Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. С. Хачлаев, О решении одного нелинейного уравнения
второго порядка во внешности компакта, *Матем. заметки*,
2004, том 76, выпуск 6, 918–921

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:25:18

УДК 517.95

О РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВО ВНЕШНОСТИ КОМПАКТА

Т. С. Хачлаев

В работе изучается поведение решений полулинейного эллиптического уравнения в области, являющейся внешностью компакта, при $|x| \rightarrow \infty$. Такого рода уравнения изучались многими авторами (например, Кондратьев, Ландис, Олейник, Верон и др.). В настоящей работе рассмотрен случай, когда в уравнение входят младшие члены. Коэффициенты при младших членах являются произвольными ограниченными измеримыми функциями. Показано, что решения уравнения стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Библиография: 2 названия.

Целью настоящей работы является изучение поведения решений полулинейного эллиптического уравнения во внешности компакта.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) |u|^{\sigma-1} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где $\sigma = \text{const} > 1$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$, K – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ – ограниченные измеримые функции, $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$. Функции $a_{ij}(x)$ удовлетворяют *условию равномерной эллиптичности*: существуют такие постоянные $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, что

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2 \quad \text{для любых } x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

В качестве решения уравнения (1) понимается обобщенное решение. Приведем его определение. Функция $u(x) \in W_{2\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\infty\text{loc}}(\Omega)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1), если

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Phi dx - \int_{\Omega} a(x) |u|^{\sigma-1} u \Phi dx = 0 \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5007, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1464.2003.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00069.

для любой $\Phi \in W_2^1(\Omega)$, имеющей компактный носитель в Ω .

Основным результатом данной работы является доказательство стремления к нулю всех решений уравнения (1). Для этого потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим уравнение (1) в шаре $B_1^0 = \{x : |x| < 1\}$. Функция $u(x) \in W_2^1(B_1^0) \cap L_\infty(B_1^0)$ называется *решением* этого уравнения, если для нее выполнено равенство (2) с произвольной функцией $\Phi(x) \in \dot{W}_2^1(B_1^0)$, где интегрирование ведется по шару B_1^0 .

ЛЕММА 1. Пусть $u(x)$ – произвольное решение уравнения (1) в шаре B_1^0 . Тогда $|u(0)| < C$, постоянная C зависит от σ, n , констант эллиптичности, максимума модуля коэффициентов $a_{ij}(x), a_i(x)$ и от a_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭТОЙ ЛЕММЫ в случае $a_i(x) \equiv 0$ имеется в работе [1].

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ – обобщенное решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x)u = 0 \quad (3)$$

в шаре $|x| < 1$, $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условию эллиптичности, $A \geq a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$, $|a_i(x)| \leq A$ и

$$u(x)|_{|x|=1} = 1.$$

Тогда

$$u(0) \leq \delta,$$

где $\delta = \delta(\lambda_1, \lambda_2, a_0, A, n)$ и $\delta < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $v = 1 - u$ будет удовлетворять уравнению

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} = a(x)(v - 1) \quad (4)$$

и краевому условию

$$v(x)|_{|x|=1} = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} = f(x), \quad (5)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} -1, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

и его решение, удовлетворяющее условию

$$w(x)|_{|x|=1} = 0. \quad (6)$$

Постоянную ε определим ниже. По принципу максимума имеем

$$v \geq a_0 w \quad \text{при} \quad |x| \leq 1.$$

Покажем, что

$$w \geq \delta_1 > 0 \quad \text{при} \quad |x| \leq \varepsilon,$$

где δ_1 зависит только от $\lambda_1, \lambda_2, A, n$.

Решение задачи (5), (6) имеет вид

$$w(x) = \int_{|y| \leq 1} G(x, y) f(y) dy = - \int_{|y| \leq \varepsilon} G(x, y) dy,$$

где $G(x, y)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения (5) в единичном шаре.

Известно, что

$$\begin{aligned} G(x, y) &= 0 \quad \text{при} \quad |x| = 1, \\ G(x, y) &< 0 \quad \text{при} \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \\ -G(x, y) &= \Gamma(x, y) - g(x, y), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Gamma(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения (5), $g(x, y)$ – решение уравнения (5) по x .

Для функции $\Gamma(x, y)$ выполнены следующие оценки [2]:

$$c_2 |x - y|^{2-n} \leq \Gamma(x, y) \leq c_1 |x - y|^{2-n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Здесь $n > 2$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$, c_1, c_2 зависят только от $\lambda_1, \lambda_2, A, n$.

Если $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, то из (8) следует, что

$$\Gamma(x, y) \geq \frac{c}{2\varepsilon^{n-2}}. \tag{9}$$

Заметим, что согласно (7)

$$g(x, y) = \Gamma(x, y) \quad \text{при} \quad |x| = 1.$$

Следовательно, по принципу максимума имеем

$$\max_{|x| \leq 1} g(x, y) \leq \max_{|x|=1} \Gamma(x, y) \leq \max_{|x|=1} \frac{c_1}{|x - y|^{n-2}}.$$

Если $|y| < 1/2$, то отсюда получим

$$\max_{|x| \leq 1} g(x, y) < 2^{n-2} c_1.$$

В частности, при $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$, $\varepsilon < 1/2$ имеем

$$-G(x, y) > \frac{c}{2\varepsilon^{n-2}} - 2^{n-2} c_1 > 2c,$$

если ε достаточно мало, т.е.

$$G(x, y) < -2c = -c_3 \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon, \quad |y| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $|x| < \varepsilon$

$$w(x) = \int_{|y| < 1} G(x, y) f(y) dy = \int_{|y| \leq \varepsilon} -G(x, y) dy > c_3 \int_{|y| \leq \varepsilon} dy = \delta_1 > 0.$$

В частности, $w(0) > \delta_1$. Поэтому $v(0) \geq a_0 w(0) \geq a_0 \delta_1 = \delta_2$. Отсюда $v(0) = 1 - u(0) \geq \delta_2$. Таким образом, получаем

$$u(0) \leq 1 - \delta_2 \equiv \delta, \quad \delta < 1,$$

что и требовалось доказать. Лемма 2 доказана при $n > 2$.

Если $n = 2$, то следует продолжить коэффициенты уравнения и его решение в трехмерное пространство, считая их не зависящими от x_3 , и применить полученное утверждение при $n > 2$.

ТЕОРЕМА. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$, K – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x), a_i(x), a(x)$ – ограниченные измеримые функции, $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$. Тогда $u(x)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $u(x)$ не стремится к нулю. Пусть

$$\overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} u(x) = \gamma.$$

Можно считать $\gamma > 0$ (иначе рассмотрим $-u(x)$ вместо $u(x)$). Из леммы 1 следует, что $u(x)$ – ограниченная функция и, значит, $\gamma < +\infty$.

Пусть последовательность $\{x^m\}$ такая, что $|x^m| \rightarrow \infty$, $u(x^m) \rightarrow \gamma$. В силу гёльдеровости решения $u(x)$ существует последовательность шаров одинакового радиуса с центрами в точках x^m такая, что

$$\gamma - \varepsilon < u(x) < \gamma + \varepsilon \quad (10)$$

в этих шарах. Функция $u(x)$ является решением линейного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + q(x)u = 0,$$

где $q(x) = a(x)|u|^{\sigma-1}$. В силу (10) функция $q(x)$ ограничена и $q(x) > a_0(\gamma - \varepsilon)^{\sigma-1} = b_0$. По лемме 2 $u(x^m) < \delta(\gamma + \varepsilon)$, $\delta < 1$, или, переходя к пределу по m , $\gamma < \delta(\gamma + \varepsilon)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву, под руководством которого были получены эти результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 3. С. 346–360.
- [2] Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1965. V. 15. P. 189–258.