Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Прохоров, Сумма коэффициентов ограниченных однолистных функций, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 728–733

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:38:11

УДК 517.54

СУММА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. В. Прохоров

В классе голоморфных однолистных в единичном круге функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$, решается задача о максимуме функционала $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{k_j}$. Доказано, что если среди номеров $k_1, \dots, k_m$ есть хотя бы один четный, то для достаточно больших M экстремальными в этой задаче являются функции Пика.

Библиография: 3 названия.

Пусть S – класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций f , $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$; S^M , $M > 1$, – класс функций $f \in S$, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$, $|z| < 1$.

Граничными функциями многих экстремальных задач в классе S являются функции Кёбе

$$K_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

отображающие круг E на плоскость с разрезом по радиальному лучу наклона α . В классе S^M аналогами функций Кёбе служат функции Пика P_α^M , задаваемые уравнением

$$\frac{M^2 P_\alpha^M(z)}{(M - P_\alpha^M(z))^2} = K_\alpha(z).$$

Функция P_α^M отображает круг E на круг радиуса M с центром в начале координат и с разрезом по радиальному отрезку наклона α . Экстремальные задачи в классе S^M решаются труднее, чем в классе S , и функции Пика не всегда наследуют экстремальные свойства функций Кёбе.

Как известно, неравенства гипотезы Бибербаха $|a_n| \leq n$ справедливы для функций f класса S со знаком равенства только для K_α . Для $1 < M \leq \infty$ обозначим

$$P_\pi^M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,M} z^n, \quad P_\pi^\infty = K_\pi, \quad p_{n,\infty} = n.$$

Автор [1] доказал гипотезу Якубовского о том, что для всякого четного n найдется конечное M_n такое, что для всех $M \geq M_n$ и всех $f \in S^M$ справедливо неравенство

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-00345а.

$|a_n| \leq p_{n,M}$. В то же время при нечетных n и конечном M в классе S^M справедливы другие оценки.

Зафиксируем произвольный набор возрастающих номеров $k_1, \dots, k_m$, $k_1 > 1$, и рассмотрим функционал

$$J = J(k_1, \dots, k_m; f) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{k_j}, \quad f \in S.$$

Основной результат настоящей статьи сформулируем в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *Если среди номеров $k_1, \dots, k_m$ есть хотя бы один четный, то найдется конечное число $M(k_1, \dots, k_m)$ такое, что для всех $M \geq M(k_1, \dots, k_m)$ и $f \in S^M$ справедливо неравенство*

$$J(k_1, \dots, k_m; f) \leq \sum_{j=1}^m p_{k_j, M}.$$

1. Обозначим через V_n^M , $n \geq 2$, $1 < M \leq \infty$, множество значений системы коэффициентов $\{a_2, \dots, a_n\}$ в классе S^M . Оно является множеством достижимости в момент $t = \log M$ динамической управляемой системы (см. [2])

$$\frac{da}{dt} = -2 \sum_{s=1}^{n-1} e^{-s(t+iu)} A^s(t) a(t), \quad a(0) = a^0, \quad (1)$$

где

$$a(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2(t) & a_1(t) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \dots & a_1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$a^0 = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad a_1(t) \equiv 1.$$

Оптимальные управления $u = u(t)$ максимизируют функцию Гамильтона

$$H(t, a, \bar{\psi}, u) = -2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{n-1} e^{-s(t+iu)} (A^s a)^T \bar{\psi},$$

а вектор комплексных множителей Лагранжа $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ удовлетворяет сопряженной гамильтоновой системе

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = 2 \sum_{s=1}^{n-1} e^{-s(t+iu)} (s+1) (A^T)^s \bar{\psi}, \quad \psi(0) = \xi. \quad (2)$$

Вектор $(\psi_2(\log M), \dots, \psi_n(\log M))$ ортогонален касательной и опорной гиперплоскости (если они существуют) к граничной гиперповерхности ∂V_n^M множества V_n^M в точке $(a_2(\log M), \dots, a_n(\log M)) = (a_2, \dots, a_n)$. Если $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{k_j}$ достигает максимума в некоторой точке $x \in \partial V_n^M$, то существует сопряженная вектор-функция ψ такая, что $\psi_{k_1}(\log M) = \dots = \psi_{k_m}(\log M) = 1$, а остальные координаты вектора $\psi(\log M)$ равны нулю.

Точки граничной гиперповерхности ∂V_n^M доставляются граничными функциями f , $f(z) = Mw(z, \log M)$, где $w(z, t)$ являются решениями задачи Коши для дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \quad w|_{t=0} = z,$$

с оптимальными управлениями $u = u(t)$. Дифференцируя это равенство по z , получим дифференциальное уравнение относительно производной $w'(z, t)$ (штрих означает дифференцирование по z):

$$\frac{dw'}{dt} = -w' \frac{\partial}{\partial w} \left(w \frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w} \right), \quad w'|_{t=0} = 1. \quad (3)$$

Положим $k_m = n$. Обозначим

$$h(z) = \sum_{j=1}^m z^{n-k_j}, \quad \frac{h(z)f'(z)e^{-t}}{w'(z, t)} = \sum_{q=0}^{\infty} b_q(t)z^q.$$

Уравнение (3) вместе с (1) порождает однородное векторное дифференциальное уравнение относительно системы коэффициентов $b(t) = (b_0(t), \dots, b_{n-1}(t))^T$, которое отличается от сопряженной гамильтоновой системы (2) относительно $\bar{\psi}$ только знаком транспозиции матрицы A . Поскольку для точки $x \in \partial V_n^M$, доставляющей максимум функционалу J , вектор $(\psi_2(\log M), \dots, \psi_n(\log M))$ совпадает с $(b_{n-2}(\log M), \dots, b_0(\log M))$, то $(\psi_2(t), \dots, \psi_n(t)) = (b_{n-2}(t), \dots, b_0(t))$, $0 \leq t \leq \log M$. Следовательно, начальные значения $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ при $t = 0$ задаются следующими равенствами:

$$\xi_r = \sum_{j=q+1}^m (k_j - r + 1)a_{k_j-r+1}, \quad k_q + 1 \leq r \leq k_{q+1}, \quad q = 0, 1, \dots, m-1, \quad k_0 = 1.$$

2. Перейдем к выводу основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим через X некоторую окрестность функции Кёбе K_π в классе S в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах единичного круга, $X^M = X \cap S^M$. Функция Пика P_π^M принадлежит X^M для достаточно больших M . Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что только P_π^M доставляет локальный максимум функционалу J в окрестности X^M .

Зададим координаты вектора $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ равенствами

$$\xi_r^0 = \sum_{j=q+1}^m (k_j - r + 1)^2, \quad k_q + 1 \leq r \leq k_{q+1}, \quad q = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда

$$H(0, a^0, \bar{\xi}^0, u) = -2 \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{k_j-1} (k_j - s)^2 \cos(su).$$

Элементарными вычислениями находим, что

$$H(0, a^0, \bar{\xi}^0, u) - H(0, a^0, \bar{\xi}^0, \pi) = \frac{-\sin u \sum_{j=1}^m (k_j \sin u - \sin(k_j u))}{(1 - \cos u)^2}.$$

Функция $k_j \sin u - \sin(k_j u)$ положительна на $(0, \pi)$ и обращается в нуль в точке $u = \pi$. Следовательно, для всех $u \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$H(0, a^0, \bar{\xi}^0, u) \leq H(0, a^0, \bar{\xi}^0, \pi) \quad (4)$$

со знаком равенства только в точке $u = \pi$.

Кроме того,

$$\left. \frac{\partial H(0, a^0, \bar{\xi}^0, u)}{\partial (\cos u)} \right|_{u=\pi} = 2 \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{k_j-1} (-1)^s s^2 (k_j - s)^2. \quad (5)$$

Покажем, что эта производная отрицательна. Действительно, если k_j нечетно, то сумма

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^{k_j-1} (-1)^s s^2 (k_j - s)^2$$

обращается в нуль. Если же k_j четно, то сумма σ_j является $(k_j - 2)$ -м коэффициентом разложения функции $-(1 - z^2)^{-2}$, откуда следует, что $\sigma_j < 0$.

Неравенство (4) и отрицательность производной (5) означают, что функция $H(0, a^0, \bar{\xi}^0, u)$ как функция переменного $\cos u$ на отрезке $[-1, 1]$ достигает устойчивого максимума в точке -1 , т.е. точка -1 остается точкой максимума при малом изменении вещественных координат вектора $\bar{\xi}^0$. Выберем $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ из окрестности вектора $\bar{\xi}^0$, положив $(\xi_2, \dots, \xi_n) = ((n-1)p_{n-1,M}, \dots, 2p_{2,M}, 1)$ с достаточно большим значением M так, чтобы $H(0, a^0, \bar{\xi}, u)$ по-прежнему достигало максимума на $[0, 2\pi]$ в единственной точке $u = \pi$. Тогда управление $u = \pi$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина для $t > 0$ в окрестности начального значения $t = 0$, а соответствующее решение $w(z, t)$ дифференциального уравнения Левнера имеет вещественные коэффициенты. Следовательно, управление $u = \pi$ оптимально на всей полуоси $[0, \infty)$ (см., например, [2]). Интегрирование уравнения Левнера с $u = \pi$ на $[0, \log M]$ приводит к функции P_π^M . Таким образом, функция P_π^M удовлетворяет необходимому условию максимума функционала J .

Осталось показать, что необходимые условия экстремума функционала J выполняются в единственной точке в окрестности X^M .

Граничные гиперповерхности ∂V_n^M аналитически зависят от M . Предположим, что для любой окрестности X и любого достаточно большого M в окрестности X^M найдутся функции f^M , помимо P_π^M , удовлетворяющие необходимым условиям экстремума функционала J в классе S^M . Из множества функций f^M можно выделить последовательность, которая, как и P_π^M , сходится к K_π при $M \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что точка $N = (2, \dots, n)^T$ на гиперповерхности $\partial V_n = \partial V_n^\infty$, соответствующая функции

K_π , обладает следующим свойством: существует направление l , вдоль которого гиперплоскость

$$\Pi = \left\{ (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-1} : \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{k_j} = \sum_{j=1}^m k_j \right\}$$

имеет с гиперповерхностью ∂V_n касание не менее второго порядка.

На гиперповерхности ∂V_n рассмотрим окрестность Q_N точки N . Множество Q_N образуется как проекция на фазовое пространство множества решений задач Коши для гамильтоновой системы (1), (2). Окрестности Q_N соответствует окрестность Q_ξ начального значения $\Lambda = (\xi_2^0, \dots, \xi_n^0)^T$ системы (2). Это соответствие не взаимно однозначно. Все точки $\Lambda^* = (\xi_2^*, \dots, \xi_n^*)^T \in Q_\xi$ с вещественными координатами отображаются в точку N . Однако, соответствие между сопряженным вектором $(\psi_2^*(\infty), \dots, \psi_n^*(\infty))$ и начальным значением $\Lambda^* \in Q_\xi$ взаимно однозначно (см. [2]). Это означает, что для гиперповерхности ∂V_n точка N является угловой, ей соответствует семейство опорных гиперплоскостей. Начальному значению Λ соответствует опорная гиперплоскость Π . Но Π и ∂V_n могут иметь касание вдоль некоторых направлений, определяемых мнимыми составляющими координат фазового вектора или вектора начальных значений Λ^* . Покажем, что это касание не более первого порядка.

По существу, такой факт выразил Д. Бшутти [3], дополнивший следующие результаты Е. Бомбьери по локальной проблеме коэффициентов (см. библиографию в [3]): для четного k существуют постоянные α_k и β_k такие, что если $|2 - a_2| < \beta_k$, то $\operatorname{Re}(2 - a_2) < \alpha_k \operatorname{Re}(k - a_k)$. Дополнение Бшутти состоит в том, что для любого $j > 1$ существуют постоянные c_j и d_j такие, что $\operatorname{Re}(j - a_j) < c_j \operatorname{Re}(2 - a_2)$, $j - |a_j| < d_j \operatorname{Re}(2 - a_2)$.

Пусть $(a(t), \psi(t))$ является решение задачи Коши для гамильтоновой системы (1), (2) с $u = \pi$ и начальным значением Λ . Пусть $\Lambda^* = \Lambda + (\delta_2, \dots, \delta_n)^T \varepsilon$, $\delta_2, \dots, \delta_n$ — фиксированные комплексные числа, $\varepsilon > 0$, а $(a^*(t), \psi^*(t))$ — решение задачи Коши для гамильтоновой системы (1), (2) с начальным значением Λ^* и оптимальным управлением $u = u^*(t, a^*, \bar{\psi}^*)$.

Предположим, что Π и ∂V_n имеют в точке N касание выше первого порядка вдоль направления l , определяемого вектором $(\delta_2, \dots, \delta_n)$. Обозначим через k какой-либо четный номер из $k_1, \dots, k_m$. Уравнение гиперповерхности ∂V_n в окрестности Q_N выразим как $y = \varphi(x)$, где

$$y = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m a_{k_j},$$

а $x \in \mathbb{R}^{2n-3}$ — вектор, полученный из $(a_2, \dots, a_n)$ по формулам

$$x_{2j-3} = \operatorname{Re} a_j, \quad x_{2j-2} = \operatorname{Im} a_j, \quad j = 2, \dots, n,$$

из которых исключена координата $x_{2k-3} = \operatorname{Re} a_k$. Пусть x^0 соответствует точке N , а

$$y^0 = \sum_{j=1}^m k_j, \quad y^0 = \varphi(x^0).$$

Условие касания Π и ∂V_n выше первого порядка в точке N означает, что если вектор $\Delta \in \mathbb{R}^{2n-3}$ соответствует направлению l и $x = x^0 + \varepsilon \Delta$, то $y = y^0 + O(\varepsilon^3)$. Отсюда

следует, что представление $\operatorname{Re} a_{k_j}^* = k_j + \varepsilon \gamma_j + O(\varepsilon^2)$, $j = 1, \dots, m$, влечет равенство

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j = 0. \quad (6)$$

Значит, если хотя бы одно из γ_j отлично от нуля, то среди них отыщется положительное число, а это противоречит экстремальному свойству функций Кёбе в проблеме коэффициентов. Аналогичное представление $\operatorname{Re} a_{k_j}^* = k_j + \varepsilon^2 \gamma_j + O(\varepsilon^3)$, $j = 1, \dots, m$, влечет то же равенство (6), которое также требует равенства нулю всех $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

Итак, из условия высокого порядка касания выводим представление $\operatorname{Re} a_k^* = k + O(\varepsilon^3)$. Но тогда из результатов Бомбьери заключаем, что $\operatorname{Re} a_2^* = 2 + O(\varepsilon^3)$. Теперь уже результаты Бшути приводят к условиям $\operatorname{Re} a_j^* = j + O(\varepsilon^3)$, $|a_j^*| = j + O(\varepsilon^3)$, а, следовательно, $a_j^* = j + O(\varepsilon^2)$, $j > 1$, что противоречит равенству $x = x^0 + \varepsilon \Delta$. Таким образом, Π и ∂V_n имеют в точке N касание не выше первого порядка вдоль любого направления, что доказывает теорему.

Заметим, что дословным повтором теорема обобщается для функционала

$$J = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \lambda_j a_{k_j}$$

с положительными множителями λ_j . В этом случае граничное значение M зависит, конечно, также и от $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Еще одно замечание относится к случаю, когда все $k_1, \dots, k_m$ нечетные. Тогда функции Пика не доставляют максимума функционалу J . Действительно, производная (5) обращается в нуль, и нетрудно установить, что производная второго порядка в точке $u = \pi$ положительна при конечных достаточно больших M . Значит, управление $u = \pi$ перестает удовлетворять принципу максимума Понтрягина.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: prochor@scnit.saratov.su

Поступило
13.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Prokhorov D. V. Even coefficient estimates for bounded univalent functions // Ann. Polon. Math. 1993. V. 58. № 3. P. 267–273.
- [2] Прохоров Д. В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 12. С. 1659–1677.
- [3] Bshouty D. A coefficient problem of Bombieri concerning univalent functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 91. № 3. P. 383–388.