Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Окулов, Многомерный аналог одной теоремы Зигмунда, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 717–727

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:16:35

УДК 517.518.475

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЗИГМУНДА

В. А. Окулов

А. Зигмундом доказано неравенство, характеризующее зависимость модуля непрерывности сопряженной функции от модуля непрерывности исходной функции из пространства 2π -периодических непрерывных функций. Настоящая статья содержит оценки частных модулей непрерывности сопряженной функции многих переменных в пространстве C . Соответствующими примерами показана точность полученных результатов.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В настоящей работе предполагается пользоваться следующими обозначениями: N – натуральное число, M – множество $\{1, 2, \dots, N\}$, B – непустое подмножество множества M , $|B|$ – количество элементов в множестве B . Все рассматриваемые ниже функции предполагаются 2π -периодическими по каждой переменной. Через $C(T^N)$, где $T = [-\pi, \pi]$, обозначается пространство 2π -периодических по каждой переменной функций, непрерывных на всем $\mathbb{R}^N$ с нормой

$$\|f\| = \max_{\bar{x} \in T^N} |f(\bar{x})|.$$

Пусть $f \in C(T^N)$, $1 \leq j \leq N$, и $t \in T$. Тогда для всех $\bar{x}$ положим

$$\Delta_j(f, \bar{x}, t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_N) - f(\bar{x})$$

и определим модуль непрерывности по j -й переменной равенством

$$\omega_j(f, \delta) = \sup_{|t| \leq \delta} \|\Delta_j(f, \bar{x}, t)\|.$$

Если задана функция $\omega(u)$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\omega(0) = 0$;
- 2) $\omega(u)$ не убывает на $[0, \pi]$;
- 3) $\omega(u)$ непрерывна на $[0, \pi]$;
- 4) $\omega(\xi + \eta) \leq \omega(\xi) + \omega(\eta)$ при $0 \leq \xi \leq \xi + \eta \leq \pi$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00240.

то будем называть ее просто *модулем непрерывности*.

Далее, если заданы $|B|$ модулей непрерывности $\omega_j(\delta)$ ($j \in B$), то через $H(\omega_j, j \in B, T^N)$ будем обозначать класс тех $f \in C(T^N)$, для которых

$$\forall j \in B: \omega_j(f, \delta) = O[\omega_j(\delta)], \quad \delta \rightarrow +0.$$

В частности, если $\omega_j(\delta) = \delta^\alpha$ при $j \in M$, $0 < \alpha \leq 1$ и $f \in H(\omega_j, j \in M, T^N)$, то говорят, что функция $f(\bar{x})$ удовлетворяет *условию Липшица* порядка α ($f \in \text{Lip}(\alpha, C(T^N))$).

Теперь определим сопряженную к $f(\bar{x})$ функцию по переменным, индексы которых составляют множество $B = (r_1, \dots, r_k)$ (или B -сопряженную функцию, $B \subseteq M$), равенством

$$\bar{f}_B(\bar{x}) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|} \lim_{\varepsilon(B) \rightarrow 0} \int_{T_{\varepsilon(B)}^{|B|}} f(\bar{x} + \bar{s}_B) \left(\prod_{j=1}^k \text{ctg} \frac{s_{r_j}}{2} ds_{r_j}\right), \quad (1)$$

где $\varepsilon(B) = (\varepsilon_{r_1}, \dots, \varepsilon_{r_k})$, $\varepsilon_{r_j} > 0$ при $j = 1, \dots, k$,

$$T_{\varepsilon(B)}^{|B|} = \prod_{j=1}^k (T \setminus (-\varepsilon_{r_j}, \varepsilon_{r_j})),$$

N -мерный вектор $\bar{s}_B$ имеет координаты

$$(\bar{s}_B)_l = \begin{cases} s_{r_j} & \text{при } l = r_j, \text{ где } j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{при остальных } l. \end{cases}$$

Предел в (1) берется при независимом стремлении к нулю компонент вектора $\varepsilon(B)$, т.е. в смысле Прингсхейма.

Хорошо известно, что уже в одномерном случае непрерывная функция может иметь разрывную сопряженную (см., например, [1, с. 554]). Более того, А. Зигмунд [2] показал, что если для некоторого модуля непрерывности $\omega(t)$ имеет место

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t} dt = \infty, \quad (2)$$

то существует $f \in C(T)$ такая, что $\omega(f, \delta) = O[\omega(\delta)]$ при $\delta \rightarrow +0$, а сопряженная функция $\bar{f}$ даже не ограничена. В той же работе Зигмунд доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Зигмунд). Если $f \in C(T)$, то

$$\omega(\bar{f}, \delta) \leq A \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(f, t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(f, t)}{t^2} dt \right\}$$

при $0 \leq \delta \leq \pi/2$, где A – абсолютная константа.

В частности, из теоремы Зигмунда следует, что если интеграл (2) конечен, то $\omega(\bar{f}, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$, т.е. $\bar{f} \in C(T)$.

Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [3] показали, что в теореме Зигмунда оценка модуля непрерывности сопряженной функции является точной по порядку.

ТЕОРЕМА (Бари, Стечкин). Пусть $\omega(t)$ – модуль непрерывности и

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда существует $f \in C(T)$ такая, что $\omega(f, \delta) = \omega(\delta)$ при $0 \leq \delta \leq \pi/2$ и

$$\omega(\bar{f}, \delta) \geq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2} dt \right\} + O[\omega(\delta)]$$

при $\delta \rightarrow +0$.

В настоящей работе будут доказаны многомерные аналоги вышеуказанных теорем.

Прежде всего приведем критерий непрерывности сопряженных функций, доказанный автором в работе [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B \subseteq M$, $\omega_j(\delta)$ ($j \in B$) – модули непрерывности. Тогда для того, чтобы для любой функции $f \in H(\omega_j, j \in B, T^N)$ сопряженная функция $\bar{f}_B \in C(T^N)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{[0, \pi/2]^{|B|}} \min_{j \in B} \omega_j(\delta_j) \prod_{j \in B} \frac{d\delta_j}{\delta_j} < \infty. \quad (3)$$

Отметим, что достаточность условия (3) в теореме 1 следует из результата Л. К. Панджикидзе [5].

Следующая теорема является аналогом теоремы Зигмунда.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C(T^N)$, $\omega_i(f, \delta) = \omega_i(\delta)$ при $0 \leq \delta \leq \pi$, $1 \leq i \leq N$, $B \subseteq M$ и выполнено условие (3). Тогда если $k \in B$, то

$$\omega_k(\bar{f}_B, \delta) = O \left\{ \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k) s_k^{-1} \min_{i \in B} \omega_i(s_i) \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\} \quad (4)$$

при $\delta \rightarrow +0$, а если $k \in M \setminus B$, то

$$\omega_k(\bar{f}_B, \delta) = O \left\{ \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min \left\{ \min_{i \in B} \omega_i(s_i), \omega_k(\delta) \right\} \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\} \quad (5)$$

при $\delta \rightarrow +0$.

Отметим, что приводимое ниже доказательство теоремы 2 с небольшими изменениями переносится на случай, когда $f \in L(T^N)$ и рассматриваются частные интегральные модули непрерывности функций.

Оценки модулей непрерывности сопряженной функции в теореме 2 являются точными. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B \subseteq M$, а $\omega_i(\delta)$ ($1 \leq i \leq N$) – модули непрерывности. Тогда существуют функции $f, g \in C(T^N)$ такие, что

$$\omega_i(f, \delta) \leq \omega_i(\delta) \quad \text{и} \quad \omega_i(g, \delta) \leq \omega_i(\delta)$$

при $0 \leq \delta \leq \pi$, $1 \leq i \leq N$, но если $k \in B$, то имеет место неравенство

$$\omega_k(\bar{f}_B, \delta) \geq \frac{1}{16\pi|B|} \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k) s_k^{-1} \min_{i \in B} \omega_i(s_i) \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \quad (6)$$

при $0 \leq \delta \leq \pi/2$, а если $k \notin B$ (в случае $B \neq M$), то имеет место неравенство

$$\omega_k(\bar{g}_B, \delta) \geq (N - |B|)^{-1} \pi^{-|B|} \int_{[0, \pi]^{|B|}} \min \left\{ \min_{i \in B} \omega_i(s_i), \omega_k(\delta) \right\} \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i. \quad (7)$$

Отметим, что из теорем 2 и 3 вытекают оценки М. М. Лекишвили [6] модулей непрерывности сопряженных функций для класса $\text{Lip}(\alpha, C(T^N))$, а также аналогичные оценки для более широкого класса функций в пространстве $C(T^N)$, полученные автором в работе [4].

2. Доказательство теоремы 2.

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $g \in L(T)$, $g(-\pi) = g(\pi)$. Тогда при $0 \leq h \leq \pi/2$ и для почти всех $x \in T$

$$\Delta_h \bar{g}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_{(s+h)/2} \Delta_{|(s-h)/2|} g(x) \frac{\sin h}{|\cos s - \cos h|} ds,$$

где

$$\Delta_h g(x) = g(x+h) - g(x-h),$$

а интеграл понимается как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_0^{h-\varepsilon} + \int_{h+\varepsilon}^\pi \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению сопряженной функции

$$(-2\pi) \bar{g}(x+h) = \int_T [g(x+h+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s}{2} ds.$$

Далее, воспользовавшись 2π -периодичностью подынтегральной функции, получаем

$$\begin{aligned} (-2\pi) \bar{g}(x+h) &= \left\{ \int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 \right\} [g(x+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds \\ &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h)] \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds \\ &\quad + \int_{-\pi}^0 g(x+s) \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds + g(x+h) \int_0^\pi \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} (-2\pi)\bar{g}(x-h) &= \int_0^\pi g(x+s) \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds + \int_{-\pi}^0 g(x-h) \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} ds \\ &\quad + \int_{-\pi}^0 [g(x+s) - g(x-h)] \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (-2\pi)\Delta_h \bar{g}(x) &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h)] \left\{ \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} \right\} ds \\ &\quad - \int_{-\pi}^0 [g(x+s) - g(x-h)] \left\{ \operatorname{ctg} \frac{s+h}{2} - \operatorname{ctg} \frac{s-h}{2} \right\} ds \\ &= \int_0^\pi [g(x+s) - g(x+h) + g(x-s) - g(x-h)] \frac{2 \sin h}{\cos h - \cos s} ds \\ &= 2 \int_0^\pi \Delta_{(s+h)/2} \Delta_{(s-h)/2} g(x) \frac{\sin h}{\cos h - \cos s} ds. \end{aligned}$$

Так как $\Delta_t g(x) = -\Delta_{-t} g(x)$ и при $0 \leq s \leq \pi$ знаки у $(s-h)/2$ и у $\cos h - \cos s$ совпадают, то из последнего равенства следует, что

$$(-\pi)\Delta_h \bar{g}(x) = \int_0^\pi \Delta_{(s+h)/2} \Delta_{|(s-h)/2|} g(x) \frac{\sin h}{|\cos h - \cos s|} ds.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Не ограничивая общности, предположим, что $B = \{1, \dots, n\}$, где $1 \leq n \leq N$. Пусть будет $\bar{f} \equiv \bar{f}_B$, а e_i — i -й единичный базисный вектор в $\mathbb{R}^N$.

Для $f \in C(T^N)$, $\bar{x}, \bar{h} \in \mathbb{R}^N$ положим

$$\Delta_{\bar{h}} f(\bar{x}) = f(\bar{x} + \bar{h}) - f(\bar{x} - \bar{h}),$$

причем здесь учитывается 2π -периодичность функции $f(\bar{x})$ по каждому переменному.

По определению сопряженной функции

$$\begin{aligned} (-2\pi)^n \bar{f}(\bar{x}) &= \int_{T^n} f\left(\bar{x} + \sum_{i=1}^n s_i e_i\right) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &= \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{s_1 e_1} \cdots \Delta_{s_n e_n} f(\bar{x}) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Напомним, что интеграл здесь понимается в смысле Прингсхейма.

При $0 < h \leq \pi/2$ из равенства (8) вытекает, что

$$(2\pi)^n |\Delta_{h e_k} f(\bar{x})| = \left| \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{h e_k} \Delta_{s_1 e_1} \cdots \Delta_{s_n e_n} f(\bar{x}) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \right|. \quad (9)$$

Легко видеть, что при $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^N$, где $i = 1, 2, \dots, m$,

$$|\Delta_{\bar{a}_1} \cdots \Delta_{\bar{a}_m} f(\bar{x})| \leq 2^{m-1} \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sup_{\bar{x} \in T^N} |\Delta_{\bar{a}_i} f(\bar{x})| \right\}. \quad (10)$$

Теперь определим функцию $\alpha: T \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [-\pi, 0), \\ x & \text{при } x \in [0, \pi/2], \\ \pi - x & \text{при } x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Так как функция f по условию 2π -периодическая по всем переменным, то

$$\Delta_{se_i} f(\bar{x}) = -\Delta_{(\pi-s)e_i} f(\bar{x} + \pi e_i)$$

при $1 \leq i \leq N$, $s \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\sup_{\bar{x} \in T^N} |\Delta_{se_i} f(\bar{x})| \leq \omega_i(2\alpha(s)) \quad (11)$$

при $1 \leq i \leq N$, $0 \leq s \leq \pi$.

Неравенства (10) и (11) вместе с равенством (9) дают следующую оценку

$$\omega_k(\bar{f}, 2h) \leq (2\pi)^{-n} \int_{[0, \pi]^n} 2^n \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2\alpha(s_i)), \omega_k(2h) \right\} \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \quad (12)$$

Поскольку функция $\alpha(x)$ симметрична относительно $\pi/2$ на отрезке $[0, \pi]$, то из неравенства (12) следует

$$\omega_k(\bar{f}, 2h) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_{[0, \pi/2]^n} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i), \omega_k(2h) \right\} \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{\sin s_i}.$$

Теперь для получения соотношения (5) остается применить неравенство $\sin x \geq 2x/\pi$ при $0 \leq x \leq \pi/2$ и сделать тривиальную замену переменных, причем стоящий там интеграл существует уже в смысле Лебега и конечен в силу условия (3).

При доказательстве соотношения (4) предположим, не ограничивая общности, что $k = n$.

Согласно лемме

$$\begin{aligned} \Delta_{he_n} \bar{f}(\bar{x}) &= \Delta_{he_n} \overline{(\bar{f}_{\{1, \dots, n-1\}})}_{\{n\}}(\bar{x}) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_{((s_n+h)/2)e_n} \Delta_{|(s_n-h)/2|e_n} \bar{f}_{\{1, \dots, n-1\}}(\bar{x}) \frac{\sin h}{|\cos s_n - \cos h|} ds_n. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая равенство (8), получим

$$\begin{aligned} \Delta_{he_n} \bar{f}(\bar{x}) &= 2 \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi]^n} \Delta_{s_1 e_1} \cdots \Delta_{s_{n-1} e_{n-1}} \Delta_{((s_n+h)/2)e_n} \Delta_{((s_n-h)/2)e_n} f(\bar{x}) \\ &\quad \times \frac{\sin h ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых из равенства (9) была выведена оценка (12), из равенства (13) получаем

$$\begin{aligned} \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq 2\pi^{-n} \int_{[0, \pi]^n} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i(2\alpha(s_i)), \omega_n \left(2\alpha \left(\left| \frac{s_n - h}{2} \right| \right) \right) \right\} \\ &\times \frac{\sin h \, ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} \, ds_i. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметричностью функции $\alpha(x)$ относительно $\pi/2$ на отрезке $[0, \pi]$, получаем

$$\begin{aligned} 2^{-n} \pi^n \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq \left\{ \int_0^h + \int_h^{2h} + \int_{2h}^\pi \right\} \frac{\sin h \, ds_n}{|\cos s_n - \cos h|} \\ &\times \int_{[0, \pi/2]^{n-1}} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n-1} \omega_i(2s_i), \omega_n(|s_n - h|) \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 I_i(h). \end{aligned} \quad (14)$$

Оценим интегралы $I_i(h)$ ($i = 1, 2, 3$) по отдельности. Положим

$$J(s_n) = \int_{[0, \pi/2]^{n-1}} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i}.$$

В интеграле $I_1(h)$ сделаем замену $2s'_n = h - s_n$. Опуская штрих при s'_n , получим

$$I_1(h) = \int_0^{h/2} \frac{\sin h}{\cos(h - 2s_n) - \cos h} J(s_n) \, ds_n. \quad (15)$$

В интегралах $I_2(h)$ и $I_3(h)$ сделаем замену $2s'_n = s_n - h$.

Получаем

$$I_2(h) + I_3(h) = \left\{ \int_0^{h/2} + \int_{h/2}^{(\pi-h)/2} \right\} \frac{\sin h}{\cos h - \cos(2s_n + h)} J(s_n) \, ds_n.$$

Теперь сложим $I_1(h)$ (формула (15)) и $I_2(h)$, учитывая, что

$$\frac{1}{\cos h - \cos(2s_n + h)} + \frac{1}{\cos(h - 2s_n) - \cos h} = \frac{\sin h \operatorname{ctg} s_n}{\sin(s_n + h) \sin(h - s_n)}.$$

В итоге преобразованное неравенство (14) запишется следующим образом

$$\begin{aligned} 2^{-n} \pi^n \omega_n(\bar{f}, 2h) &\leq \int_0^{h/2} \frac{\sin^2 h \operatorname{ctg} s_n}{\sin(s_n + h) \sin(h - s_n)} J(s_n) \, ds_n \\ &+ \int_{h/2}^{(\pi-h)/2} \frac{\sin h}{2 \sin s_n \sin(s_n + h)} J(s_n) \, ds_n. \end{aligned} \quad (16)$$

При $0 \leq s \leq h/2 \leq \pi/4$, используя неравенства

$$\sin h \leq h, \quad \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}(s+h) \leq \sin(s+h), \quad \frac{2}{\pi}(s-h) \leq \sin(h-s), \quad \operatorname{ctg} s \leq s^{-1},$$

получаем

$$\frac{\sin^2 h \operatorname{ctg} s}{\sin(s+h) \sin(h-s)} \leq \frac{3\pi^2}{4\sqrt{2}} \frac{h^2}{(s+h)(h-s)s} \leq \frac{11}{s}. \quad (17)$$

Далее, при $0 \leq h/2 \leq s \leq (\pi-h)/2$

$$\frac{\sin h}{2 \sin s \sin(s+h)} \leq \frac{h}{2 \cdot 2/\pi \cdot s(2\sqrt{2})(s+h)/(3\pi)} \leq \frac{3h}{s^2}. \quad (18)$$

Подставляя оценки (17) и (18) в неравенство (16), получаем

$$\omega_n(\bar{f}, 2h) = O \left\{ \int_0^{(\pi-h)/2} ds_n \int_{[0, \pi/2]^{n-1}} \frac{\min(h/2, s_n)}{s_n^2} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i} \right\}.$$

В силу неравенства $\sin s \geq 2s/\pi$ ($0 \leq s \leq \pi/2$) и неотрицательности подынтегральной функции, получаем

$$\omega_n(\bar{f}, h) \leq \omega_n(\bar{f}, 4h) = O \left\{ \int_{[0, \pi]^n} \frac{\min(h, s_n)}{s_n} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(s_i) \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{s_i} \right\}.$$

Интеграл здесь существует в смысле Лебега и конечен, что вытекает из условия (3).

Таким образом, соотношение (4) и вместе с ним теорема 2 доказаны.

3. Доказательство теоремы 3. Без ограничения общности считаем, что сопряжение ведется по первым n ($1 \leq n \leq N$) переменным ($\bar{f} \equiv \bar{f}_{\{1, \dots, n\}}$).

Рассмотрим функцию

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2\alpha(x_i))$$

при $\bar{x} \in T^N$ и где $\alpha(x)$ — функция, определенная в п. 2.

Заметим, что $\omega(\alpha, \delta) \leq 2\delta$ и (см. [7]) $\omega(\omega_i, \delta) = \omega_i(\delta)$, $1 \leq i \leq n$, поэтому

$$\omega(\omega_i \circ 2\alpha, \delta) \leq 2\omega_i(\delta), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Отсюда легко показать, что при $1 \leq i \leq n$ имеем $\omega_i(f, \delta) \leq \omega_i(\delta)$. Кроме того, отметим, что при $n \leq i \leq N$ (в случае $n \neq N$) $\omega_i(f, \delta) \equiv 0$. Покажем теперь, что функция f удовлетворяет неравенству (6) при $k = n$.

Пусть $0 \leq \delta \leq \pi/2$. По определению сопряженной функции

$$\bar{f}(-2\delta e_n) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T^n} f(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n - 2\delta, 0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i.$$

Так как $f(\bar{x}) = 0$ при $\bar{x} \notin [0, \pi]^n \times [-\pi, \pi]^{N-n}$, то

$$\begin{aligned}\bar{f}(-2\delta e_n) &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi]^{n-1}} \int_{2\delta}^{\pi+2\delta} f(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n - 2\delta, 0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi]^n} f(s_1, \dots, s_n, 0, \dots, 0) \operatorname{ctg} \frac{s_n + 2\delta}{2} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i\right) ds_n.\end{aligned}$$

По определению функции f и в силу симметричности функции α относительно $\pi/2$ на отрезке $[0, \pi]$ имеем

$$\begin{aligned}f(-2\delta e_n) &= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[0, \pi/2]^n} \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \left\{ \operatorname{ctg} \frac{s_n + 2\delta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi - s_n + 2\delta}{2} \right\} ds_n \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n-1} \left(\operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi - s_i}{2} \right) ds_i.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{ctg} \frac{s + 2\delta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi - s + 2\delta}{2} = \frac{2 \cos 2\delta}{\sin s + \sin 2\delta},$$

получаем

$$\bar{f}(0, \dots, 0) - \bar{f}(-2\delta e_n) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \int_{[0, \pi/2]^n} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{\sin s_i}\right) \eta(s_n, \delta) ds_n,$$

где

$$\eta(s, \delta) = \frac{1}{\sin s} - \frac{\cos 2\delta}{\sin s + \sin 2\delta}.$$

Следовательно,

$$\omega_n(\bar{f}, 2\delta) \geq \frac{1}{4\pi^n} \int_{[0, \pi]^n} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(s_i) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{ds_i}{s_i}\right) \eta\left(\frac{s_n}{2}, \delta\right) ds_n. \quad (19)$$

Обозначим

$$\nu(s, \delta) = \frac{\cos 2\delta \sin s}{\sin s + \sin 2\delta}.$$

При $0 \leq \delta \leq \pi/4, 0 \leq s \leq \delta/2$ имеем

$$\nu(s, \delta) = \frac{\cos 2\delta \sin s}{2 \sin((s + 2\delta)/2) \cos((2\delta - s)/2)} \leq \frac{\sin s}{2 \sin(5s/2)} \leq \frac{s}{2 \cdot 2/\pi \cdot 5s/2} \leq \frac{\pi}{10} < \frac{1}{2},$$

а при $\pi/4 \leq \delta \leq \pi/2, 0 \leq s \leq \delta/2$ функция $\nu(s, \delta)$ не положительна. Следовательно, при $0 \leq \delta \leq \pi/2, 0 \leq s \leq \delta/2$ получаем

$$\eta(s, \delta) = \frac{1}{\sin s} (1 - \nu(s, \delta)) \geq \frac{1}{2s}. \quad (20)$$

Далее, при $0 \leq \delta \leq \pi/2$, $\delta/2 \leq s \leq \pi/2$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \eta(s, \delta) &= \frac{\sin s(1 - \cos 2\delta) + \sin 2\delta}{\sin s(\sin s + \sin 2\delta)} \geq \frac{2 \sin \delta(\sin s \sin \delta + \cos \delta)}{5 \sin^2 s} \\ &\geq \frac{2\delta}{\pi} \frac{2 \sin s \sin \delta + 2 \cos \delta}{5s^2} \geq \frac{2\delta}{5\pi} \frac{\sin^2 \delta + 2 \cos \delta}{s^2} \geq \frac{\delta}{8s^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Объединяя оценки (20) и (21), получаем

$$\eta(s, \delta) \geq \frac{\min(s, \delta/2)}{4s^2},$$

поэтому

$$\eta\left(\frac{s}{2}, \delta\right) \geq \frac{\min(s, \delta)}{2s^2}$$

при $0 \leq \delta$, $s/2 \leq \pi/2$. Подставим последнюю оценку в неравенство (19). Находим, что

$$\omega_n(\bar{f}, 2\delta) \geq \frac{1}{8\pi^n} \int_{[0, \pi]^n} \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(s_i) \frac{\min(\delta, s_n)}{s_n} \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{s_i}.$$

Остается заметить, что

$$\omega_n(\bar{f}, \delta) \geq \frac{1}{2} \omega_n(\bar{f}, 2\delta)$$

и неравенство (6) доказано для $k = n$. При $n > 1$ для других $k \in B = \{1, \dots, n\}$ доказательство неравенства (6) совершенно аналогично. Таким образом, функция f удовлетворяет условиям теоремы 3.

Если $n < N$, то возможен случай, когда $k \notin B$, т.е. $n < k \leq N$. Для таких значений k рассмотрим следующие 2π -периодические непрерывные на T^N функции

$$g^{(k)}(\bar{x}) = \frac{1}{2} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2\alpha(x_i)), \omega_k(\alpha(x_k)) \right\}.$$

Теми же рассуждениями, что и выше, для функции f можно показать, что $\omega_i(g^{(k)}, \delta) \leq \omega_i(\delta)$ при $1 \leq i \leq N$, $n < k \leq N$. Оценим снизу $\omega_k(g^{(k)}, \delta)$ при $n < k \leq N$, причем, не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $k = N$.

Пользуясь определением сопряженной функции, функции $g^{(k)}(\bar{x})$ и симметричностью функции α относительно $\pi/2$ на отрезке $[0, \pi]$, получаем

$$\bar{g}^{(N)}(0, \dots, 0, \delta) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \int_{[0, \pi/2]^n} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(2s_i) \omega_N(\delta) \right\} \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{\sin s_i}.$$

Заметим, что $\bar{g}^{(N)}(0, \dots, 0) = 0$, поэтому

$$\omega_N(\bar{g}^{(N)}, \delta) \geq \pi^{-n} \int_{[0, \pi]^n} \min \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \omega_i(s_i), \omega_N(\delta) \right\} \prod_{i=1}^n \frac{ds_i}{s_i}. \quad (22)$$

Положим теперь

$$g(\bar{x}) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=n+1}^N g^{(k)}(\bar{x}).$$

Легко видеть, что из неравенств $\omega_i(g^{(k)}, \delta) \leq \omega_i(\delta)$, где $1 \leq i \leq N$, $n < k \leq N$, вытекают неравенства $\omega_i(g, \delta) \leq \omega_i(\delta)$ при $1 \leq i \leq N$. Кроме того,

$$\omega_k(\bar{g}, \delta) = \frac{1}{N-n} \omega_k(\bar{g}^{(k)}, \delta)$$

при $n < k \leq N$, $0 \leq \delta \leq \pi$. Поэтому из оценки (22) (и аналогичных ей оценок в случае $N - n > 1$) вытекают неравенства (7).

Теорема 3 полностью доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю М. И. Дьяченко за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Zygmund A. O module ciaglosci sumy szeregu sprzezonego z szeregiem Fouriera // Prace Mat.-Fiz. 1924. V. 33. P. 125–132.
- [3] Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. ММО 1956. Т. 5. С. 483–522.
- [4] Окулов В. А. Многомерный аналог одной теоремы Привалова // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 93–104.
- [5] Панджикидзе Л. К. Сходимость кратных сопряженных тригонометрических рядов в пространстве $C(\mathbb{R}_n)$ и непрерывность сопряженных функций многих переменных // Сообщ. АН ГССР. 1988. Т. 132. № 3. С. 481–483.
- [6] Лекишвили М. М. О сопряженных функциях многих переменных в классе $\text{Lip } \alpha$ // Матем. заметки. 1978. Т. 28. № 3. С. 261–272.
- [7] Никольский С. М. Ряды Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. С. 191–194.