Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Суц, О калибровочно-инвариантных дискретных моделях уравнений Янга–Миллса, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 742–754

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 08:50:06

УДК 517.958

О КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

В. Н. Суш

В пространстве $\mathbb{R}^n$ и для некоторой матричной группы Ли строятся две дискретные модели уравнений Янга–Миллса. Изучается калибровочно-инвариантная дискретная модель.

Библиография: 6 названий.

В работе строятся два дискретных аналога уравнений Янга–Миллса в пространстве $\mathbb{R}^n$ и для некоторой матричной группы Ли G . Опираясь на формализм, описанный в [1], определяется дискретный аналог оператора внешнего ковариантного дифференцирования d_A^c , с помощью которого конструируется модель, удовлетворяющая принципу калибровочной инвариантности. При задании более точного дискретного аналога оператора внешнего дифференцирования d рассматривается еще одна модель уравнений Янга–Миллса, которая формально совпадает с предыдущей, но уравнения не являются калибровочно-инвариантными. В работе [2] рассматривались двумерные модели классических уравнений Янга–Миллса с последующим переходом к дискретным аналогам, недостатком которых является пренебрежение к требованиям инвариантности. Предлагаемый подход, будучи близким к [2], дает возможность устранить этот недостаток.

Теорию Янга–Миллса в случае четной размерности исходного многообразия ($n = 4$) можно рассматривать как нелинейное обобщение теории Ходжа [3]. В статье устанавливается аналогичный факт для дискретных моделей.

1. Связность, кривизна и калибровочные преобразования. Пусть M – гладкое риманово многообразие. Рассмотрим над ним некоторое тривиальное расслоение $P = M \times G$, где G – матричная группа Ли. Вообще говоря, все утверждения, приведенные в этом пункте, имеют место в случае произвольного векторного расслоения P , но для построения дискретной модели мы используем только тривиальное расслоение. Поскольку и группа Ли G и многообразие M есть дифференцируемые структуры, то расслоение P является дифференцируемым многообразием. Следовательно, можно рассматривать над P касательное и кокасательное расслоения TP и T^*P .

Известно (см., например, [4, с. 176]), что связность определяется заданием некоторой 1-формы $\omega \in T^*P$, которая принимает значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Пусть (x, g) , $x \in M$, $g \in G$, – локальные координаты расслоения P , тогда ω имеет вид

$$\omega = g^{-1}dg + g^{-1}Ag, \quad (1)$$

где

$$A = \sum_{a, \mu} A_{\mu}^a(x) \lambda_a dx^{\mu}$$

и λ_a – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Дифференциальная 1-форма A , принимающая значения в алгебре $\mathfrak{g}$, называется *формой связности*, а функции $A_{\mu}^a(x)$ – *связностями*.

Рассмотрим некоторое преобразование координат расслоения P , относительно которого 1-форма ω инвариантна. Пусть при этом преобразовании $(x, g) \rightarrow (x', g')$. Будем рассматривать только такие преобразования, которые не меняют координатного накрытия многообразия, т.е. $x = x'$ и

$$g' = hg, \quad h \in G. \quad (2)$$

Инвариантность 1-формы ω означает, что

$$g^{-1}dg + g^{-1}Ag = (g')^{-1}dg' + (g')^{-1}A'g'. \quad (3)$$

Преобразование (2), которое удовлетворяет условию (3), индуцирует некоторый закон преобразования для формы связности A . Учитывая, что $dg' = dhg + hdg$ и $dhh^{-1} + hdh^{-1} = 0$, получаем

$$A' = hdh^{-1} + hAh^{-1}. \quad (4)$$

Преобразования вида (2), (4) называются *калибровочными преобразованиями*. Эти преобразования образуют группу послойных автоморфизмов главного расслоения P , которую называют *группой калибровочных преобразований*. Вообще говоря, эта группа является подгруппой группы G (см. [3, с. 51]).

Известно, что 2-форма F , которая имеет вид

$$F = dA + A \wedge A, \quad (5)$$

определяет форму кривизны связности A .

Калибровочное преобразование (4) порождает тензорный закон преобразования для кривизны $F' = hFh^{-1}$.

Рассмотрим уравнения

$$d_A F \equiv dF + A \wedge F - F \wedge A = 0, \quad (6)$$

$$d_A * F = f, \quad (7)$$

где d_A – ковариантная внешняя производная, а $'\ast'$ – операция метрического сопряжения (“звездочка” Ходжа). Действие оператора ковариантного внешнего дифференцирования d_A на произвольные матричнозначные r -формы Ω определяется (см. [4, с. 181]) по правилу

$$d_A \Omega = d\Omega + A \wedge \Omega + (-1)^{r+1} \Omega \wedge A. \quad (8)$$

Уравнение (6) – это так называемое *тождество Бьянки*. Оно получается непосредственной подстановкой формулы (5) в правую часть (6).

Пусть $G = SU(2)$ – группа унитарных матриц с определителем, равным 1. Тогда A и F принимают значения в алгебре косоэрмитовых матриц с нулевым следом, обозначаемой через $su(2)$. В этом случае уравнения (6), (7) называются *уравнениями Янга–Миллса* [3].

Отметим, что в последнее время уравнения (6), (7) называют уравнениями Янга–Миллса и в случае произвольной матричной группы G .

Скалярное произведение $\varphi \cdot \psi = -\operatorname{tr}(\varphi\psi)$, $\varphi, \psi \in su(2)$, вместе с римановой структурой на M позволяет определить [3, с. 55] инвариантное скалярное произведение r -форм ($r = 0, 1, \dots, n$), принимающих значения в алгебре Ли $su(2)$, следующим образом:

$$(\varphi, \psi) = -\operatorname{tr} \int_M \varphi \wedge * \psi.$$

Здесь tr – оператор взятия следа.

Пусть $f = 0$. Используя свойства операции $*$, нетрудно показать (см. [3, с. 56]), что оператор, формально сопряженный к оператору d_A , в случае четной размерности исходного многообразия M имеет вид $d_A^* = *^{-1} d_A *$, где $*^{-1}$ – операция обратная к $*$ ($*^{-1} * = 1$). Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$d_A^* F = 0. \quad (9)$$

В силу (6) получаем уравнение типа уравнения Лапласа

$$(d_A d_A^* + d_A^* d_A) F = 0. \quad (10)$$

Уравнения (6), (9), (10) объясняют, почему теорию Янга–Миллса можно рассматривать как нелинейное обобщение теории Ходжа. Действительно, заменяя нелинейный оператор d_A на оператор внешнего дифференцирования d , а F на обычную дифференциальную 2-форму, получаем уравнение для гармонических дифференциальных форм.

Заметим, что в случае, когда $G = U(1)$, уравнения (6), (9) превращаются в уравнения Максвелла. В самом деле, поскольку группа $U(1)$ абелева, то $A \wedge A = 0$ и $F = dA$. Следовательно, уравнения (6), (9) принимают вид $d^* F = 0$, $dF = 0$, где d^* – формально сопряженный к d оператор.

2. Комбинаторная модель n -мерного пространства. Рассмотрим дискретную модель пространства $\mathbb{R}^n$. Такая модель построена в [1, с. 149] и является тензорной степенью $C(n) = \bigotimes_1^n C$ одномерного комплекса (комбинаторной модели вещественной прямой). Одномерный комплекс C состоит из 0-мерных и 1-мерных цепей $C = C^0 \oplus C^1$.

Пусть сначала $n = 2$, т.е. $C(2)$ – комбинаторная модель плоскости. В этом случае базисные элементы комплекса $C(2)$ имеют вид

$$x_{k,s} = x_k \otimes x_s, \quad e_{k,s}^1 = e_k \otimes x_s, \quad V_{k,s} = e_k \otimes e_s, \quad e_{k,s}^2 = x_k \otimes e_s,$$

где x_k – базисные элементы 0-мерной цепи (точки), e_k – базисные элементы 1-мерной цепи (интервалы, соединяющие точки), $k, s \in \mathbb{Z}$. Граничный оператор ∂ определяется равенствами

$$\begin{aligned} \partial x_{k,s} &= 0, & \partial e_{k,s}^1 &= x_{\tau k, s} - x_{k, s}, & \partial e_{k,s}^2 &= x_{k, \tau s} - x_{k, s}, \\ \partial V_{k,s} &= e_{k,s}^1 + e_{\tau k, s}^2 - e_{k, s}^2 - e_{k, \tau s}^1, \end{aligned}$$

где $\tau k = k + 1$ – оператор сдвига (подробнее см. [1, с. 168]). На произвольные цепи оператор ∂ распространяется по линейности.

Введем дуальный к $C(2)$ объект – сопряженный комплекс $K(2)$. Сопряженный комплекс определяется как множество коцепей (форм) $K(2) = K^0 \oplus K^1 \oplus K^2$ с коэффициентами из некоторой алгебры $\mathfrak{g}$. В дальнейшем предполагается, что $\mathfrak{g} = su(2)$. Другими словами, $K(2)$ – линейное пространство с базисными элементами $x^{k,s}, e_1^{k,s}, e_2^{k,s}, V^{k,s}$ и с коэффициентами из алгебры $su(2)$. Следовательно, 0-, 1-, 2-формы $\varphi, \omega = (u, v), \eta$ представляются в виде

$$\varphi = \sum_{k,s} \varphi_{k,s} x^{k,s}, \quad \omega = \sum_{k,s} u_{k,s} e_1^{k,s} + v_{k,s} e_2^{k,s}, \quad \eta = \sum_{k,s} \eta_{k,s} V^{k,s},$$

где $\varphi_{k,s}, u_{k,s}, v_{k,s}, \eta_{k,s} \in su(2)$ для любых $k, s \in \mathbb{Z}$.

Как и в [2], операцию спаривания для произвольных базисных элементов $z \in C(2)$, $\tilde{y} \in K(2)$ определим по правилу

$$\langle z, a\tilde{y} \rangle = \begin{cases} 0, & z \neq y, \\ a, & z = y, a \in su(2). \end{cases} \quad (11)$$

На суммы операция (11) распространяется по линейности. Кограничный оператор d^c (дискретный аналог оператора внешнего дифференцирования) определяется равенством

$$\langle \partial z, a\tilde{y} \rangle = \langle z, ad^c \tilde{y} \rangle. \quad (12)$$

В $K(2)$ также вводятся дискретный аналог операции внешнего умножения ($\cup$ -умножение) и дискретный аналог операции метрического сопряжения $'*$ '. Формулы, определяющие эти операции для $K(2)$, выписаны в [5].

Пусть теперь $n = 3$. Комплекс $C(3)$ определим по правилу $C(3) = C(2) \otimes C$. При этом граничный оператор ∂ действует на базисные элементы комплекса $C(3)$ следующим образом:

$$\partial(z \otimes \varepsilon_{\mathcal{K}}) = \partial z \otimes \varepsilon_{\mathcal{K}} + (-1)^p z \otimes \partial \varepsilon_{\mathcal{K}}, \quad (13)$$

где z – базисный элемент $C(2)$ размерности p , а $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ есть либо $e_{\mathcal{K}}$, либо $x_{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K} \in \mathbb{Z}$. По линейности операция (13) распространяется на цепи.

Введем сопряженный комплекс $K(3) = K(2) \otimes K$, записывая при этом базисные элементы этого комплекса в виде $\tilde{z} \otimes \varepsilon^{\mathcal{K}}$, где $\tilde{z}$ – базисный элемент $K(2)$, а $\varepsilon^{\mathcal{K}}$ – базисный элемент одномерного комплекса, соответствующий элементу $\varepsilon_{\mathcal{K}}$. Как и в двумерном случае, формы $K(3)$ принимают значения в алгебре $su(2)$. Операции спаривания и дискретный аналог оператора внешнего дифференцирования в $K(3)$ определяются равенствами (11), (12) соответственно. По индукции вводится [1, с. 150] операция $\cup$ -умножения

$$(\tilde{z} \otimes \varepsilon^{\mathcal{K}}) \cup (\tilde{y} \otimes \varepsilon^{\mu}) = Q(\mathcal{K}, q)(\tilde{z} \cup \tilde{y}) \otimes (\varepsilon^{\mathcal{K}} \cup \varepsilon^{\mu}), \quad (14)$$

где $\tilde{z}, \tilde{y}$ – базисные элементы $K(2)$ размерности p, q соответственно, $Q(\mathcal{K}, q)$ – знаковая функция, принимающая значения -1 , если размерности обоих элементов $\varepsilon^{\mathcal{K}}, \tilde{y}$ нечетна, и $+1$ – в противоположном случае, $\mathcal{K}, \mu \in \mathbb{Z}$.

Для базисного элемента $\tilde{z} \in K(3)$, заданного в точке $(k, s, \mathcal{K})$, операция $'*$ ' определяется равенством

$$\tilde{z} \cup * \tilde{z} = V^{k,s} \otimes e^{\mathcal{K}}. \quad (15)$$

По индукции, предполагая, что определены комплекс $C(n-1)$ и сопряженный комплекс $K(n-1)$, определяются комплексы $C(n)$ и $K(n)$ с базисными элементами вида $z \otimes \varepsilon_{\mathcal{K}}$, $\tilde{z} \otimes \varepsilon^{\mathcal{K}}$, где z – базисный элемент $C(n-1)$, а $\tilde{z}$ – соответствующий ему элемент $K(n-1)$. При этом формулы (11)–(15) определяют соответствующие операции в $K(n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть φ, ψ – произвольные формы $K(n)$. Справедлива формула

$$d^c(\varphi \cup \psi) = d^c\varphi \cup \psi + Q(\varphi)\varphi \cup d^c\psi, \quad (16)$$

где $Q(\varphi) = (-1)^p$, p – размерность формы φ .

Доказательство утверждения в точности совпадает с доказательством аналогичного утверждения в случае, когда элементы комплекса $K(n)$ имеют вещественные коэффициенты (см. [1, с. 150]).

3. Дискретные модели уравнений Янга–Миллса. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, $G = SU(2)$. Используя комбинаторную модель пространства $\mathbb{R}^n$, описанную в предыдущем пункте, построим дискретный аналог уравнений (6), (7). Дискретный аналог 1-формы связности можно записать в виде

$$A = \sum_{(p)} A_{(p)} e^{(p)}, \quad (17)$$

где $e^{(p)}$ – 1-мерный базисный элемент комплекса $K(n)$, $A_{(p)} \in su(2)$. Структура индекса (p) достаточно сложна. В (p) содержится информация о координате “точки”, к которой прикреплены 1-мерные базисные элементы, и номер компоненты, количество которых зависит от размерности n (совпадает с количеством компонент соответствующей дифференциальной формы). Сумма в (17) берется по всем 1-мерным базисным элементам комплекса $K(n)$. В дальнейшем при записи сумм вида (17) предполагается, что лишь конечное число членов отлично от нуля.

Введем в рассмотрение дискретный аналог группы калибровочных преобразований как дискретные 0-формы с коэффициентами из группы $SU(2)$

$$h = \sum_{(p)} h_{(p)} x^{(p)}, \quad (18)$$

где $h_{(p)} \in SU(2)$, $x^{(p)}$ – 0-мерные базисные элементы комплекса $K(n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коцепи с базисными элементами комплекса $K(n)$ и с коэффициентами из группы $SU(2)$ не образуют комплекса, поскольку, вообще говоря, для любых форм h^1, h^2 вида (18) с коэффициентами $h_{(p)}^1, h_{(p)}^2 \in SU(2)$ соответственно коэффициенты формы $h^1 + h^2$ $h_{(p)}^1 + h_{(p)}^2 \notin SU(2)$. Аналогичную ситуацию имеем и для r -форм, $r = 1, 2, \dots, n$. Но (18) можно рассматривать как 0-форму, принадлежащую комплексу $K(n)$, коэффициенты коцепей которого являются матрицами размера 2×2 . Следовательно, для этого комплекса (обозначим его $\tilde{K}(n)$) имеют место определения (11)–(15). Очевидно, что $K(n)$ является подкомплексом комплекса $\tilde{K}(n)$.

Пусть 0-форма g с коэффициентами из группы $SU(2)$ преобразуется по закону

$$g' = h \cup g. \quad (19)$$

Рассмотрим преобразование 1-формы связности (17) вида

$$A' = h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}. \quad (20)$$

Здесь h^{-1} – 0-форма вида (18), коэффициенты которой являются обратными к коэффициентам формы h , т.е.

$$h \cup h^{-1} = h^{-1} \cup h = e, \quad (21)$$

где e – 0-форма вида (18), все коэффициенты которой являются единичными элементами группы $SU(2)$.

Введем 1-форму ω (дискретный аналог дифференциальной 1-формы (1))

$$\omega = g^{-1} \cup d^c g + g^{-1} \cup A \cup g. \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 1. *При преобразованиях вида (19), (20) 1-форма (22) инвариантна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в континуальном случае, инвариантность 1-формы (22) означает, что $\omega' = \omega$, т.е.

$$(g')^{-1} \cup d^c g' + (g')^{-1} \cup A' \cup g' = g^{-1} \cup d^c g + g^{-1} \cup A \cup g.$$

Учитывая (19) и определение операции $\cup$ -умножения, имеем

$$(g')^{-1} = (h \cup g)^{-1} = \sum_{(p)} (h_{(p)} g_{(p)})^{-1} x^{(p)} = \sum_{(p)} g_{(p)}^{-1} h_{(p)}^{-1} x^{(p)} = g^{-1} \cup h^{-1}.$$

Тогда, используя (16), получаем

$$\begin{aligned} \omega' &= g^{-1} \cup h^{-1} \cup d^c (h \cup g) + g^{-1} \cup h^{-1} \cup (h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \cup h \cup g \\ &= g^{-1} \cup h^{-1} \cup (d^c h \cup g + h \cup d^c g) + g^{-1} \cup e \cup d^c h^{-1} \cup h \cup g + g^{-1} \cup e \cup A \cup e \cup g \\ &= g^{-1} \cup h^{-1} \cup d^c h \cup g + g^{-1} \cup d^c g + g^{-1} \cup d^c h^{-1} \cup h \cup g + g^{-1} \cup A \cup g. \end{aligned}$$

Поскольку $d^c e = 0$, то согласно (21) имеем

$$d^c h^{-1} \cup h + h^{-1} \cup d^c h = 0. \quad (23)$$

Отсюда $g^{-1} \cup h^{-1} \cup d^c h \cup g = -g^{-1} \cup d^c h^{-1} \cup h \cup g$. Следовательно,

$$\omega' = g^{-1} \cup d^c g + g^{-1} \cup A \cup g.$$

Теорема доказана.

Теорема 1 дает все основания для того, чтобы по аналогии с континуальным случаем преобразования вида (19), (20) называть калибровочными преобразованиями для дискретной модели.

Рассмотрим 2-форму F вида

$$F = \sum_{(p)} F_{(p)} V^{(p)},$$

где $F_{(p)} \in su(2)$, а $V^{(p)}$ – 2-мерные базисные элементы комплекса $K(n)$. Пусть F определяется равенством

$$F = d^c A + A \cup A \quad (24)$$

(дискретный аналог формы кривизны (5)).

ТЕОРЕМА 2. При калибровочных преобразованиях (19), (20) 2-форма кривизны F вида (24) преобразуется следующим образом:

$$F' = h \cup F \cup h^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, учитывая (16), (21), (23), имеем

$$\begin{aligned} F' &= d^c A' + A' \cup A' \\ &= d^c (h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \\ &\quad + (h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \cup (h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \\ &= d^c h \cup d^c h^{-1} + d^c h \cup A \cup h^{-1} + h \cup d^c A \cup h^{-1} - h \cup A \cup d^c h^{-1} \\ &\quad + h \cup d^c h^{-1} \cup h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup e \cup d^c h^{-1} \\ &\quad + h \cup d^c h^{-1} \cup h \cup A \cup h^{-1} + h \cup A \cup e \cup A \cup h^{-1} \\ &= d^c h \cup d^c h^{-1} + d^c h \cup A \cup h^{-1} + h \cup d^c A \cup h^{-1} - h \cup A \cup d^c h^{-1} \\ &\quad - d^c h \cup d^c h^{-1} + h \cup A \cup d^c h^{-1} - d^c h \cup A \cup h^{-1} + h \cup A \cup A \cup h^{-1} \\ &= h \cup (d^c A + A \cup A) \cup h^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

По аналогии с континуальным случаем, см. [6, с. 394], связность A называется *тривиальной*, если существует такая 0-форма h_0 вида (18), что $A = -d^c h_0 \cup h_0^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Форма кривизны тривиальной связности равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} F &= d^c (-d^c h_0 \cup h_0^{-1}) + (-d^c h_0 \cup h_0^{-1}) \cup (-d^c h_0 \cup h_0^{-1}) \\ &= d^c h_0 \cup d^c h_0^{-1} + d^c h_0 \cup h_0^{-1} \cup d^c h_0 \cup h_0^{-1}. \end{aligned}$$

В силу равенства (23)

$$d^c h_0 \cup h_0^{-1} \cup d^c h_0 \cup h_0^{-1} = -d^c h_0 \cup h_0^{-1} \cup h_0 \cup d^c h_0^{-1} = -d^c h_0 \cup d^c h_0^{-1}.$$

Следовательно, $F = 0$.

Для формы кривизны F имеет место тождество

$$d^c F + A \cup F - F \cup A = 0. \quad (25)$$

Оно проверяется непосредственно, подставляя $F = d^c A + A \cup A$. Сравнивая (25) с (6), получаем дискретный аналог тождества Бьянки. Определим дискретный аналог оператора внешнего ковариантного дифференцирования (8) по правилу

$$d_A^c \Omega = d^c \Omega + A \cup \Omega + (-1)^{r+1} \Omega \cup A,$$

где Ω — r -форма вида (17). Тогда левую часть тождества (25) можно записать в виде $d_A^c F$, а дискретный аналог уравнения Янга–Миллса (7) имеет вид

$$d_A^c * F \equiv d^c * F + A \cup *F + (-1)^{n-1} * F \cup A = f, \quad (26)$$

где операция $*$ определяется равенством (15) и 2-форме F ставит в соответствие форму $*F$ порядка $n - 2$. Заметим, что $f \in K(n)$ — форма порядка $n - 1$.

ЛЕММА. Пусть h – дискретная 0-форма. Тогда для произвольной r -формы f справедливы равенства

$$*(f \cup h) = *f \cup h, \quad *(h \cup f) = h \cup *f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как h – 0-форма, то ее можно записать в виде

$$h = \sum_{\mathcal{x}} h_{\mathcal{x}} x^{\mathcal{x}},$$

где $\mathcal{x} = (\mathcal{x}_1, \mathcal{x}_2, \dots, \mathcal{x}_n)$ – координаты “точки”, соответствующие нульмерному базисному элементу $x^{\mathcal{x}} = x^{\mathcal{x}_1} \otimes x^{\mathcal{x}_2} \otimes \dots \otimes x^{\mathcal{x}_n}$, $\mathcal{x}_i \in \mathbb{Z}$. Учитывая структуру индекса (p) , для r -формы f имеем

$$f = \sum_{(p)} f_{(p)} z^{(p)} = \sum_{\mathcal{x}} \sum_p f_{\mathcal{x}}^p z_p^{\mathcal{x}},$$

где $z_p^{\mathcal{x}}$ – r -мерный базисный элемент комплекса $K(n)$, p – номер “компоненты” формы, $p = 0, 1, \dots$ (число компонент зависит от размерности n и порядка формы r). Следовательно, по определению $\cup$ -умножения (в двумерном случае см. [5]) и, учитывая то, что для любого p

$$\sum_{\mathcal{x}} h_{\mathcal{x}} x^{\mathcal{x}} = \sum_{\mathcal{x}} h_{\tau_p \mathcal{x}} x^{\tau_p \mathcal{x}},$$

имеем

$$\begin{aligned} *(f \cup h) &= * \left(\sum_{\mathcal{x}} \sum_p f_{\mathcal{x}}^p z_p^{\mathcal{x}} \cup \sum_{\mathcal{x}} h_{\mathcal{x}} x^{\mathcal{x}} \right) = * \left(\sum_{\mathcal{x}} \sum_p f_{\mathcal{x}}^p h_{\tau_p \mathcal{x}} z_p^{\mathcal{x}} \right) \\ &= \sum_{\mathcal{x}} \sum_p f_{\mathcal{x}}^p h_{\tau_p \mathcal{x}} * z_p^{\mathcal{x}} = \sum_p \left(\sum_{\mathcal{x}} f_{\mathcal{x}}^p * z_p^{\mathcal{x}} \cup \sum_{\mathcal{x}} h_{\tau_p \mathcal{x}} x^{\tau_p \mathcal{x}} \right) \\ &= \sum_p \sum_{\mathcal{x}} f_{\mathcal{x}}^p * z_p^{\mathcal{x}} \cup h = *f \cup h. \end{aligned}$$

Целочисленный вектор $\tau_p \mathcal{x}$ получается из $\mathcal{x}$ действием оператора сдвига τ на r компонент этого вектора, размещение которых зависит от номера p .

Поскольку

$$h \cup f = \sum_p \sum_{\mathcal{x}} h_{\mathcal{x}} f_{\mathcal{x}}^p z_p^{\mathcal{x}},$$

то доказательство второго равенства очевидно.

Отметим, что коэффициенты форм h и f могут быть произвольными (либо из $SU(2)$, либо из $su(2)$).

ТЕОРЕМА 4. Однородное уравнение Янга–Миллса (26) ($f = 0$) калибровочно инвариантно.

Здесь калибровочная инвариантность понимается в смысле: если $A(F)$ – решение уравнения (26), то и A' (соответственно F') – решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы следует, что $*F' = h \cup *F \cup h^{-1}$. Тогда, используя (16), имеем

$$d^c * F' = d^c h \cup *F \cup h^{-1} + h \cup d^c * F \cup h^{-1} + (-1)^{n-2} h \cup *F \cup d^c h^{-1}$$

и, учитывая (23),

$$\begin{aligned} A' \cup *F' + (-1)^{n-1} * F' \cup A' \\ = h \cup d^c h^{-1} \cup h \cup *F \cup h^{-1} + h \cup A \cup *F \cup h^{-1} \\ + (-1)^{n-1} h \cup *F \cup d^c h^{-1} + (-1)^{n-1} h \cup *F \cup A \cup h^{-1} \\ = -d^c h \cup *F \cup h^{-1} + h \cup A \cup *F \cup h^{-1} \\ - (-1)^{n-2} h \cup *F \cup d^c h^{-1} + (-1)^{n-1} h \cup *F \cup A \cup h^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $d_{A'}^c * F' = h \cup d_A^c * F \cup h^{-1}$. Теорема доказана.

Недостатком описанной выше дискретной модели является то, что коэффициенты форм вида $d^c h \in \tilde{K}(n)$ не содержатся в алгебре $su(2)$. (В континуальном случае dh — форма со значениями в $su(2)$). Чтобы устранить этот недостаток, рассмотрим еще одну дискретную модель.

Определим оператор $\tilde{d}$ как композицию дискретного аналога оператора внешнего дифференцирования d^c (кограничный оператор на коцепях с коэффициентами из $su(2)$) и обычного континуального оператора внешнего дифференцирования d , действующего на коэффициенты формы (18). Следовательно, на 0-формы h вида (18) оператор $\tilde{d}$ действует следующим образом:

$$\tilde{d}h = d^c \sum_{(p)} dh_{(p)} x^{(p)}, \quad (27)$$

где оператор d^c определяется формулой (12). На формы с коэффициентами из алгебры $su(2)$ оператор $\tilde{d}$ действует как оператор d^c . Для 1-форм вида (17) имеем

$$\tilde{d}A = d^c A. \quad (28)$$

Например, если $n = 2$, то формы h и A имеют соответственно вид

$$h = \sum_{k,s} h_{k,s} x^{k,s}, \quad A = \sum_{k,s} A_{k,s}^1 e_1^{k,s} + A_{k,s}^2 e_2^{k,s},$$

где $k, s \in \mathbb{Z}$, $h_{k,s} \in SU(2)$, $A_{k,s}^1, A_{k,s}^2 \in su(2)$. В этом случае формулы (27), (28) записутся

$$\begin{aligned} \tilde{d}h &= \sum_{k,s} (dh_{\tau k,s} - dh_{k,s}) e_1^{k,s} + (dh_{k,\tau s} - dh_{k,s}) e_2^{k,s}, \\ \tilde{d}A &= \sum_{k,s} (A_{\tau k,s}^1 - A_{k,s}^1) e_1^{k,s} + (A_{k,\tau s}^2 - A_{k,s}^2) e_2^{k,s}. \end{aligned}$$

Заметим, что в формуле (27) операторы d^c и d не коммутируют и, в отличие от предыдущей дискретной модели, d^c действует только на коцепи из $K(n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Оператор $\tilde{d}$ имеет следующие свойства:

$$\tilde{d}\tilde{d} = 0, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \cup g) &= \tilde{d}h \cup g + h \cup \tilde{d}g, \\ \tilde{d}(h \cup A) &= \tilde{d}h \cup A + dh \cup \tilde{d}A, \\ \tilde{d}(A \cup A') &= \tilde{d}A \cup A' - A \cup \tilde{d}A', \end{aligned} \quad (30)$$

где h, g – 0-формы вида (18), A, A' – 1-формы вида (17), а dh – 0-форма вида (18) с коэффициентами $dh_{(p)} \in su(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство (29) непосредственно следует из свойства оператора d^c , для которого $d^c d^c = 0$.

По определению оператора $\tilde{d}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{d}(h \cup g) &= d^c \left(d \sum_{(p)} h_{(p)} g_{(p)} x^{(p)} \right) = d^c \sum_{(p)} (dh_{(p)} g_{(p)} + h_{(p)} dg_{(p)}) x^{(p)} \\ &= d^c (dh \cup g + h \cup dg) = \tilde{d}h \cup g + h \cup \tilde{d}g. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, поскольку оператор d^c действует только на формы с коэффициентами из алгебры $su(2)$.

Используя утверждение 1, получаем

$$\tilde{d}(h \cup A) = d^c(dh \cup A) = d^c dh \cup A + dh \cup d^c A = \tilde{d}h \cup A + dh \cup \tilde{d}A.$$

Формула (30) следует из равенства (28) и формулы (16).

Пусть 1-форма связности A преобразуется по закону

$$A' = h \cup \tilde{d}h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}. \quad (31)$$

Заметим, что в силу определения (27) $\tilde{d}h^{-1}$ – 1-форма с коэффициентами из $su(2)$. Тогда, используя свойства оператора $\tilde{d}$, нетрудно показать, что при преобразованиях (19), (31) 1-форма ω вида (22), в которой оператор d^c заменен на $\tilde{d}$, инвариантна (т.е. справедлива теорема 1). В случае оператора $\tilde{d}$ справедлива также теорема 3. При замене d^c на $\tilde{d}$ доказательства полностью совпадают.

По определению операторы $\tilde{d}$ и d^c в уравнениях (24)–(26) совпадают. Следовательно, с формальной точки зрения дискретная модель уравнений Янга–Миллса с оператором $\tilde{d}$ совпадает с рассмотренной выше калибровочно-инвариантной моделью.

Для удобства введем обозначения $F_1 \equiv \tilde{d}A$, $F_2 \equiv A \cup A$.

ТЕОРЕМА 5. При калибровочных преобразованиях (19), (31) 2-форма кривизны $F = F_1 + F_2$ преобразуется следующим образом:

$$F' = dh \cup F_1 \cup h^{-1} + h \cup F_1 \cup dh^{-1} + h \cup F_2 \cup h^{-1}. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждение 2, получаем

$$\begin{aligned} F'_1 &\equiv \tilde{d}A' = \tilde{d}(h \cup \tilde{d}h^{-1}) + \tilde{d}(h \cup A \cup h^{-1}) \\ &= \tilde{d}h \cup \tilde{d}h^{-1} + d^c(dh \cup A \cup h^{-1} + h \cup A \cup dh^{-1}) \\ &= \tilde{d}h \cup \tilde{d}h^{-1} + \tilde{d}h \cup A \cup h^{-1} + dh \cup \tilde{d}A \cup h^{-1} + h \cup \tilde{d}A \cup dh^{-1} - h \cup A \cup \tilde{d}h^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку нетрудно показать, что равенство (23) имеет место и для оператора $\tilde{d}$, следовательно,

$$\begin{aligned} F'_2 &\equiv A' \cup A' = (h \cup \tilde{d}h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \cup (h \cup \tilde{d}h^{-1} + h \cup A \cup h^{-1}) \\ &= -\tilde{d}h \cup h^{-1} - \tilde{d}h \cup A \cup h^{-1} + h \cup A \cup \tilde{d}h^{-1} + h \cup A \cup A \cup h^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F' &= F'_1 + F'_2 = dh \cup \tilde{d}A \cup h^{-1} + h \cup \tilde{d}A \cup dh^{-1} + h \cup A \cup A \cup h^{-1} \\ &= dh \cup F_1 \cup h^{-1} + h \cup F_1 \cup dh^{-1} + h \cup F_2 \cup h^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Закон преобразования формы кривизны (32) показывает, что при калибровочных преобразованиях (19), (31) теорема 4, вообще говоря, не имеет места.

4. Дискретная модель уравнения (10). Пусть

$$V = \sum_{\varkappa} V_{\varkappa} \subset C(n), \quad (33)$$

где $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$, $\varkappa_i = 0, 1, 2, \dots, N_i$, есть некоторая фиксированная область – конечная совокупность n -мерных элементов комплекса $C(n)$. Определим скалярное произведение для матричнозначных форм одинаковой степени $A, B \in K(n)$ формулой

$$(A, B)_V = -\text{tr}\langle V, A \cup *B \rangle.$$

Учитывая (33) и определения операций $\cup$ -умножения и $*$, получаем

$$(A, B)_V = - \sum_{(p)} \text{tr}(A_{(p)} B_{(p)}), \quad A_{(p)}, B_{(p)} \in su(2).$$

Легко показать, что все аксиомы скалярного произведения выполняются. Напомним, что $\text{tr}(A_{(p)} B_{(p)}) = \text{tr}(B_{(p)} A_{(p)})$.

Поскольку в уравнениях (25), (26) $d_A^c = \tilde{d}_A$, то все рассуждения этого пункта имеют место для обеих дискретных моделей.

Построим оператор $\tilde{d}_A^*$, формально сопряженный к оператору $\tilde{d}_A$. К сожалению, используемое для построения сопряженного оператора d_A^* в континуальном случае равенство

$$\text{tr}(\omega \wedge \eta) = (-1)^{rp} \text{tr}(\eta \wedge \omega),$$

где ω, η – матричнозначные дифференциальные формы порядка r и p соответственно, не имеет непосредственного аналога в нашем формализме.

Пусть r -форма $A \in K(n)$ и $(n-r)$ -форма $B \in K(n)$ удовлетворяют “граничным” условиям вида

$$A|_{(\partial V)_r} = 0, \quad B|_{(\partial V)_{n-r}} = 0, \quad (34)$$

где $(\partial V)_r, (\partial V)_{n-r}$ – совокупность “граничных” элементов соответствующей размерности области V .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для форм $A, B \in K(n)$, удовлетворяющих условиям (34), справедливо тождество

$$\mathrm{tr}\langle V, A \cup B \rangle = \mathrm{tr}\langle V, B \cup **A \rangle. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство в случае $n = 2$. Пусть сначала A, B – 1-формы, т.е.

$$A = \sum_{k,s} A_{k,s}^1 e_1^{k,s} + A_{k,s}^2 e_2^{k,s}, \quad B = \sum_{k,s} B_{k,s}^1 e_1^{k,s} + B_{k,s}^2 e_2^{k,s},$$

$$A_{k,s}^1, A_{k,s}^2, B_{k,s}^1, B_{k,s}^2 \in su(2).$$

В этом случае область V (33) имеет вид

$$V = \sum_{k,s} V_{k,s}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots, M,$$

и условия (34) запишутся следующим образом:

$$A_{0,s}^i = A_{\tau N,s}^i = B_{0,s}^i = B_{\tau N,s}^i = 0, \quad A_{k,0}^i = A_{k,\tau M}^i = B_{k,0}^i = B_{k,\tau M}^i = 0 \quad (36)$$

при всех $k = 0, 1, \dots, N, s = 0, 1, \dots, M, i = 1, 2$.

Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\langle V, A \cup B \rangle &= \left\langle V, \sum_{k,s} \mathrm{tr}(A_{k,s}^1 B_{\tau k,s}^2 - A_{k,s}^2 B_{k,\tau s}^1) V^{k,s} \right\rangle \\ &= \left\langle V, \sum_{k,s} [\mathrm{tr}(B_{\tau k,s}^2 A_{k,s}^1) - \mathrm{tr}(B_{k,\tau s}^1 A_{k,s}^2)] V^{k,s} \right\rangle \\ &= \sum_{k,s} \mathrm{tr}(B_{\tau k,s}^2 A_{k,s}^1 - B_{k,\tau s}^1 A_{k,s}^2) \\ &= \left\langle V, \sum_{k,s} \mathrm{tr}(B_{\tau k,s}^2 A_{k,s}^1) V^{\tau k,s} \right\rangle - \left\langle V, \sum_{k,s} \mathrm{tr}(B_{k,\tau s}^1 A_{k,s}^2) V^{k,\tau s} \right\rangle. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место в силу условий (36).

С другой стороны, поскольку

$$**A = - \sum_{k,s} (A_{k,s}^1 e_1^{\tau k, \tau s} + A_{k,s}^2 e_2^{\tau k, \tau s}),$$

то

$$\mathrm{tr}\langle V, B \cup **A \rangle = - \left\langle V, \sum_{k,s} \mathrm{tr}(B_{k,\tau s}^1 A_{k,s}^2) V^{k,\tau s} \right\rangle + \left\langle V, \sum_{k,s} \mathrm{tr}(B_{\tau k,s}^2 A_{k,s}^1) V^{\tau k,s} \right\rangle.$$

Следовательно, получаем тождество (35).

Проверка тождества (35) для 0-формы A и 2-формы B проводится аналогично.

Доказательство утверждения в случае произвольного n с помощью правила (15) проводится по аналогичной схеме, но технически затруднительно.

Заметим, что в отличие от континуального случая, где операция $*$ – либо инволюция, либо антиинволюция: $** = \pm 1$, в дискретном случае операция $**$ эквивалентна сдвигу с соответствующим знаком.

Формально сопряженный к $\tilde{d}_A$ оператор, как и в континуальном случае, определяется соотношением $(\tilde{d}_A B, F)_V = (B, \tilde{d}_A^* F)_V$ при условии обращения в нуль форм B, F на границе области V .

Пусть B – 1-форма вида (17), F – 2-форма и B, F удовлетворяют на границе области V условиям вида (34). Поскольку действие оператора $\tilde{d}_A$ на 1-форму B задается по правилу

$$\tilde{d}_A B = \tilde{d}B + A \cup B + B \cup A,$$

то имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{d}_A B, F)_V &= -\text{tr}\langle V, \tilde{d}_A B \cup *F \rangle \\ &= -\text{tr}\langle V, \tilde{d}B \cup *F \rangle - \text{tr}\langle V, A \cup B \cup *F \rangle - \text{tr}\langle V, B \cup A \cup *F \rangle \\ &= (B, *^{-1} \tilde{d} * F)_V - \text{tr}\langle V, B \cup *F \cup **A \rangle - \text{tr}\langle V, B \cup **^{-1}(A \cup *F) \rangle \\ &= (B, *^{-1} \tilde{d} * F + *^{-1}(*F \cup **A) + *^{-1}(A \cup *F))_V, \end{aligned}$$

где $**^{-1} = 1$. Таким образом,

$$\tilde{d}_A^* F = *^{-1} \tilde{d} * F + *^{-1}(*F \cup **A) + *^{-1}(A \cup *F).$$

Теперь предположим, что n четное. Тогда однородное уравнение Янга–Миллса (7) можно переписать в виде

$$d * F + A \wedge *F + *F \wedge **A = 0, \quad (37)$$

поскольку для дифференциальной 1-формы связности A имеем $**A = (-1)^{n-1}A$. Следовательно, записывая дискретный аналог уравнения (37) (или (7)) в виде

$$\tilde{d}_A * F \equiv \tilde{d} * F + A \cup *F + *F \cup **A = 0, \quad (38)$$

получаем $\tilde{d}_A^* F = *^{-1} \tilde{d} * F$. Таким образом, если 2-форма F удовлетворяет уравнению (38), то мы получаем уравнение $(\tilde{d}_A \tilde{d}_A^* + \tilde{d}_A^* \tilde{d}_A)F = 0$, которое можно считать дискретным аналогом уравнения типа уравнения Лапласа (10).

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Пидстригача НАН Украины

Поступило
09.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дезин А. А. Многомерный анализ и дискретные модели. М.: Наука, 1990.
- [2] Дезин А. А. Модели, порожденные уравнениями Янга–Миллса // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 5. С. 846–851.
- [3] Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. М.: Мир, 1988.
- [4] Nash С., Sen S. Topology and geometry for physicists. London: Acad. Press, 1989.
- [5] Суш В. Н. Дискретный аналог интеграла Коши // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1433–1441.
- [6] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.