Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Стоянова, Инвариантные кубатурные формулы для гипероктаэдра, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 734–741

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:07:16

УДК 512

ИНВАРИАНТНЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИПЕРОКТАЭДРА

С. Б. Стоянова

В статье получены кубатурные формулы для вычисления интегралов по гипероктаэдру, инвариантные относительно группы всех ортогональных преобразований гипероктаэдра в себя. Получены две формулы точные для всех многочленов, не выше седьмой степени, и одна формула точная для всех многочленов, не выше пятой степени. Библиография: 3 названия.

Пусть O_n – гипероктаэдр в $\mathbb{R}^n$:

$$O_n := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Гипероктаэдр O_n представляет собой многогранник, вершинами которого служат $2n$ точек в $\mathbb{R}^n$:

$$(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1). \quad (2)$$

Группу всех ортогональных преобразований O_n в себя обозначим через $O_n G$. Известно [1], что порядок группы $O_n G$ равен $n!2^n$.

Кубатурные формулы для гипероктаэдра O_n , инвариантные относительно преобразований группы $O_n G$ и точные для всех многочленов, не выше третьей и пятой степени, приведены в [2].

В настоящей работе с помощью теоремы С. Л. Соболева [3] для гипероктаэдра O_n построена одна кубатурная формула, точная для всех многочленов, не выше пятой степени, и две кубатурные формулы, точные для всех многочленов, не выше седьмой степени. Полученные формулы инвариантны относительно группы $O_n G$.

Известно [1], что базис инвариантных относительно $O_n G$ многочленов состоит из n элементарных симметрических многочленов от $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$:

$$\sigma_2 := \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \sigma_4 := \sum_{i < j} x_i^2 x_j^2, \quad \dots, \quad \sigma_{2n} := x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2. \quad (3)$$

Это означает, что любой инвариантный относительно $O_n G$ многочлен является многочленом от многочленов (3).

1. Кубатурные формулы, точные для всех многочленов, не выше седьмой степени. Так как кубатурные формулы должны быть точными для всех многочленов, не выше седьмой степени, при $n \geq 3$ мы должны потребовать, чтобы кубатурные формулы были точными для семи инвариантных многочленов группы $O_n G$:

$$1, \sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_4, \sigma_2^3, \sigma_2\sigma_4, \sigma_6. \quad (4)$$

Выберем узлы искомых кубатурных формул так, чтобы кубатурные суммы зависели от семи параметров.

а) В качестве узлов первой кубатурной формулы возьмем следующие орбиты:

$$\begin{aligned} 1) O_n G(0, 0, \dots, 0), \quad 3) O_n G(b, b, 0, \dots, 0), \\ 2) O_n G(a, 0, \dots, 0), \quad 4) O_n G(c, c, c, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Первая орбита содержит только один узел $\theta = (0, 0, \dots, 0)$. Для каждой из остальных орбит здесь выписывается только один узел, а остальные получаются из него всевозможными перестановками координат и изменениями у них знака.

Кубатурная формула запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{O_n} f(x) dx \simeq D f(0, 0, \dots, 0) + A \sum_1^{2n} f(a, 0, \dots, 0) \\ + B \sum_1^{4C_n^2} f(b, b, 0, \dots, 0) + C \sum_1^{8C_n^3} f(c, c, c, 0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Число узлов $N = (4n^3 - 6n^2 + 8n + 3)/3$, $n \geq 3$.

Требование, чтобы кубатурная формула (5) была точна для многочленов (4), приводит к нелинейной алгебраической системе семи уравнений с семью неизвестными:

$$\begin{aligned} (1) : D + 2nA + 4C_n^2 B + 8C_n^3 C &= \frac{2^n}{n!}, \\ (\sigma_2) : 2nAa^2 + 8C_n^2 Bb^2 + 24C_n^3 Cc^2 &= \frac{n2^{n+1}}{(n+2)!}, \\ (\sigma_2^2) : 2nAa^4 + 16C_n^2 Bb^4 + 72C_n^3 Cc^4 &= \frac{n(n+5)2^{n+2}}{(n+4)!}, \\ (\sigma_4) : 4C_n^2 Bb^4 + 24C_n^3 Cc^4 &= \frac{n(n-1)2^{n+1}}{(n+4)!}, \\ (\sigma_2^3) : 2nAa^6 + 32C_n^2 Bb^6 + 216C_n^3 Cc^6 &= \frac{n(n^2 + 15n + 74)2^{n+3}}{(n+6)!}, \\ (\sigma_2\sigma_4) : 8C_n^2 Bb^6 + 72C_n^3 Cc^6 &= \frac{n(n-1)(n+10)2^{n+2}}{(n+6)!}, \\ (\sigma_6) : 8C_n^3 Cc^6 &= \frac{n(n-1)(n-2)2^{n+3}}{6(n+6)!}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) решается следующим образом. Из уравнения (σ_6) находим Cc^6 . Из уравнения $(\sigma_2\sigma_4)$ находим Bb^6 . Из уравнения (σ_2^3) находим Aa^6 . Для сокращения записи введем обозначения

$$A_1 = Aa^6, \quad B_1 = Bb^6, \quad C_1 = Cc^6. \quad (7)$$

Подставляя A_1, B_1 и C_1 в уравнения $(\sigma_2), (\sigma_2^2)$ и (σ_4) , получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{2(n^2 - 15n + 194)}{a^4(n+6)!} + \frac{4(n-1)(8-n)}{b^4(n+6)!} + \frac{2(n-1)(n-2)}{c^4(n+6)!} &= \frac{1}{(n+2)!}, \\ \frac{n^2 - 15n + 194}{a^2(n+6)!} + \frac{4(n-1)(8-n)}{b^2(n+6)!} + \frac{3(n-1)(n-2)}{c^2(n+6)!} &= \frac{n+5}{(n+4)!}, \\ \frac{2(8-n)}{b^2(n+6)!} + \frac{2(n-2)}{c^2(n+6)!} &= \frac{1}{(n+4)!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем новые неизвестные

$$u = \frac{1}{a^2}, \quad v = \frac{1}{b^2}, \quad w = \frac{1}{c^2}. \quad (9)$$

ТАБЛИЦА 1

$n = 3$	$A = 0.431217737625 \cdot 10^{-1}$ $B = 0.752860067247 \cdot 10^{-1}$ $C = 0.256074222572 \cdot 10^{-4}$ $D = 0.170965750684 \cdot 10^0$	$a = 0.737994122986$ $b = 0.378241155836$ $c = 0.975349311797$
$n = 4$	$A = 0.109460680164 \cdot 10^{-1}$ $B = 0.214073771925 \cdot 10^{-1}$ $C = 0.760687106276 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.409790825140 \cdot 10^{-1}$	$a = 0.703131698214$ $b = 0.343674449681$ $c = 0.423830118698$
$n = 5$	$A = 0.251436726154 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.490861543597 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.452683867638 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.896366720153 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.671675755456$ $b = 0.315159994082$ $c = 0.347829602479$
$n = 6$	$A = 0.541200588693 \cdot 10^{-3}$ $B = 0.943866436867 \cdot 10^{-3}$ $C = 0.152746755513 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.132301473051 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.640629790261$ $b = 0.287628605919$ $c = 0.309251515050$
$n = 7$	$A = 0.114116035766 \cdot 10^{-3}$ $B = 0.151602586054 \cdot 10^{-3}$ $C = 0.402449219469 \cdot 10^{-4}$ $D = -0.203994477532 \cdot 10^{-3}$	$a = 0.606385316614$ $b = 0.254414683669$ $c = 0.282728611694$

ТАБЛИЦА 2

$n = 3$	$A = 0.586986865555 \cdot 10^{-1}$ $B = 0.125705047497 \cdot 10^{-1}$ $C = 0.103700509925 \cdot 10^0$ $D = 0.691077600590 \cdot 10^{-3}$	$a = 0.701020861465$ $b = 0.509716907581$ $c = 0.244300493175$
$n = 4$	$A = 0.180374111884 \cdot 10^{-1}$ $B = 0.207058377272 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.140836661483 \cdot 10^{-1}$ $D = 0.219960498688 \cdot 10^{-1}$	$a = 0.646969786811$ $b = 0.507254243008$ $c = 0.260579474962$
$n = 5$	$A = 0.474102429707 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.265186453468 \cdot 10^{-3}$ $C = 0.245783148550 \cdot 10^{-2}$ $D = 0.120224467172 \cdot 10^{-1}$	$a = 0.604299768446$ $b = 0.512584767280$ $c = 0.262365681031$
$n = 6$	$A = 0.107549547245 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.194257442032 \cdot 10^{-4}$ $C = 0.436991633670 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.489873718013 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.571345409620$ $b = 0.549440779041$ $c = 0.259554351648$
$n = 7$	$A = 0.208914402013 \cdot 10^{-3}$ $B = 0.133460020076 \cdot 10^{-6}$ $C = 0.736771457766 \cdot 10^{-4}$ $D = 0.183121230950 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.548249687155$ $b = 0.821803671482$ $c = 0.255622734694$

Получим нелинейную систему с неизвестными u , v и w , из которой получаем

$$u = \frac{(n+5)(n+6)(13-n) - 2(n-1)(8-n)v}{2(n^2 - 15n + 194)},$$

$$w = \frac{(n+5)(n+6) - 2(8-n)v}{2(n-2)}$$
(10)

и квадратное уравнение относительно v :

$$72(n-1)(8-n)(3n+22)v^2 - 336(n-1)(8-n)(n+5)(n+6)v - (n+5)(n+6)(n^4 + 114n^3 - 463n^2 - 3552n + 3324) = 0.$$
(11)

После решения квадратного уравнения (11) находим u и w с помощью (10) и a^2 , b^2 , c^2 с помощью (9).

Приведем полученное решение системы (6):

$$A = \frac{(n^2 - 15n + 194)2^{n+1}}{a^6(n+6)!}, \quad B = \frac{(8-n)2^{n+1}}{b^6(n+6)!}, \quad C = \frac{2^n}{c^6(n+6)!},$$

$$D = \frac{2^n}{n!} - 2nA - 2n(n-1)B - \frac{4n(n-1)(n-2)C}{3},$$

$$a^2 = \frac{1}{u}, \quad b^2 = \frac{1}{v}, \quad c^2 = \frac{1}{w},$$

где v является решением квадратного уравнения (11), а u и w вычисляются по формулам (10).

Таким образом, получили две кубатурные формулы, так как квадратное уравнение (11) имеет два корня v_1 и v_2 .

Отметим, что при $n = 3$ число узлов $N = 27$ на основании теоремы 9.1 из [1, с. 196] минимально в классе кубатурных формул, у которых $\theta = (0, 0, \dots, 0)$ является узлом и которые точны для всех многочленов, не выше седьмой степени.

Для вычисления параметров кубатурной формулы (5) составлена программа на Фортране, пользуясь которой можно вычислить все параметры для любого $n \geq 3$, если формула существует, или установить, что формула не существует и по какой причине. С помощью программы проведены вычисления от $n = 3$ до $n = 10$ для обеих значений v_1 и v_2 и установлено, что при $n = 3(1)7$ формула (5) существует, а при $n = 8(1)10$ формула (5) не существует, так как при $n = 8$ уравнение (11) не имеет смысла, а при $n = 9$ и $n = 10$ уравнение (11) не имеет вещественных корней. Для v_1 получаем при $n = 3, 4, 5$, что часть узлов формулы (5) не принадлежат области интегрирования O_n , а при $n = 6, 7$ все узлы принадлежат O_n . Для v_2 получаем при $n = 3(1)7$, что часть узлов не принадлежит O_n .

Числовые значения параметров формулы (5) при $n = 3(1)7$ для v_1 приведены в таблице 1, а для v_2 результаты даны в таблице 2. При $n = 7$ коэффициент D в таблице 1 отрицателен, а остальные коэффициенты A, B, C, D в таблицах 1 и 2 положительные.

б) В качестве узлов второй кубатурной формулы возьмем тоже четыре орбиты, но вместо орбиты $O_n G(c, c, c, 0, \dots, 0)$ возьмем орбиты $O_n G(c, c, \dots, c)$.

Таким образом, кубатурная формула имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{O_n} f(x) dx \simeq D f(0, 0, \dots, 0) + A \sum_1^{2n} f(a, 0, \dots, 0) \\ + B \sum_1^{4C_n^2} f(b, b, 0, \dots, 0) + C \sum_1^{2n} f(c, c, \dots, c). \end{aligned} \quad (12)$$

Число узлов $N = 2^n + 2n^2 + 1, n \geq 3$.

Запишем теперь, что кубатурная формула (12) точна для многочленов (4). Это приводит к нелинейной системе из семи уравнений с семью неизвестными:

$$\begin{aligned} (1) : D + 2nA + 4C_n^2 B + 2^n C &= \frac{2^n}{n!}, \\ (\sigma_2) : 2nAa^2 + 8C_n^2 Bb^2 + n2^n Cc^2 &= \frac{n2^{n+1}}{(n+2)!}, \\ (\sigma_2^2) : 2nAa^4 + 16C_n^2 Bb^4 + n^2 2^n Cc^4 &= \frac{n(n+5)2^{n+2}}{(n+4)!}, \\ (\sigma_4) : 4C_n^2 Bb^4 + n(n-1)2^{n-1} Cc^4 &= \frac{n(n-1)2^{n+1}}{(n+4)!}, \\ (\sigma_2^3) : 2nAa^6 + 32C_n^2 Bb^6 + n^3 2^n Cc^6 &= \frac{n(n^2 + 15n + 74)2^{n+3}}{(n+6)!}, \\ (\sigma_2 \sigma_4) : 8C_n^2 Bb^6 + n^2(n-1)2^{n-1} Cc^6 &= \frac{n(n-1)(n+10)2^{n+2}}{(n+6)!}, \\ (\sigma_6) : 2^n Cc^6 &= \frac{2^{n+3}}{(n+6)!}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) решается аналогично тому, как решается система (6).

Приведем полученное решение системы (13):

$$A = \frac{(94 - 5n)2^{n+2}}{a^6(n+6)!}, \quad B = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{b^6(n+6)!}, \quad C = \frac{8}{c^6(n+6)!},$$

$$D = \frac{2^n}{n!} - 2nA - 2n(n-1)B - 2^nC, \quad a^2 = \frac{1}{u}, \quad b^2 = \frac{1}{v}, \quad c^2 = \frac{1}{w},$$

где v есть корень квадратного уравнения

$$360(3n+22)v^2 - 1680(n+5)(n+6)v + (n+5)(n+6)(5n^2 + 561n + 2442) = 0,$$

$$u = \frac{5(n+5)(n+6) - 10(n-2)v}{2(94-5n)}, \quad w = \frac{(n+5)(n+6) - 10v}{2}. \quad (14)$$

Здесь тоже получили две кубатурные формулы, так как квадратное уравнение (14) имеет два корня v_1 и v_2 .

Отметим, что при $n = 3$ и $n = 4$ число узлов кубатурной формулы (12) на основании теоремы 9.1 из [1, с. 196] минимально в классе кубатурных формул, у которых $\theta = (0, 0, \dots, 0)$ является узлом и которые точны для всех многочленов, не выше седьмой степени. При $n = 5$ и $n = 6$ число узлов формулы (12) превышает нижнюю границу из теоремы 9.1 соответственно на 2 и 12 единиц.

Для вычисления параметров кубатурной формулы (12) составлена программа на Фортране. С помощью этой программы проведены вычисления от $n = 3$ до $n = 10$ для обоих значений v_1 и v_2 и установлено, что формула (12) существует. Для v_1 получаем при $n = 3(1)10$, что часть узлов формулы (12) не принадлежат области интегрирования O_n и все коэффициенты положительны. Для v_2 получаем при $n = 3$ и $n = 7(1)10$, что часть узлов не принадлежит O_n и все коэффициенты положительные, а при $n = 4, 5, 6$ все узлы принадлежат O_n , коэффициент D отрицателен, а все остальные коэффициенты положительные.

Числовые значения параметров формулы (12) при $n = 4(1)8$ для v_1 приведены в таблице 3, а для v_2 результаты даны в таблице 4.

При $n = 3$ числовые значения параметров приведены в таблицах 1 и 2, так как формулы (5) и (12) совпадают при $n = 3$.

Все вычисления для обеих формул (5) и (12) проведены с двойной точностью.

2. Кубатурная формула, точная для всех многочленов, не выше пятой степени. При $n \geq 2$ число инвариантных многочленов группы $O_n G$, не выше пятой степени, равно четырем

$$1, \sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_4. \quad (15)$$

В качестве узлов искомой кубатурной формулы возьмем следующие две орбиты: $O_n G(a, 0, \dots, 0)$ и $O_n G(b, b, 0, \dots, 0)$.

Кубатурная формула запишется в виде

$$\int_{O_n} f(x) dx \simeq A \sum_1^{2n} f(a, 0, \dots, 0) + B \sum_1^{4C_n^2} f(b, b, 0, \dots, 0). \quad (16)$$

Число узлов $N = 2n^2$, $n \geq 2$.

ТАБЛИЦА 3

$n = 4$	$A = 0.994429007632 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.220581324688 \cdot 10^{-1}$ $C = 0.329627594156 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.524431252985 \cdot 10^{-1}$	$a = 0.712873514219$ $b = 0.354920731721$ $c = 0.434060799065$
$n = 5$	$A = 0.192315963882 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.560481827650 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.240248848879 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.155543760544 \cdot 10^{-1}$	$a = 0.697399022641$ $b = 0.335664532067$ $c = 0.306816580647$
$n = 6$	$A = 0.314282811292 \cdot 10^{-3}$ $B = 0.125662147602 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.822266067446 \cdot 10^{-4}$ $D = 0.445770376057 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.690971907733$ $b = 0.319477116059$ $c = 0.242450700029$
$n = 7$	$A = 0.433563873389 \cdot 10^{-4}$ $B = 0.251984792507 \cdot 10^{-3}$ $C = 0.188654480408 \cdot 10^{-4}$ $D = 0.120833605430 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.694168274776$ $b = 0.305674506894$ $c = 0.202080197561$
$n = 8$	$A = 0.498776452752 \cdot 10^{-5}$ $B = 0.456848638875 \cdot 10^{-4}$ $C = 0.331694811265 \cdot 10^{-5}$ $D = 0.303558644524 \cdot 10^{-3}$	$a = 0.709136604748$ $b = 0.293771648056$ $c = 0.173909708112$

Требование точности формулы (16) для инвариантных многочленов (15) приводит к нелинейной системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned}
 (1) : 2nA + 4C_n^2 B &= \frac{2^n}{n!}, \\
 (\sigma_2) : 2nAa^2 + 8C_n^2 Bb^2 &= \frac{n2^{n+1}}{(n+2)!}, \\
 (\sigma_2^2) : 2nAa^4 + 16C_n^2 Bb^4 &= \frac{n(n+5)2^{n+2}}{(n+4)!}, \\
 (\sigma_4) : 4C_n^2 Bb^4 &= \frac{n(n-1)2^{n+1}}{(n+4)!},
 \end{aligned} \tag{17}$$

Приведем полученное решение системы (17):

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(7-n)2^{n+1}}{a^4(n+4)!}, \quad B = \frac{2^n}{b^4(n+4)!}, \\
 a^2 &= \frac{2n(7-n)s_1 \pm 2s_2}{(4+14n+3n^2-n^3)s_1}, \quad b^2 = \frac{2n(n-1)s_1 \mp s_2}{(n-2)(2n^2+7n+7)s_1},
 \end{aligned}$$

где

$$s_1 = (n+3)(n+4), \quad s_2 = \sqrt{2n(n-1)(n^2+5n+10)(7-n)s_1}.$$

ТАБЛИЦА 4

$n = 4$	$A = 0.190523143325 \cdot 10^{-1}$ $B = 0.379306729600 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.265709827076 \cdot 10^{-1}$ $D = -0.192118641917 \cdot 10^{-2}$	$a = 0.639661414051$ $b = 0.475949710475$ $c = 0.208842983841$
$n = 5$	$A = 0.539010823231 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.100115282550 \cdot 10^{-2}$ $C = 0.541544958857 \cdot 10^{-2}$ $D = -0.574915510455 \cdot 10^{-3}$	$a = 0.587332873611$ $b = 0.447282919330$ $c = 0.182550611439$
$n = 6$	$A = 0.135091413168 \cdot 10^{-2}$ $B = 0.234942309989 \cdot 10^{-3}$ $C = 0.915577993491 \cdot 10^{-3}$ $D = -0.156108740372 \cdot 10^{-4}$	$a = 0.541887589886$ $b = 0.422487271476$ $c = 0.162246852155$
$n = 7$	$A = 0.303827492252 \cdot 10^{-3}$ $B = 0.496521973325 \cdot 10^{-4}$ $C = 0.132202937566 \cdot 10^{-3}$ $D = 0.504799208754 \cdot 10^{-4}$	$a = 0.501805901490$ $b = 0.400711552604$ $c = 0.146081345684$
$n = 8$	$A = 0.619661073449 \cdot 10^{-4}$ $B = 0.954856431114 \cdot 10^{-5}$ $C = 0.166544846216 \cdot 10^{-4}$ $D = 0.247613657125 \cdot 10^{-4}$	$a = 0.465967032962$ $b = 0.381342833589$ $c = 0.132900028123$

Здесь тоже получились две кубатурные формулы. Одна из них получается, когда в формулах для a^2 и b^2 возьмем верхний знак, а вторая – если возьмем нижний знак. Когда возьмем верхний знак, формула (16) существует при $n = 3(1)5$, все узлы входят в область интегрирования и коэффициенты A и B положительные. Когда возьмем нижний знак, формула (16) существует при $n = 3(1)6$ и коэффициенты A и B положительные. При $n = 3$ часть узлов выходит из области интегрирования, а при $n = 4(1)6$ все узлы входят в область интегрирования.

При $n = 3(1)6$ число узлов кубатурной формулы (16) превышает нижнюю границу из теоремы 9.1 из [1] соответственно на 4, 10, 18 и 28 единиц.

Отметим, что в [2, с. 305] приведена формула (5-2) для G_n , которая существует при $n = 2(1)6$ и имеет больше узлов, чем формула (16) при $n = 3(1)6$.

Технический университет (Варна, Болгария)

Поступило
15.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
- [2] Stroud A. H. Approximate calculation of multiple integrals. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [3] Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. матем. ж. 1962. Т. 3. № 4. С. 769–796.