Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Козко, Аналогии неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 687–699

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 08:29:40

УДК 517.518.86

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ ДЖЕКСОНА–НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ

А. И. Козко

Исследуется величина

$$\sup_{\substack{t_n \in T_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}},$$

где $\|\cdot\|_{p_1, p_2}$ – несимметричная норма. Вычисляется ее порядок. Для оценок снизу приводятся новые полиномы, свойства которых детально изучаются. Данная оценка в случае $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ представляет собой хорошо известное неравенство Джексона–Никольского.

Библиография: 5 названий.

1. В работе устанавливается неравенство типа Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой.

Введем обозначения: $L_p[0, 2\pi]$ ($1 \leq p < \infty$) – пространство суммируемых по Лебегу на $[0, 2\pi]$ в p -й степени функций $x(\cdot)$ с нормой

$$\|x\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |x(t)|^p dt \right\}^{1/p},$$

$L_\infty[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и существенно ограниченных на $[0, 2\pi]$ функций $x(\cdot)$, в котором норма задается равенством

$$\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |x(t)|.$$

Пусть n – натуральное число, T_n – множество всех тригонометрических полиномов степени не выше n , т.е. $t_n \in T_n$ означает, что

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\},$$

где a_k и b_k – постоянные коэффициенты, вообще говоря, комплексные. Для тригонометрических полиномов степени n (см. [1, с. 133]) С. М. Никольский установил неравенство

$$\|t_n\|_q \leq 3n^{1/p-1/q} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad (1.1)$$

и применил его для получения теорем вложения. В случае $q = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон (см. [2, с. 891]). Неравенство (1.1) в смысле порядка точное, что проверяется на тригонометрическом ядре Фейера

$$F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos kx = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{2(n+1) \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (1.2)$$

Здесь и далее будем рассматривать только действительзначные функции. Положим $f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$, $f^-(t) = \max\{-f(t), 0\}$. Пусть $\|f\|_{p,q} = \|f^+\|_p + \|f^-\|_q$.

Будем писать $f \in L_{p,q}[0, 2\pi]$, если $f^+ \in L_p[0, 2\pi]$ и $f^- \in L_q[0, 2\pi]$. Несимметричная норма $\|\cdot\|_{p,q}: L_{p,q}[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\|f\|_{p,q} = 0 \iff f = 0$ почти всюду на $[0, 2\pi]$;
- 2) $\|f + g\|_{p,q} \leq \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}$, $f, g \in L_{p,q}[0, 2\pi]$;
- 3) $\|\alpha f\|_{p,q} = \alpha \|f\|_{p,q}$, $f \in L_{p,q}[0, 2\pi]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Пусть f и g — функции натурального параметра. Будем писать $f \asymp g$, если существуют константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что $C_1|f(n)| \leq |g(n)| \leq C_2|f(n)|$, $n \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе устанавливаются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in T_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|t_n\|_{1,\infty}}{\|t_n\|_{1,p}} \asymp n^{3/(2p+1)}. \quad (1.3)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in T_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}} \asymp n^{\psi(p_1, p_2, q_1, q_2)},$$

где

$$\psi(p_1, p_2, q_1, q_2) = \begin{cases} \max\left\{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)_+, \left(\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}\right)\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+\right\}, & p_1 \leq p_2, \\ \max\left\{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right)_+, \left(\frac{2+1/p_2}{2+1/p_1}\right)\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+\right\}, & p_1 \geq p_2, \end{cases}$$

и $\alpha_+ = \max\{0, \alpha\}$.

Теорема 2 является простым следствием теоремы 1. Оценка сверху в (1.3) будет получена с помощью функции сравнения вида $a \cos nx + b$, а оценка снизу может быть получена на полиномах вида

$$St_n(\delta, t) = \frac{F_n(t)(\cos t - \cos(\frac{2\pi}{n+1} - \delta))(\cos t - \cos(\frac{2\pi}{n+1} + \delta))}{(\cos t - \cos \frac{2\pi}{n+1})^2},$$

которые были предложены автору С.Б. Стечкиным. Будет показано, что оценка снизу достигается также на полиномах

$$T_n(\delta, t) = \frac{F_{n+1}(t)(\cos \delta - \cos t)}{(\cos t - \cos \frac{2\pi}{n+2})^2(n+2)^2}. \quad (1.4)$$

Подробнее об экстремальных полиномах будет сказано ниже.

2. В этом пункте докажем, что если $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T_n$, $p \in [1, +\infty]$, то

$$\|t_n\|_{1,\infty} \leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n\|_{1,p}.$$

Положим $M^+ = \|t_n^+\|_\infty$, $M^- = \|t_n^-\|_\infty$, $M = \|t_n\|_\infty$. Верна следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $t_n \in T_n$, $x_0 \in [0, 2\pi]$ таковы, что $M^- = -t_n(x_0) \neq 0$. Положим

$$\varphi(x) = -\frac{M^+ + M^-}{2} \cos nx + \frac{M^+ - M^-}{2},$$

тогда для любого $x \in [-\pi/(2n), \pi/(2n)]$ имеем $t_n(x + x_0) \leq \varphi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная лемма вытекает из работы Стечкина (см. [3, с. 22]).

Заметим, что справедливы следующие элементарные неравенства:

$$\begin{aligned} \arccos(1-x) &\geq \sqrt{x} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 2; \\ a^\alpha b^\beta &\leq (a+b), \quad a, b, \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T_n$, $p \in [1, +\infty]$.

а) Если $M^- = M$, то

$$M^- \leq \left(\frac{p+1}{\pi}\right)^{1/p} n^{1/p} \|t_n^-\|_p. \quad (2.2)$$

б) Если $M^- < M^+ = M$, то

$$M^- \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^{2/(2p+1)} n^{2/(2p+1)} \|t_n^-\|_p^{2p/(2p+1)} (M^+)^{1/(2p+1)}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ или $M^- = 0$ утверждения (2.2) и (2.3) очевидны. Без ограничения общности положим $x_0 = 0$. Пусть $M^- = M \geq M^+$. Тогда для любых $x \in [-\pi/(2n), \pi/(2n)]$ имеем $\varphi(x) \leq 0$, и согласно лемме 1

$$t_n(x) \leq \varphi(x) \leq M^- \left(\frac{2n}{\pi} |x| - 1\right) \leq 0, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Следовательно,

$$\|t_n^-\|_p^p \geq 2 \int_0^{\pi/(2n)} \left(M^- \left(-\frac{2n}{\pi} x + 1\right)\right)^p dx = \frac{2}{p+1} \cdot \frac{\pi}{2n} (M^-)^p = \frac{\pi}{(p+1)n} (M^-)^p,$$

откуда вытекает оценка (2.2).

Пусть $M^- < M^+ = M$. Тогда $\varphi(x)$ имеет нули и $\varphi(0) \neq 0$. Пусть y_1 – наименьший положительный нуль функции $\varphi(x)$. Имеем

$$y_1 = \frac{\arccos(1 - 2M^-/(M^+ + M^-))}{n}, \quad y_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right].$$

Лемма 1 показывает, что

$$t_n(x) \leq \varphi(x) \leq M^- \left(\frac{|x|}{y_1} - 1 \right) \leq 0, \quad |x| \leq y_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|t_n^-\|_p^p &\geq 2 \int_0^{y_1} \left(-\frac{M^-}{y_1} x + M^- \right)^p dx = \frac{2}{p+1} y_1 (M^-)^p \\ &= \frac{2}{p+1} \cdot \frac{(M^-)^p}{n} \arccos \left(1 - \frac{2M^-}{M^+ + M^-} \right) \geq \frac{2}{p+1} \cdot \frac{(M^-)^p}{n} \sqrt{\frac{2M^-}{M^+ + M^-}} \\ &\geq \frac{2}{p+1} \cdot \frac{1}{n} (M^-)^p \sqrt{\frac{M^-}{M^+}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.3), и лемма доказана.

Заметим, что для любого $p \in [1, +\infty]$ имеем

$$\left(\frac{p+1}{2} \right)^{2/(2p+1)} \leq p^{2/(2p+1)} \leq p^{1/p} \leq e^{1/e}, \quad \left(\frac{p+1}{\pi} \right)^{1/p} \leq p^{1/p} \leq e^{1/e},$$

тем самым, показано, что константы в (2.2), (2.3) ограничены.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T_n$, тогда

$$\|t_n\|_{1,+\infty} \leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n\|_{1,p}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что достаточно доказать неравенство

$$M^- \leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n\|_{1,p} \quad \forall p \in [1, +\infty]. \quad (2.5)$$

Если $M^- = M$, то оценка (2.5) вытекает немедленно из (2.2)

$$M^- \leq e^{1/e} n^{1/p} \|t_n^-\|_p \leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n\|_{1,p}, \quad p \in [1, +\infty].$$

В случае, если $M^- < M^+ = M$, имеем из (2.3) ($M^+ \leq n \|t_n^+\|_1$ по лемме 2, случай а))

$$\begin{aligned} M^- &\leq e^{1/e} n^{2/(2p+1)} \|t_n^-\|_p^{2p/(2p+1)} (M^+)^{1/(2p+1)} \\ &\leq e^{1/e} n^{2/(2p+1)} n^{1/(2p+1)} \|t_n^-\|_p^{2p/(2p+2)} \|t_n^+\|_1^{1/(2p+1)} \\ &\leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n^-\|_p^{2p/(2p+1)} \|t_n^+\|_1^{1/(2p+1)} \leq e^{1/e} n^{3/(2p+1)} \|t_n\|_{1,p}, \end{aligned}$$

в последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (2.1), взяв в ней $a = \|t_n^-\|_p$, $b = \|t_n\|_1$. Таким образом, оценка (2.5) доказана. Утверждение доказано.

3. В этом пункте покажем, что неравенство (2.4), полученное в утверждении 1, является точным по порядку, откуда будет следовать, что верна оценка (1.3). Для этого нам потребуются ряд вспомогательных утверждений о свойствах полинома

$$T_n(\delta, t) = \frac{F_{n+1}(t)(\cos \delta - \cos t)}{(\cos t - \cos \frac{2\pi}{n+2})^2 (n+2)^2}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \delta \in \left[0, \frac{1}{2n}\right], \quad (3.1)$$

где $F_{n+1}(\cdot)$ – ядро Фейера (1.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *при всех $t \in (-\infty, +\infty)$*

$$\sin^2 \frac{n+2}{2} t \leq \left\{ (n+2) \sin \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2} \right) \right\}^2; \quad (3.2)$$

б) *при всех $t \in [\pi/(n+2), 3\pi/(n+2)]$*

$$\sin^2 \frac{n+2}{2} t \geq \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 (n+2)^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2} \right)^2; \quad (3.3)$$

с) *при всех $t \in [0, 3\pi/(n+2)]$*

$$\sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2} \right) \geq \frac{1}{n+2}; \quad (3.4)$$

д) *при всех $t \in [3\pi/(2(n+2)), 5\pi/(2(n+2))]$*

$$\sin^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2} \right) \leq \frac{25}{4} \pi^2 \left(\frac{1}{n+2} \right)^2. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место следующие, важные сами по себе, неравенства:

$$|\sin nt| \leq n |\sin t| \quad \text{при всех } t \in (-\infty, \infty), \quad (3.6)$$

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t \quad \text{при всех } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.7)$$

$$|\sin t| \leq t \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad (3.8)$$

(см. [4, с. 101]).

Случаи а), б) есть следствие (3.6), (3.7), так как

$$\sin^2 \frac{n+2}{2} t = \sin^2(n+2) \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2} \right).$$

При $n = 1$ непосредственной проверкой можно убедиться, что для $t \in [0, 3\pi/(n+2)]$ имеем

$$\sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2} \right) \geq \sin \frac{5\pi}{2(n+2)} \geq \sin \frac{\pi}{2(n+2)} \geq \frac{1}{n+2}.$$

При $n \geq 2$

$$\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}\right) \geq \sin \frac{\pi}{n+2} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n+2} = \frac{2}{n+2}.$$

Итак, при $t \in [0, 3\pi/(n+2)]$ получили утверждение с).

Так как $t \in [3\pi/(2(n+2)), 5\pi/(2(n+2))]$, то непосредственно можно убедиться, что при $n = 1, 2$

$$\sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}\right) \leq \sin^2 \frac{7\pi}{4(n+2)} \leq \frac{49}{(n+2)^2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

При $n \geq 3$

$$\sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}\right) \leq \sin^2 \frac{9\pi}{4(n+2)} \leq \frac{81}{16} \pi^2 \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Итак, при $t \in [3\pi/(2(n+2)), 5\pi/(2(n+2))]$ утверждение d) доказано.

Предложение доказано.

Полином $T_n(\delta, t)$ может быть преобразован к виду

$$T_n(\delta, t) = \frac{\sin^2 \frac{n+2}{2} t \sin \frac{t-\delta}{2} \sin \frac{t+\delta}{2}}{(n+2)^3 \sin^2 \frac{t}{2} \sin^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}\right) \sin^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2}\right)}, \quad (3.9)$$

откуда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} T_n(\delta, t) &\leq 0 \quad \text{при } t \in [-\delta, \delta], \\ T_n(\delta, t) &\geq 0 \quad \text{при } t \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]. \end{aligned}$$

Это следует также из формулы (3.1).

ЛЕММА 3. Для полинома $T_n(\delta, t)$ при $\delta \in (0, \pi/(2n))$ справедливо

$$M^+ = \|T_n^+(\delta, \cdot)\|_\infty = \|T_n(\delta, \cdot)\|_\infty = M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, $M^+ \neq M$, т.е. $M = M^-$. Пусть x_0 есть точка, в которой $T_n(\delta, x_0) = -M^-$. Тогда по лемме Стечкина (см. [3, с. 22])

$$|T_n(\delta, x + x_0)| \geq |M^- \cos nx|, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right].$$

Откуда

$$\mu\{t \in [-\pi, \pi] \mid T_n(\delta, x) \leq 0\} \geq \frac{\pi}{n}. \quad (3.10)$$

Но, с другой стороны, из явного вида $T_n(\delta, t)$ (формула (3.1)) получаем

$$\mu\{t \in [-\pi, \pi] \mid T_n(\delta, t) \leq 0\} = 2\delta < \frac{\pi}{n},$$

где использовалось, что $\delta < \pi/(2n)$. Полученное соотношение противоречит (3.10).

Следовательно, допущение $M^- = M$ было неверным. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. При $\delta \in (0, 1/(2n))$ верны следующие оценки:

$$|T_n(\delta, t)| \leq C_1 F_{n+1}(t) = C_1 \frac{\sin^2 \frac{n+2}{2} t}{2(n+2) \sin^2 \frac{t}{2}} \quad \forall t \in \left[\frac{3\pi}{n+2}, \pi \right], \quad (3.11)$$

$$|T_n(\delta, t)| \leq C_2 n \quad \forall t \in \left[\delta, \frac{3\pi}{n+2} \right], \quad (3.12)$$

где $C_1, C_2 > 0$ – константы, не зависящие от n и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $n \leq 4$ лемма тривиальна, рассмотрим случай когда $n \geq 4$. В силу (3.9) для обоснования (3.11) достаточно доказать, что

$$R_n(\delta, t) = \frac{2 \sin \frac{t-\delta}{2} \sin \frac{t+\delta}{2}}{(n+2)^2 \sin^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}) \sin^2(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2})} \leq C_1$$

при $t \in [3\pi/(n+2), \pi]$. В случае $t \in [3\pi/(n+2), \pi - 2\pi/(n+2)]$, согласно (3.7), (3.8) имеем

$$\begin{aligned} R_n(\delta, t) &\leq \frac{2}{(n+2)^2} \frac{\frac{t^2 - \delta^2}{4}}{(\frac{2}{\pi})^4 (\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2})^2 (\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2})^2} \leq \frac{2}{(n+2)^2} \frac{\frac{t^2}{4}}{(\frac{2}{\pi})^4 \frac{t^2}{4} (\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2})^2} \\ &\leq \frac{2}{(n+2)^2} \frac{1}{(\frac{2}{\pi})^4 (\frac{\pi}{2(n+2)})^2} \leq \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

В случае $t \in [\pi - 2\pi/(n+2), \pi]$ при $n \geq 4$, выполняется неравенство

$$\sin\left(\frac{t}{2} \pm \frac{\pi}{n+2}\right) \geq \frac{1}{2}$$

и потому

$$R_n(\delta, t) \leq \frac{2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 8.$$

Тем самым, (3.11) доказано.

Докажем (3.12). Используя (3.7), (3.8), (3.2), (3.4), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\sin^2 \frac{n+2}{2} t \sin \frac{t-\delta}{2} \sin \frac{t+\delta}{2}}{(n+2)^3 \sin^2 \frac{t}{2} \sin^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}) \sin^2(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2})} \\ &\leq \frac{(n+2)^2 \sin^2(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2}) \cdot \frac{t^2 - \delta^2}{4}}{(n+2)^3 \sin^2 \frac{t}{2} \sin^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2}) \sin^2(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2})} \\ &\leq \frac{(\frac{t}{2})^2}{(n+2)(\frac{2}{\pi})^2 (\frac{t}{2})^2 \sin^2(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2})} \\ &\leq \frac{1}{(n+2)(\frac{2}{\pi})^2 \frac{1}{(n+2)^2}} = C(n+2) \leq C_2 n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, 1/(2n))$. Тогда

$$|T_n(\delta, t)| \geq Cn \quad \forall t \in \left[\frac{3\pi}{2(n+2)}, \frac{5\pi}{2(n+2)} \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.3)–(3.5), (3.8) имеем

$$|T_n(\delta, t)| \geq \frac{1}{(n+2)^3} \frac{(\frac{2}{\pi})^2(n+2)^2(\frac{\pi}{2(n+2)})^2|\frac{3\pi}{2(n+2)} - \delta|\frac{3\pi}{2(n+2)}}{(\frac{5\pi}{4(n+2)})^2\frac{25}{4}\pi^2\frac{1}{(n+2)^2}(\frac{\pi}{2})^2\frac{1}{(n+2)^2}} \geq Cn,$$

так как

$$\left| \frac{3\pi}{2(n+2)} - \delta \right| \geq \left| \frac{3\pi}{2(n+2)} - \frac{1}{2n} \right| = \left| \frac{(3\pi-1)n-2}{2n(n+2)} \right| \geq \left| \frac{8n-2}{2n(n+2)} \right| \geq \frac{1}{n+2}.$$

Здесь использовано то, что $\delta < 1/(2n)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $\delta \in (0, 1/(2n))$. Тогда

$$\|T_n^+(\delta, \cdot)\|_p \asymp n^{1-1/p}. \quad (3.13)$$

с константами, зависящими только от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Оценка $\|T_n^+(\delta, \cdot)\|_p \leq Cn^{1-1/p}$ для $p = \infty$ следует из леммы 4. Для $p \in [1, \infty)$ имеем (см. [5, с. 245])

$$\|F_{n+1}(\cdot)\|_p^p \asymp n^{p-1} \quad \forall p \in [1, \infty],$$

и потому

$$\|T_n^+(\delta, \cdot)\|_p^p \leq 2 \left\{ \int_{\delta}^{3\pi/(n+2)} |T_n(\delta, t)|^p dt + C_1 \|F_{n+1}(\cdot)\|_p^p \right\} \leq Cn^{p-1},$$

где опять мы воспользовались леммой 4, но уже оценкой (3.12) и тем, что

$$\left(\frac{3\pi}{2(n+2)} \right) - \delta \leq \frac{3\pi}{n+2},$$

при $0 < \delta < 1/(2n)$.

б) При $p = \infty$ нужная оценка снизу для $\|T_n^+(\delta, \cdot)\|_p$ сразу следует из леммы 5; если же $1 \leq p < \infty$, то вновь в силу леммы 5

$$\|T_n^+(\delta, \cdot)\|_p \geq \left\{ \int_{3\pi/(2(n+2))}^{5\pi/(2(n+2))} |T_n^+(\delta, t)|^p dt \right\}^{1/p} \geq C_1 n \left(\frac{\pi}{n+2} \right)^{1/p} \geq Cn^{1-1/p}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Для полинома $T_n(\delta, t)$, определенного формулой (1.4),

$$M^- = \|T_n^-(\delta, \cdot)\|_\infty \geq C\delta^2 n^3$$

при $0 < \delta < 1/(2n)$, где $C > 0$ – константа, не зависящая от n и δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$|T_n(\delta, 0)| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{n+2}{2} t \left| \sin \frac{t-\delta}{2} \right| \sin \frac{t+\delta}{2}}{(n+2)^3 \sin^2 \frac{t}{2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{n+2} \right) \sin^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{n+2} \right)} = \frac{1}{n+2} \frac{\sin^2 \frac{\delta}{2}}{\sin^4 \frac{\pi}{n+2}} \geq C\delta^2 n^3.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим полином $t_n \in T_n$ такой, что $M^- \neq 0$, $M^+ \neq 0$. Тогда существует отрезок $[x_1, x_2]$ такой, что

- 1) $\exists x^- \in [x_1, x_2] \quad -t_n(x^-) = M^-$;
- 2) $\forall x \in [x_1, x_2] \quad t_n(x) \leq 0$;
- 3) $t_n(x_1) = t_n(x_2) = 0$.

Положим $\delta^* = \min\{|x_1 - x^-|, |x_2 - x^-|\}$.

Предположим, что этот минимум равен $|x_1 - x^-|$. Разложим в ряд Тейлора в точке x^- полином $t_n \in T_n$

$$t_n(x^- + \delta^*) = t_n(x^-) + \frac{t_n^{(2)}(x^-)}{2!}(\delta^*)^2 + \dots + \frac{t_n^{(k)}(x^-)}{k!}(\delta^*)^k + \dots,$$

здесь $t_n'(x^-) = 0$, так как x^- – точка, в которой полином достигает своего минимума.

Предположим, что $\delta^* \in (0, 1/(2n))$, тогда в силу неравенства Бернштейна $|t_n^{(k)}(x^-)| \leq n^k \|t_n\|_\infty = n^k M$ получаем

$$\begin{aligned} M^- &= \left| \frac{t_n^{(2)}(x^-)}{2!}(\delta^*)^2 + \dots + \frac{t_n^{(k)}(x^-)}{k!}(\delta^*)^k + \dots \right| \\ &\leq n^2(\delta^*)^2 M + \dots + n^k(\delta^*)^k M + \dots = M \frac{n^2(\delta^*)^2}{1 - n\delta^*} \leq 2Mn^2(\delta^*)^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где последнее неравенство написано с учетом того, что сумма образует геометрическую прогрессию с $q = n\delta^* < 1/2$.

ЛЕММА 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $\delta \in (0, 1/(2n))$, тогда для полинома $T_n(\delta, t)$ имеем

$$M^- \asymp n^3 \delta^2. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in [-\delta, \delta]$ такая, что $|T_n(\delta, x_0)| = M^-$ и

$$\delta^* = \min\{|\delta - x_0|, |x_0 + \delta|\} \leq \delta,$$

используя (3.14) и (3.13), а также, учитывая результат леммы 3, что $M^+ = M$, имеем $M^- \leq 2n^2 \delta^2 M = 2n^2 \delta^2 M^+ \leq Cn^3 \delta^2$. Оценка снизу следует из леммы 7. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $\delta \in (0, 1/(2n))$. Тогда

$$\|T_n^-(\delta, \cdot)\|_p \asymp n^3 \delta^{2+1/p} \quad (3.16)$$

с константами, зависящими только от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $p = \infty$ уже все доказано (см. (3.15)), то достаточно доказать утверждение леммы для случая $1 \leq p < \infty$

$$\|T_n^-(\delta, \cdot)\|_p = \left(\int_{-\delta}^{\delta} |T_n(\delta, t)|^p dt \right)^{1/p} \leq M^-(2\delta)^{1/p} \leq C n^3 \delta^{2+1/p}.$$

Теперь оценим $\|T_n^-(\delta, \cdot)\|_p$ снизу, для этого воспользуемся оценкой (2.3) леммы 2. Так как $M^- < M^+$, имеем

$$\begin{aligned} \|T_n^-(\delta, \cdot)\|_p &\geq (C_1 M^- n^{-2/(2p+1)} (M^+)^{-1/(2p+1)})^{(2p+1)/(2p)} \\ &\geq C_2 (n^3 \delta^2 n^{-2/(2p+1)} n^{-1/(2p+1)})^{(2p+1)/(2p)} = C_2 n^3 \delta^{2+1/p}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем

$$\delta = \frac{n^{-3p/(2p+1)}}{2} = \frac{n^{-3/(2+1/p)}}{2},$$

и, учитывая (3.13), (3.16), получаем, что существует константа $C > 0$, не зависящая от n , такая, что

$$\|T_n(\delta, \cdot)\|_{1,\infty} \geq C n^{3/(2p+1)} \|T_n(\delta, \cdot)\|_{1,p} \quad \forall p \in [1, +\infty].$$

Учитывая результаты предыдущего пункта, мы, тем самым, доказали теорему 1.

4. В этом пункте оценка (1.3) будет распространена на случай произвольных p_1, p_2 , $q_1, q_2 \in [1, +\infty]$ в задаче

$$\sup_{\substack{t_n \in T_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|t_n\|_{q_1, q_2}}{\|t_n\|_{p_1, p_2}}.$$

Пусть $t_n \in T_n$, как и в лемме 2, рассмотрим два случая.

а) Пусть $M^- = M$. Тогда имеем

$$M^- \leq e^{1/e} n^{1/p_2} \|t_n^-\|_{p_2}, \quad p_2 \in [1, +\infty].$$

Пусть $p_2, q_2 \in [1, +\infty]$ такие, что $q_2 \geq p_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \|t_n^-\|_{q_2} &= \left(\int_0^{2\pi} |t_n^-(x)|^{q_2} dx \right)^{1/q_2} \leq (M^-)^{1-p_2/q_2} \|t_n^-\|_{p_2}^{p_2/q_2} \\ &\leq e^{(1-p_2/q_2)/e} n^{1/p_2-1/q_2} \|t_n^-\|_{p_2}. \end{aligned}$$

При $q_2 \leq p_2$ согласно неравенству Гёльдера

$$\|t_n^-\|_{q_2} \leq C \|t_n^-\|_{p_2}.$$

Итак, в первом случае мы получили

$$\|t_n^-\|_{q_2} \leq C n^{(1/p_2 - 1/q_2)_+} \|t_n^-\|_{p_2} \leq C n^{(1/p_2 - 1/q_2)_+} \|t_n\|_{p_1, p_2}, \quad p_1, p_2 \in [1, +\infty]. \quad (4.1)$$

б) Рассмотрим второй случай, когда $M^- < M^+$. Имеем

$$M^- \leq e^{1/e} n^{2/(2p_2+1)} \|t_n^-\|_{p_2}^{2p_2/(2p_2+1)} (M^+)^{1/(2p_2+1)}$$

и, так как $M^+ = M$, то опять по лемме 2 (случай а))

$$M^+ \leq e^{1/e} n^{1/p_1} \|t_n^+\|_{p_1}, \quad p_1 \in [1, +\infty],$$

откуда

$$\begin{aligned} M^- &\leq e^{1/e} n^{2/(2p_2+1)} \|t_n^-\|_{p_2}^{2p_2/(2p_2+1)} (M^+)^{1/(2p_2+1)} \\ &\leq C_1 n^{2/(2p_2+1)} n^{1/(p_1(2p_2+1))} \|t_n^-\|_{p_2}^{2p_2/(2p_2+1)} \|t_n^+\|_{p_1}^{1/(2p_2+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда по (2.2), полагая $a = \|t_n^-\|_{p_2}$, $b = \|t_n^+\|_{p_1}$, получаем

$$M^- \leq C_1 n^{(2+1/p_1)/(2p_2+1)} \|t_n\|_{p_1, p_2}.$$

Пусть $q_2 \leq p_2$, тогда по неравенству Гёльдера $\|t_n^-\|_{q_2} \leq C_2 \|t_n^-\|_{p_2}$. Пусть $q_2 \geq p_2$, тогда

$$\begin{aligned} \|t_n^-\|_{q_2} &= \left(\int_0^{2\pi} |t_n^-(x)|^{q_2} dx \right)^{1/q_2} = \left(\int_0^{2\pi} |t_n^-(x)|^{q_2 - p_2} |t_n^-(x)|^{p_2} dx \right)^{1/q_2} \\ &\leq (M^-)^{1-p_2/q_2} \|t_n^-\|_{p_2}^{p_2/q_2} \leq C_1^{1-p_2/q_2} n^{\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}(1/p_2 - 1/q_2)} \|t_n\|_{p_1, p_2}. \end{aligned}$$

Итак, во втором случае получили

$$\|t_n^-\|_{q_2} \leq C n^{\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}(1/p_2 - 1/q_2)_+} \|t_n\|_{p_1, p_2}. \quad (4.2)$$

Учитывая оценки (4.1) и (4.2), окончательно получаем для любого $t_n \in T_n$

$$\|t_n^-\|_{q_2} \leq C n^{(1/p_2 - 1/q_2)_+ \max\left(1, \frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}\right)} \|t_n\|_{p_1, p_2}, \quad p_1, p_2, q_2 \in [1, +\infty].$$

Аналогично получаем

$$\|t_n^+\|_{q_1} \leq C n^{(1/p_1 - 1/q_1)_+ \max\left(1, \frac{2+1/p_2}{2+1/p_1}\right)} \|t_n\|_{p_1, p_2}, \quad p_1, p_2, q_2 \in [1, +\infty].$$

Мы доказали следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in T_n$, $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, +\infty]$. Тогда

$$\|t_n\|_{q_1, q_2} \leq C n^{\psi(p_1, p_2, q_1, q_2)} \|t_n\|_{p_1, p_2}, \quad (4.3)$$

где

$$\psi(p_1, p_2, q_1, q_2) = \max \left(\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)_+ \max \left(1, \frac{2 + 1/p_2}{2 + 1/p_1} \right), \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right)_+ \max \left(1, \frac{2 + 1/p_1}{2 + 1/p_2} \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В дополнение к неравенству (4.3) нужно доказать, что оно неумлучшаемо. В случае $p_1 \leq p_2$

$$\psi(p_1, p_2, q_1, q_2) = \max \left(\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)_+, \frac{2 + 1/p_1}{2 + 1/p_2} \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right)_+ \right).$$

Если этот максимум достигается на $(1/p_1 - 1/q_1)_+$, то экстремальным полиномом будет $t_n = F_n(t)$, для которого

$$\|F_n(\cdot)\|_{q_1, q_2} = \|F_n(\cdot)\|_{q_1} \asymp n^{1/p_1 - 1/q_1} \|F_n(\cdot)\|_{p_1, p_2}.$$

Иначе (максимум достигается на $\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}(1/p_2 - 1/q_2)_+$) экстремальным полиномом будет

$$t_n = T_n(\delta, t) \quad \text{при} \quad \delta = \frac{n^{-\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}}}{2}.$$

Поскольку согласно оценкам (3.13) и (3.16) имеем

$$\|T_n(\delta, \cdot)\|_{q_1, q_2} \asymp n^{\frac{2+1/p_1}{2+1/p_2}(1/p_2 - 1/q_2)} \|T_n(\delta, \cdot)\|_{p_1, p_2}.$$

В случае $p_1 \geq p_2$

$$\psi(p_1, p_2, q_1, q_2) = \max \left(\frac{2 + 1/p_2}{2 + 1/p_1} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)_+, \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2} \right)_+ \right),$$

если этот максимум достигается на $(1/p_2 - 1/q_2)_+$, то экстремальным полиномом будет $t_n = -F_n(t)$, для которого

$$\| -F_n(\cdot) \|_{q_1, q_2} = \|F_n(\cdot)\|_{q_2} \asymp n^{1/p_2 - 1/q_2} \| -F_n(\cdot) \|_{p_1, p_2}.$$

Иначе (максимум достигается на $\frac{2+1/p_2}{2+1/p_1}(1/p_1 - 1/q_1)_+$) экстремальным полиномом будет

$$t_n = -T_n(\delta, t) \quad \text{при} \quad \delta = \frac{n^{-\frac{2+1/p_2}{2+1/p_1}}}{2}.$$

Так как согласно оценкам (3.13) и (3.16) имеем

$$\| -T_n(\delta, \cdot) \|_{q_1, q_2} \asymp n^{\frac{2+1/p_2}{2+1/p_1}(1/p_1 - 1/q_1)} \| -T_n(\delta, \cdot) \|_{p_1, p_2}.$$

Теорема 2 доказана.

Из соотношений $\|f\|_{p, p} \asymp \|f\|_p \quad \forall p \in [1, +\infty]$ и теоремы 2 мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p, q \in [1, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sup_{\substack{t_n \in T_n \\ t_n \neq 0}} \frac{\|t_n\|_q}{\|t_n\|_p} \asymp n^{(1/p-1/q)+}.$$

Таким образом, в качестве следствия из теоремы 2 мы получили оценку (1.1) с константой, не зависящей от n , и проверили ее неухудшаемость в смысле порядка.

Автор выражает искреннюю благодарность А. В. Рождественскому, С. Б. Стечкину, О. А. Тимошину, И. Г. Царькову за помощь при подготовке работы. Автор также признателен В. В. Арестову, который прочитал рукопись и сделал ряд ценных замечаний. Работа выполнена под руководством С. Б. Стечкина.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [2] Jackson D. Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39. P. 889–906.
- [3] Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. № 9. С. 1511–1514.
- [4] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
- [5] Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.