^\infty$ – замыкание линейной оболочки, натянутой на $\{x_j\}_{j=1}^\infty$.

Пусть $A: H \rightarrow H$ – линейный оператор в гильбертовом пространстве H , $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ – ортонормированный базис в H ; обозначим $g_j = Ae_j$. Пусть F – гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{f_j\}_{j=1}^\infty$. Образует гильбертово пространство $Z = (H \oplus F)_2$ с естественным скалярным произведением ($\langle e_j, f_k \rangle = 0$); и пусть $Q: Z \rightarrow H$ – естественный проектор. Если $h \in Z$, то мы иногда будем писать $h = (e, f)$, имея в виду, что $e \in H$, $f \in F$. Положим $h_j = (g_j, tf_j) \in (H \oplus F)_2$, где $t > 0$ (подбором нужного t займемся ниже). Обозначим $[h_j]_{j=1}^\infty = Y$.

ЛЕММА 1. $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ – базис в Y , эквивалентный базису $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной системы чисел $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} t^2 \left(\sum_{j=1}^\infty a_j^2 \right) &= \sum_{j=1}^\infty t^2 a_j^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty a_j g_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^\infty t^2 a_j^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^\infty a_j h_j \right\|^2 = \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty a_j A e_j, \sum_{j=1}^\infty a_j t f_j \right) \right\|^2 \\ &= \left\| A \left(\sum_{j=1}^\infty a_j e_j \right) \right\|^2 + t^2 \sum_{j=1}^\infty a_j^2 \\ &\leq \|A\|^2 \sum_{j=1}^\infty a_j^2 + t^2 \sum_{j=1}^\infty a_j^2 = (\|A\|^2 + t^2) \sum_{j=1}^\infty a_j^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Для любых $e \in H$ и $h \in Y$ имеет место неравенство

$$|\langle e, h \rangle| \leq \frac{\|A\| \cdot \|e\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая $h = (g, f) \in (H \oplus F)_2$, $g = \sum_{j=1}^\infty a_j g_j$, будем иметь

$$\begin{aligned} |\langle e, h \rangle| &= |\langle e, g \rangle| \leq \|e\| \cdot \|g\| = \frac{\|e\| \cdot \|g\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \\ &= \frac{\|e\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^\infty a_j g_j \right\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\left\| \sum_{j=1}^\infty a_j g_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^\infty t^2 a_j^2}} \leq \frac{\|A\| \cdot \|e\| \cdot \|h\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Для любых $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ и любого $h \in Y$

$$\left\| \sum_{j=1}^\infty a_j e_j + h \right\| \geq \frac{\left\| \sum_{j=1}^\infty a_j e_j \right\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости обозначим

$$\sum_{j=1}^\infty a_j e_j = e.$$

Тогда, обращаясь к (1), получим

$$\begin{aligned} \|e + h\|^2 &= \|e\|^2 + 2\langle e, h \rangle + \|h\|^2 \\ &= \|e\|^2 \left[\left(\frac{\|h\|}{\|e\|} - \frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}} \right)^2 + \frac{t^2}{\|A\|^2 + t^2} \right] \geq \frac{\|e\|^2 t^2}{\|A\|^2 + t^2}, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. Множество $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис в Z после естественной перенумерации: $e_1, h_1, e_2, h_2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Z$ произвольно и

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k.$$

Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k \right) + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k.$$

Так как

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k \in H,$$

то существуют числа $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k g_k = \sum_{j=1}^{\infty} d_j e_j.$$

Следовательно,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j - d_j) e_j + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k,$$

т.е. x разлагается по элементам множества $\{e_j\}_{j=1}^{\infty} \cup \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем коэффициенты в разложении определяются однозначно. Осталось доказать, что существует такое $C > 0$, что для любых $n, m, l, s \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство [1, предложение 1.а.3]:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k \right\| \geq C \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j + \sum_{k=1}^l b_k h_k \right\|.$$

Ясно, что достаточно доказать это неравенство при

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j + \sum_{k=1}^l b_k h_k \right\| = 1.$$

Для краткости обозначим

$$e = \sum_{j=1}^n a_j e_j, \quad h = \sum_{k=1}^l b_k h_k.$$

Пусть $\|e + h\| = 1$. Тогда имеет место, по крайней мере, один из следующих случаев:

1) $\|e\| \geq 1/2$; 2) $\|h\| \geq 1/2$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $\|e\| \geq 1/2$. Пользуясь (2), будем иметь

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k \right\| \geq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j \right\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}} \geq \frac{\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\| t}{\sqrt{\|A\|^2 + t^2}} \geq \frac{t}{2\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}.$$

2) $\|h\| \geq 1/2$. Имеем

$$\|h\| = \left\| \sum_{k=1}^l b_k h_k \right\| = \left\| \left(\sum_{k=1}^l b_k g_k, t \sum_{k=1}^l b_k f_k \right) \right\| = \sqrt{\left\| \sum_{k=1}^l b_k g_k \right\|^2 + t^2 \sum_{k=1}^l b_k^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Так как $\|g_k\| \leq \|A\|$, то отсюда следует

$$\sqrt{\|A\|^2 + t^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^l b_k^2} \geq \frac{1}{2}$$

и

$$\sqrt{\sum_{k=1}^l b_k^2} \geq \frac{1}{2\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}.$$

Поэтому

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+m} a_j e_j + \sum_{k=1}^{l+s} b_k h_k \right\| \geq t \sqrt{\sum_{k=1}^{l+s} b_k^2} \geq t \sqrt{\sum_{k=1}^l b_k^2} \geq \frac{t}{2\sqrt{\|A\|^2 + t^2}}.$$

Таким образом, в каждом из этих случаев можно взять $C = t / (2\sqrt{\|A\|^2 + t^2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1) Положим $E = Z$. Согласно лемме 4 $E = Z = H \oplus Y$. Определим оператор $B : E \rightarrow E$ следующим образом:

$$B \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j.$$

Так как базисы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентны, то оператор B определен корректно. Положим $P = Q$. Для произвольного

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in H$$

имеем

$$\begin{aligned} PBx &= PB \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right) = P \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j \right) = P \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_j t f_j \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j A e_j = A \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right) = Ax, \end{aligned}$$

т.е. $PB|_H = A$, и часть 1) теоремы 3 доказана.

2) Оценим $\|B\|$. Пусть

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k \right\| = 1.$$

Тогда согласно (2)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \right\|^2 \leq \frac{\|A\|^2 + t^2}{t^2}. \quad (3)$$

Имеем

$$\sqrt{t^2 \sum_{j=1}^{\infty} b_j^2} \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k \right\| = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \frac{1}{t^2}. \quad (4)$$

Пользуясь (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} \left\| B \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k h_k \right) \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k + \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j \right\|^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \leq \left(\left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j g_j \right\| \right)^2 + t^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \\ &\leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} + \|A\| \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2} \right)^2 + \|A\|^2 + t^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + 2\|A\| \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2} + \|A\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 + \|A\|^2 + t^2 \\ &\leq \frac{1}{t^2} + \frac{2\|A\| \sqrt{\|A\|^2 + t^2}}{t^2} + \frac{\|A\|^2 (\|A\|^2 + t^2)}{t^2} + \|A\|^2 + t^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|B\|^2$ не больше последнего выражения этой цепочки неравенств. Рассмотрим два случая: а) $\|A\| \leq \sqrt{2}$ и б) $\|A\| > \sqrt{2}$.

а) $\|A\| \leq \sqrt{2}$. Положим $t = \sqrt{2}$. Тогда получим

$$\|B\| \leq \sqrt{\frac{1}{2} + 2\sqrt{2} + 8} = \sqrt{\frac{17 + 4\sqrt{2}}{2}}.$$

б) $\|A\| > \sqrt{2}$. В этом случае положим $t = 1$. Тогда, как легко проверить,

$$\|B\| \leq \sqrt{4\|A\|^2 + \frac{1}{\|A\|^2} + 2\sqrt{2}}.$$

Теорема 3 доказана.

Харьковская государственная академия городского хозяйства
Таганрогский радиотехнический университет

Поступило
13.07.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces. Berlin: Springer, 1977.