Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Тютянов, О существовании разрешимых нормальных подгрупп в конечных группах, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 755–758

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:17:59

УДК 512.54

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАЗРЕШИМЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В. Н. Тютянов

Рассматривается строение конечной группы в зависимости от строения подгрупп, порожденных элементами классов сопряженности.

Библиография: 5 названий.

Строение конечной группы существенно зависит от строения подгрупп, порожденных ее элементами класса сопряженности. Примером этого является хорошо известная теорема Бэра [1, теорема 2.66]. Изучая конечные группы порожденные сопряженным классом 3-транспозиций, Б. Фишер [1, 2.8] открыл три новые спорадические группы. Настоящая работа примыкает к данной тематике. В ней получены результаты, дополняющие теорему Бэра.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – конечная p -разрешимая группа для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $\langle x, x^g \rangle$ – группа нечетного порядка для всех $g \in G$ и некоторого p -элемента $x \in G$, то $x \in O(G)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – конечная группа, силовские p -подгруппы которой абелевы для некоторого $p \in \pi(G)$. Пусть $1 \neq x \in G$, $1 \neq y \in G$. Если $\langle x^g, y^h \rangle$ – p -группа для всех $g, h \in G$ и $\langle x^G \rangle = \langle y^G \rangle$, то $\langle x, y \rangle \subseteq O_p(G)$.

Все рассматриваемые группы конечны. Обозначения, в основном, стандартны. Если $x_1, \dots, x_n$ – элементы группы G , то $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – группа порожденная этими элементами; $\langle x^G \rangle = \langle x^g \mid g \in G \rangle$ – нормальное замыкание элемента x в группе G ; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G .

1. Доказательство теоремы 1. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 1. Без ограничения общности можно считать, что $|x| = p$ – простое число.

$$(1) O(G) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O(G) \neq 1$. Обозначим $\overline{G} = G/O(G)$. Так как $x \notin O(G)$, то $xO(G) = \bar{x} \neq 1$. Поскольку G является минимальным контрпримером к теореме 1, то $\bar{x} \in O(\overline{G})$, а значит, $x \in O(G)$. Противоречие.

$$(2) O_2(G) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O_2(G) \neq 1$. Рассмотрим в группе G подгруппу $O_2(G)\langle x \rangle$. Если $G = O_2(G)\langle x \rangle$, то так как $\langle x, x^g \rangle$ – группа нечетного порядка для любого $g \in G$, то $\langle x, x^g \rangle = \langle x \rangle (\langle x, x^g \rangle \cap O_2(G)) = \langle x \rangle$. Теперь ясно, что $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ и $x \in O(G)$. Противоречие.

Значит, $O_2(G)\langle x \rangle \neq G$ и $x \in O(O_2(G)\langle x \rangle)$. Поэтому $O_2(G)\langle x \rangle = O_2(G) \times \langle x \rangle$, а следовательно, $x \in C_G(O_2(G)) \trianglelefteq G$.

(a) $C_G(O_2(G)) \neq G$.

В этом случае $x \in O(C_G(O_2(G)))$. Поскольку $O(C_G(O_2(G))) \subseteq O(G)$, то $x \in O(G)$. Последнее невозможно.

(b) $C_G(O_2(G)) = G$.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/O_2(G)$. Тогда $\bar{x} \in O(\overline{G})$. Теперь рассмотрим полный прообраз L группы $O(\overline{G})$ в G . Поскольку $O(L) \subseteq O(G)$, то согласно (1) $O(L) = 1$. Однако, $O(L) \neq 1$. Противоречие.

(3) *Группа $G = N \rtimes \langle x \rangle$, где N – простая неабелева группа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку G – p -разрешимая группа, то G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Как следует из (1) и (2), $N = N_1 \times \dots \times N_f$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Поскольку G – p -разрешимая группа, то порядки ее неабелевых факторов не делятся на p . Отсюда $x \notin N$. Рассмотрим группу $N\langle x \rangle$.

(a) $N\langle x \rangle \neq G$.

В этом случае $x \in O(N\langle x \rangle)$ и $O(N\langle x \rangle) = \langle x \rangle (N \cap O(N\langle x \rangle))$. Но $N \cap O(N\langle x \rangle) = 1$, поэтому $O(N\langle x \rangle) = \langle x \rangle$. Теперь видно, что $x \in C_G(N)$. Если $C_G(N) \neq G$, то $x \in O(C_G(N))$, а значит, $x \in O(C_G(N)) \subseteq O(G) = 1$. Противоречие. Таким образом, $C_G(N) = G$. Так как N – неабелева группа, то это невозможно.

(b) $N\langle x \rangle = G$.

В этом случае $G = N \rtimes \langle x \rangle$. Группа $\langle x \rangle$ действует транзитивно на множестве $\{N_1, \dots, N_f\}$. Значит, $f = p$, или $f = 1$. Пусть сначала $f = p$.

Поскольку группа $\langle x \rangle$ действует транзитивно на $\{N_1, \dots, N_p\}$, то при подходящей нумерации получим $N_{i+1} = N_1^{x^i}$, где $i = 0, 1, \dots, p-1$. Значит, $N = N_1 \times N_1^x \times \dots \times N_1^{x^{p-1}}$. Пусть теперь t_1 инволюция из N_1 . Группа $\langle x, x^{t_1} \rangle$ – нечетного порядка. Рассмотрим элемент $x^{-1}x^{t_1} \in \langle x, x^{t_1} \rangle$. Очевидно, $1 \neq (x^{-1}t_1x)t_1 \in N_1^x \times N_1$ является инволюцией, что невозможно, так как порядок $\langle x, x^{t_1} \rangle$ – нечетное число. Значит, $f = 1$, что доказывает (3).

(4) *Минимального контрпримера к теореме 1 не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3) $G = N \rtimes \langle x \rangle$, где N – простая неабелева группа и $(|N|, |x|) = 1$. Поэтому $\langle x \rangle$ нормализует некоторую силовскую 2-подгруппу S из N . Поскольку G – минимальный контрпример к теореме 1, то $\langle x \rangle$ централизует подгруппу S . Согласно результату С. А. Сыскина (см. [2, теорема 2]) группа N изоморфна группе лиева типа нечетной характеристики. Так как порядок группы диагональных автоморфизмов группы лиева типа всегда делит ее порядок (см. таблицу в [3, с. 46]), то $x \notin \text{Inndiag}(N)$. Согласно [4, лемма 7.3] возможна одна из следующих ситуаций.

1) $|x| = 3$, $N \cong D_4(3^n)$ и x либо автоморфизм графа, либо графо-полевой автоморфизм.

Этот случай невозможен, поскольку $(|x|, |N|) = 1$.

2) $|x| = 3$, $N \cong {}^3D_4(3^n)$ и x – автоморфизм графа.

Этот случай невозможен, поскольку $(|x|, |N|) = 1$.

3) x – полевой автоморфизм.

Пусть $\text{GF}(q^m)$ – конечное поле характеристики q , над которым определена группа лиева типа N . В этом случае найдется $\gamma \in \text{Aut}(\text{GF}(q^m))$ такой, что отображение корневых подгрупп $X_\varepsilon(t) \rightarrow X_\varepsilon(t^\gamma)$ (для всех $\varepsilon \in \Sigma$ – система положительных корней) продолжается до полевого автоморфизма x группы N . Поэтому x нормализует каждую корневую подгруппу $X_{\pm\varepsilon}$, где $\varepsilon \in \Sigma$.

Если $N \not\cong \text{PSL}_2(q^m)$, то так как G – минимальный контрпример к теореме 1, x будет централизовать группу $\langle X_\varepsilon, X_{-\varepsilon} \rangle$ для всех $\varepsilon \in \Sigma$. Таким образом, $[x, X_{\pm\varepsilon}] = 1$ для всех $\varepsilon \in \Sigma$. Отсюда следует, что $[x, N] = 1$. Последнее невозможно. Значит, $N \cong \text{PSL}_2(q^m)$, где $m = ap$. Пусть τ – инволюция, не коммутирующая с x . Тогда $\tau\tau^x \in \langle x, \tau \rangle = \langle x, x^\tau \rangle \rtimes \langle \tau \rangle = (L \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle \tau \rangle = (L \rtimes \langle \tau \rangle) \rtimes \langle x \rangle$, где $N \supset L$ – x -допустимая группа. Согласно теореме Диксона [5, теорема 8.27] L – абелева группа нечетного порядка. Поэтому $\tau\tau^x = u \in L$. Так как L – абелева, допустимая относительно x группа, то $uu^x = u^xu$. Отсюда $\tau\tau^x\tau^x\tau^{x^2} = \tau^x\tau^{x^2}\tau\tau^x$. Следовательно, $\tau^x\tau\tau^{x^2} = \tau^{x^2}\tau\tau^x$.

Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 - \alpha^2 & -\alpha \end{bmatrix},$$

где α – произвольный элемент поля $\text{GF}(q^m)$, и пусть инволюция τ ее образ в $\text{PSL}_2(q^m)$. Условие $\tau^x\tau\tau^{x^2} = \tau^{x^2}\tau\tau^x$ влечет $T^xTT^{x^2} = \pm T^{x^2}TT^x$, где

$$T^x = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & 1 \\ -1 - \bar{\alpha}^2 & -\bar{\alpha} \end{bmatrix}, \quad T^{x^2} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{\alpha}} & 1 \\ -1 - \bar{\bar{\alpha}}^2 & -\bar{\bar{\alpha}} \end{bmatrix}.$$

Черта означает действие автоморфизма Фробениуса на элемент поля $\text{GF}(q^m)$. Матрица T^{x^2} получается из матрицы T^x заменой $\bar{\alpha}$ на $\bar{\bar{\alpha}}$. Поэтому матрицы $C = T^xTT^{x^2}$ и $T^{x^2}TT^x$ получаются друг из друга перестановкой $\bar{\alpha}$ и $\bar{\bar{\alpha}}$.

Пусть сначала $TT^xT^{x^2} = T^{x^2}TT^x$. Тогда имеет место равенство

$$C_{22} = -\alpha - \alpha\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}^2\bar{\bar{\alpha}} - \alpha\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}}.$$

Отсюда получаем

$$-\alpha - \alpha\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha} + \bar{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}^2\bar{\bar{\alpha}} - \alpha\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}} = -\alpha - \alpha\bar{\alpha}^2 + \bar{\bar{\alpha}} + \alpha^2\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}},$$

или

$$\alpha^2\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^2\bar{\bar{\alpha}} = -\alpha\bar{\bar{\alpha}}^2 + \alpha^2\bar{\bar{\alpha}} + \bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}}^2. \quad (*)$$

Положив $\bar{\alpha} = \alpha^{q^a}$, получим $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha^{q^{2a}}$. Подставив значения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\bar{\alpha}}$ в равенство (*), имеем

$$\alpha^{2q^{2a}+q^a} - \alpha^{2q^{2a}+1} - \alpha^{q^{2a}+2q^a} + \alpha^{q^{2a}+2} + \alpha^{2q^a+1} - \alpha^{q^a+2} = 0.$$

Уравнение

$$z^{2q^{2a}+q^a} - z^{2q^{2a}+1} - z^{q^{2a}+2q^a} + z^{q^{2a}+2} + z^{2q^a+1} - z^{q^a+2} = 0$$

степени $2q^{2a} + q^a$ имеет не более $2q^{2a} + q^a$ корней в поле $\text{GF}(q^{ap})$.

Случай $T^x T T x^2 = -T x^2 T T x$ также приводит к полиномиальному уравнению для a степени $2q^{2a} + q^a$. Поскольку всякий элемент поля $\text{GF}(q^{ap})$ должен удовлетворять одному из этих полиномиальных уравнений, то должно выполняться неравенство $2(2q^{2a} + q^a) \geq q^{ap}$. Так как p и q различные нечетные простые числа, то легко видеть, что данное неравенство не выполняется ни при каких значениях параметра a . Противоречие. Таким образом, минимального контрпримера к теореме 1 не существует.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – конечная разрешимая группа. Если $\langle x, x^g \rangle$ – группа нечетного порядка для всех $g \in G$, то $x \in O(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 3. Дословное повторение пунктов (1) и (2) теоремы 1 приводит к тому, что $O(G) = O_2(G) = 1$. Последнее невозможно в разрешимой группе.

2. Доказательство теоремы 2. Поскольку $\langle x^G \rangle = \langle y^G \rangle \trianglelefteq G$, а также $[x, y^g] = 1$ для всех $g \in G$, то $1 \neq x \in Z(\langle y^G \rangle)$ $\text{char} \langle y^G \rangle \trianglelefteq G$. Отсюда следует, что $x \in O_p(G)$. Аналогично доказывается, что $y \in O_p(G)$. Таким образом, $\langle x, y \rangle \subseteq O_p(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает пример группы S_6 , условие абелевости p -силовских подгрупп в общем случае нельзя опустить. Действительно, если положить $x = (1, 2)$; $y = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$, то $\langle x^g, y^h \rangle$ – 2-группа для всех $g, h \in S_6$. Однако, $\langle x, y \rangle \not\subseteq O_2(S_6)$.

Гомельское отделение ВЦ АН Беларуси

Поступило

01.03.95

Исправленный вариант

20.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
- [2] Сыскин С. А. Об автоморфизмах конечных групп // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 6. С. 164–168.
- [3] Картер Р. Простые группы и простые алгебры Ли // Математика. 1966. Т. 10. № 5. С. 3–47.
- [4] Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups of characteristic 2 type. Mem. Amer. Math. Soc. V. 276, 1983.
- [5] Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin–New York: Springer Verlag, 1967.