Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Интегральные оценки решений уравнения Гельмгольца в неограниченных областях, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 759–768

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:52:35

УДК 517.947.4

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

А. В. Филиновский

Изучается краевая задача

$$\Delta v + \omega^2 v = h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad -\infty < \omega < +\infty, \\ v|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

где поверхность Γ удовлетворяет условию $(\nu, \nabla \varphi(x))|_{\Gamma} \leq 0$,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = 1,$$

ν – внешняя по отношению к Ω нормаль к Γ .

Библиография: 6 названий.

Изучается поведение решений краевой задачи

$$\Delta v + \omega^2 v = 0, \quad x \in \Omega, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad (1)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – неограниченная область, не содержащая начало координат, с гладкой, возможно бесконечной границей Γ .

Для произвольных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = 1$, определим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2.$$

Назовем Γ поверхностью класса $\Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, если

$$(\nu, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где ν – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ . Например, граница области

$$\Omega = \{x : C_1(x_2^2 + x_3^2)^{\alpha/2} < x_1 < C_2(x_2^2 + x_3^2)^{\alpha/2}, \\ 0 < C_1 < C_2, \varphi(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > C_3 > 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

принадлежит классу $\Pi_{\alpha,1,1}$.

Интегральные оценки снизу решений задачи (1), (2) в областях с бесконечной границей устанавливались в работах [1]–[4]. Рассмотрены следующие случаи: $\Gamma \in \Pi_{0,\dots,0,1}$ при условии

$$\text{diam}(\Omega \cap \{x_n < M\}) < \infty, \quad M > 0 \quad (4)$$

(см. [1]); $\Gamma \in \Pi_{1,\dots,1}$ (поверхности, звездные относительно начала координат) [2]; $\Gamma \in \Pi_{1,1}$ для $|x| > R_0$ ($n = 2$) [3]; $\Gamma \in \Pi_{\alpha,\dots,\alpha,1}$ для $|x| > R_0$ при условиях (4) и

$$\text{diam}(\Omega \cap \{x_n = M\}) \leq C_4(1 + M)^\alpha, \quad M > 0 \quad (5)$$

(см. [4]).

В данной работе для областей с границами из классов $\Pi_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ получены оценки снизу интегралов от решения задачи (1), (2) по поверхностям уровня функции $\varphi(x)$. Будем далее предполагать, что $r = |x| > 1$ в Ω .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Gamma \in \Pi_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$, $n \geq 2$, и $v(x, \omega) \neq 0$ – решение задачи (1), (2) с $\omega \neq 0$. Тогда существуют такие положительные постоянные R_1 и β_1 , что

$$\int_{S_R^\varphi} (|v_\nu|^2 + \omega^2 |v|^2) ds \geq \frac{\beta_1}{R}, \quad R \geq R_1, \quad (6)$$

где ν – единичный вектор внешней по отношению к $\Omega_R^\varphi = \Omega \cap \{\varphi(x) < R^2\}$ нормали к $S_R^\varphi = \Omega \cap \{\varphi(x) = R^2\}$.

Если $n \geq 3$ и α_1 удовлетворяют неравенству

$$\alpha_1 \geq \frac{(6n^3 + 4n^2 + 76n + 58)^{1/2} - n + 4}{n^2 + 14}, \quad (7)$$

то справедлива оценка

$$\int_{S_R^\varphi} (|v_\nu|^2 + \omega^2 |v|^2) ds \geq \beta_1, \quad R \geq R_1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенства (6) и (8) для вещественной или мнимой частей $v(x, \omega)$, которые также удовлетворяют (1) и (2). Поэтому $v(x, \omega)$ при доказательстве теоремы 1 будем считать вещественной.

Умножив уравнение (1) на $2\varphi^{(\delta-1)/2}(\nabla v, \nabla \varphi)$, $0 \leq \delta \leq 1$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \text{div} \left\{ \varphi^{(\delta-1)/2} \left(2(\nabla v, \nabla \varphi) \nabla v - |\nabla v|^2 \nabla \varphi + \omega^2 v^2 \nabla \varphi + \left(\Delta \varphi - \frac{1-\delta}{2} \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} \right) v \nabla v \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1-\delta}{4\varphi} \left(\Delta \varphi \nabla \varphi + 2 \overline{\varphi_{x_j} \varphi_{x_j}} - \frac{(3-\delta)|\nabla \varphi|^2}{2\varphi} \nabla \varphi \right) v^2 \right\} \right. \\ & = 2\varphi^{(\delta-1)/2} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j} x_j v_{x_j}^2 - \frac{1-\delta}{2} \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{\varphi} \right) \\ & \quad \left. + \left(\frac{1-\delta}{2} \Delta(\varphi^{(\delta-3)/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{(\delta-1)/2}) \right) \frac{v^2}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрируем (9) по Ω_R^φ , $R > 0$, с учетом (2). Имеем

$$\begin{aligned}
 Y_\delta(R) &= R^{\delta-1} \int_{S_R^\varphi} |\nabla \varphi| \left\{ 2v_\nu^2 - |\nabla v|^2 + \omega^2 v^2 + \left(\Delta \varphi - \frac{1-\delta}{2} \frac{|\nabla \varphi|^2}{R^2} \right) \frac{vv_\nu}{|\nabla \varphi|} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1-\delta}{4R^2} \left(\Delta \varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j}}{|\nabla \varphi|^2} - \frac{(3-\delta)|\nabla \varphi|^2}{2R^2} \right) v^2 \right\} ds \\
 &= - \int_{\Gamma_R^\varphi} (\nu, \nabla \varphi) \varphi^{(\delta-1)/2} v_\nu^2 ds \\
 &\quad + 2 \int_{\Omega_R^\varphi} \varphi^{(\delta-1)/2} \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} v_{x_j}^2 - \frac{(1-\delta)(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{2\varphi} \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega_R^\varphi} \left(\frac{1-\delta}{2} \Delta(\varphi^{(\delta-3)/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{(\delta-1)/2}) \right) \frac{v^2}{2} dx, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где $\Gamma_R^\varphi = \Gamma \cap \{\varphi(x) < R^2\}$. Выберем число $\delta \in [0, 1]$ так, что подынтегральные функции в правой части (10) неотрицательны и функция $Y_\delta(R)$ монотонно возрастает по R . Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j} v_{x_j}^2 - \frac{(1-\delta)(\nabla v, \nabla \varphi)^2}{2\varphi} &= 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x_j}^2 - \frac{2(1-\delta) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j v_{x_j} \right)^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \\
 &\geq 2 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x_j}^2 - (1-\delta) \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x_j}^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \right) \\
 &= 2\delta \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{x_j}^2 \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad \delta \geq 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 I_\delta(x) &= \frac{1-\delta}{2} \Delta(\varphi^{(\delta-3)/2} |\nabla \varphi|^2) - \Delta \varphi \Delta(\varphi^{(\delta-1)/2}) \\
 &= \frac{1-\delta}{2} \varphi^{(\delta-3)/2} \left((\Delta \varphi)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j}^2 + \frac{(3-\delta)(5-\delta)}{4} \frac{|\nabla \varphi|^4}{\varphi^2} \right. \\
 &\quad \left. - (3-\delta) \left(\Delta \varphi \frac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j x_j}}{\varphi} \right) \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

т.е.

$$I_1(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

Из (3) и (10)–(13) следует, что функция $Y_1(R)$ монотонно возрастает по R при $R > 0$ и $Y_1(R_1) > 0$ для некоторого $R_1 > 0$ (в противном случае $v \equiv 0$ в $\Omega_{R_1}^\varphi$, а значит, и в Ω). Поэтому

$$0 < Y_1(R_1) \leq Y_1(R) = R \int_{S_R^\varphi} \frac{|\nabla \varphi|}{R} \left\{ 2v_\nu^2 - |\nabla v|^2 + \omega^2 v^2 + \frac{\Delta \varphi}{|\nabla \varphi|} vv_\nu \right\} ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2R \int_{S_R^\varphi} \left\{ 2v_\nu^2 + \omega^2 v^2 + \frac{\Delta\varphi}{|\nabla\varphi|} vv_\nu \right\} ds \\
&\leq 2R \int_{S_R^\varphi} \left\{ 2v_\nu^2 + \omega^2 v^2 + \frac{\Delta\varphi}{2|\nabla\varphi|} (v_\nu^2 + v^2) \right\} ds \\
&\leq 2R \int_{S_R^\varphi} \left\{ \left(2 + \frac{\Delta\varphi}{2|\nabla\varphi|} \right) v_\nu^2 + \left(\omega^2 + \frac{\Delta\varphi}{2|\nabla\varphi|} \right) v^2 \right\} ds \\
&\leq C_5 R \int_{S_R^\varphi} (v_\nu^2 + \omega^2 v^2) ds, \quad R \geq R_1, \quad C_5 > 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) следует неравенство (6) с постоянной $\beta_1 = Y_1(R_1)/C_5 > 0$.

Покажем теперь, что если $n \geq 3$ и $\alpha_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$ удовлетворяет условию (7), для поверхностного интеграла справедлива более сильная оценка (8). Из (7) и (12) следует, что

$$\begin{aligned}
I_0(x) &= \frac{2}{\varphi^{3/2}} \left(\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 + 15 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 6 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 x_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} + 2 \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j^3 x_j^2}{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^2} \right) \right) \\
&\geq \frac{2}{\varphi^{3/2}} ((n-1)\alpha_1 + 1)^2 + 2(n-1)\alpha_1^2 + 2 + 15\alpha_1^2 - 6(\alpha_1 + (n-1) + 2)) \\
&= \frac{2}{\varphi^{3/2}} ((n^2 + 14)\alpha_1^2 + 2(n-4)\alpha_1 - 3(2n+1)) \\
&= \frac{2}{\varphi^{3/2}} (n^2 + 14) \left(\alpha_1 - \frac{(6n^3 + 4n^2 + 76n + 58)^{1/2} - n + 4}{n^2 + 14} \right) \\
&\quad \times \left(\alpha_1 - \frac{-(6n^3 + 4n^2 + 76n + 58)^{1/2} - n + 4}{n^2 + 14} \right), \quad x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{15}$$

а потому, используя (3), (10), (11) и (15), получаем неравенства

$$\begin{aligned}
0 < Y_0(R_1) &\leq Y_0(R) = \int_{S_R^\varphi} \frac{|\nabla\varphi|}{R} \left\{ 2v_\nu^2 - |\nabla v|^2 + \omega^2 v^2 + \left(\Delta\varphi - \frac{|\nabla\varphi|^2}{2R^2} \right) \frac{vv_\nu}{|\nabla\varphi|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta\varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j} x_j}{|\nabla\varphi|^2} - \frac{3|\nabla\varphi|^2}{2R^2} \right) v^2 \right\} ds \\
&\leq 2 \int_{S_R^\varphi} \left\{ 2v_\nu^2 + \left(\omega^2 + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta\varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j} x_j}{|\nabla\varphi|^2} \right) \right) v^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2|\nabla\varphi|} \left(\Delta\varphi - \frac{|\nabla\varphi|^2}{2R^2} \right) (v_\nu^2 + v^2) \right\} ds \leq 2 \int_{S_R^\varphi} \left\{ \left(2 + \frac{\Delta\varphi}{2|\nabla\varphi|} \right) v_\nu^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\omega^2 + \frac{\Delta\varphi}{2|\nabla\varphi|} + \frac{1}{4R^2} \left(\Delta\varphi + \frac{2 \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j}^2 \varphi_{x_j} x_j}{|\nabla\varphi|^2} \right) \right) v^2 \right\} ds \\
&\leq C_6 \int_{S_R^\varphi} (v_\nu^2 + \omega^2 v^2) ds, \quad R \geq R_1, \quad C_6 > 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) следует (8) и теорема 1 доказана.

Неравенства (6) и (8) позволяют оценить скорость роста нормы решения задачи (1), (2) в $L_2(\Omega_R)$, $\Omega_R = \Omega \cap \{r < R\}$ при $R \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Gamma \in \Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, $n \geq 2$, и $v(x, \omega) \not\equiv 0$ – решение задачи (1), (2) с $\omega \neq 0$. Тогда существуют число $\beta_2 > 0$ и последовательность $R_l \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, такие, что

$$\int_{\Omega_{R_l}} |v|^2 dx \geq \beta_2 \ln R_l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Если $n \geq 3$ и α_1 удовлетворяет неравенству (7), то справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{R_l}} |v|^2 dx \geq \beta_2 R_l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в теореме 1, достаточно доказать (17) и (18) для вещественнозначной $v(x, \omega)$.

Установим вначале при произвольных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ оценку

$$\int_{\Omega_R} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) dx \geq C_7 \ln R, \quad R \geq R_2, \quad C_7 > 0. \quad (19)$$

Пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_1}} \cos \theta_1, \quad x_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \dots, \\ x_{n-1} &= \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_{n-1}}} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \quad x_n = \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_n}} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{aligned}$$

где $\rho > 0$, $0 < \theta_j < \pi$, $j = 1, 2, \dots, n-2$, $-\pi < \theta_{n-1} \leq \pi$ – обобщенные сферические координаты точки $x \in (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$dV = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} \quad (20)$$

и на S_ρ^φ

$$ds = D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{n-1}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) &= \sqrt{|\det B|}, \quad B = (b_{jl}), \\ b_{jl} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_j}, \frac{\partial x}{\partial \theta_l} \right), \quad j, l = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} C_8^{-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} &\leq D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \\ &\leq C_8 (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1/2} \rho^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \end{aligned} \quad (22)$$

с постоянной $C_8 > 1$, зависящей от α_1 , $0 < \alpha_1 \leq 1$, то справедливы оценки

$$C_8^{-1} d\rho ds \leq dV \leq C_8 d\rho ds. \quad (23)$$

Используя (6) и (20)–(23), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) dx &\geq \int_{\Omega_{R\sqrt{\alpha_1}}^\varphi} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) dx \\ &\geq \frac{1}{C_8} \int_1^{R\sqrt{\alpha_1}} d\rho \int_{S_\rho^\varphi} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) ds \geq \frac{\beta_1}{C_8} \int_1^{R\sqrt{\alpha_1}} \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \frac{\beta_1}{C_8} \ln R\sqrt{\alpha_1} \geq C_7 \ln R, \quad R \geq R_2, \quad C_7 > 0, \end{aligned} \quad (24)$$

из которых выводим оценку (19).

Для доказательства неравенства (17) рассмотрим функцию

$$J(R) = \int_{S_R} v^2 ds,$$

где $S_R = \Omega \cap \{r = R\}$. Учитывая граничное условие (2), для функции $J(R)$ имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$J'(R) = \frac{n-1}{R} J(R) + 2 \int_{S_R} vv_r ds, \quad R > R_3 = \inf_{x \in \Gamma} |x|. \quad (25)$$

Рассмотрим два случая:

- а) $J'(R) \geq 0$ для всех $R \geq R_4 > 0$,
- б) существует последовательность $R_l \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, такая, что $J'(R_l) < 0$.

В случае а) при всех $R \geq R_2 > R_4$ и некотором $\beta_2 > 0$ $J(R) \geq \beta_2 > 0$, а потому

$$\int_{\Omega_R} v^2 dx = \int_{R_3}^R J(r) dr \geq \beta_2 \int_{R_2}^R dr = \beta_2(R - R_2), \quad R \geq R_2,$$

откуда следует неравенство (17).

В случае б) из (25) и равенства

$$0 = \int_{\Omega_{R_l}} (\Delta v + \omega^2 v)v dx = \int_{S_{R_l}} vv_r ds + \int_{\Omega_{R_l}} (\omega^2 v^2 - |\nabla v|^2) dx$$

следует, что

$$\begin{aligned} \omega^2 \int_{\Omega_{R_l}} v^2 dx &= \int_{\Omega_{R_l}} |\nabla v|^2 dx - \int_{S_{R_l}} vv_r ds \\ &= \int_{\Omega_{R_l}} |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} J'(R_l) + \frac{n-1}{2R_l} J(R_l) \end{aligned}$$

$$> \int_{\Omega_{R_l}} |\nabla v|^2 dx + \frac{n-1}{2R_l} J(R_l) \geq \int_{\Omega_{R_l}} |\nabla v|^2 dx, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

и неравенство (17) следует из (24) и (26).

Предположим теперь, что $n \geq 3$ и α_1 удовлетворяет (7). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) dx &\geq \frac{1}{C_8} \int_1^{R\sqrt{\alpha_1}} d\rho \int_{S_\rho^{\varphi}} (|\nabla v|^2 + \omega^2 v^2) ds \geq \frac{\beta_1}{C_8} \int_1^{R\sqrt{\alpha_1}} d\rho \\ &= \frac{\beta_1}{C_8} (R\sqrt{\alpha_1} - 1) \geq C_7 R, \quad R \geq R_2, \quad C_7 > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

и неравенство (18) выводится из (27) и (26) так же, как и (17). Теорема 2 доказана.

Установленные в теореме 1 оценки (6) и (8) позволяют выделить классы единственности решения задачи

$$\begin{aligned} \Delta v + \omega^2 v &= h(x), \quad x \in \Omega, \quad \omega \neq 0, \\ v|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Gamma \in \Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, $n \geq 2$. Тогда решение задачи (28), (29), удовлетворяющее условию

$$\int_{\Omega} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 dx < \infty, \quad (30)$$

единственно.

Если $n \geq 3$ и выполнено неравенство (7), то решение задачи (28), (29), удовлетворяющее условию

$$\int_{\Omega} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 \frac{dx}{r} < \infty, \quad (31)$$

единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v_1 и v_2 , $v_1 \not\equiv v_2$, — решения задачи (28)–(30). Тогда функция $v = v_1 - v_2 \not\equiv 0$ является решением задачи (1), (2) и удовлетворяет условию (30). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R^{\varphi}} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 dx &= \int_{\Omega_R^{\varphi}} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega_R^{\varphi}} (\bar{v}(\nabla v, \nabla \varphi) - v(\nabla \bar{v}, \nabla \varphi)) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} (\bar{v}(\nabla v, \nabla \varphi) - v(\nabla \bar{v}, \nabla \varphi)) = \operatorname{div} \{ 2\sqrt{\varphi} (\bar{v} \nabla v - v \nabla \bar{v}) \} - 2\sqrt{\varphi} (\bar{v} \Delta v - v \Delta \bar{v}). \quad (33)$$

Из (32) и (33) выводим

$$\int_{\Omega_R^{\varphi}} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 dx = \int_{\Omega_R^{\varphi}} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) dx$$

$$\begin{aligned}
& + i\omega R \int_{S_R^\varphi} (\bar{v}v_\nu - v\bar{v}_\nu) ds - i\omega \int_{\Omega_R^\varphi} \sqrt{\varphi} (\bar{v}\Delta v - v\Delta\bar{v}) dx \\
& = \int_{\Omega_R^\varphi} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) dx \\
& \quad + i\omega \int_{\Omega_R^\varphi} (R - \sqrt{\varphi}) (\bar{v}(\Delta v + \omega^2 v) - v(\Delta\bar{v} + \omega^2 \bar{v})) dx \\
& = \int_{\Omega_R^\varphi} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) dx. \tag{34}
\end{aligned}$$

Переходя в (34) к пределу при $R \rightarrow \infty$ и, учитывая (30), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v|^2 dx & \leq \frac{1}{\omega^2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) dx \leq \frac{1}{\alpha_1 \omega^2} \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) dx \\
& = \frac{1}{\alpha_1 \omega^2} \int_{\Omega} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 dx < \infty. \tag{35}
\end{aligned}$$

Но из (17) следует, что

$$\int_{\Omega} |v|^2 dx = \infty,$$

что противоречит (35). Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы 3 воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\varphi} (\bar{v}(\nabla v, \nabla \varphi) - v(\nabla \bar{v}, \nabla \varphi)) = \operatorname{div}\{(\bar{v}\nabla v - v\nabla \bar{v}) \ln \varphi\} - (\bar{v}\Delta v - v\Delta \bar{v}) \ln \varphi,$$

из которого, учитывая (31) и (32), выводим

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R^\varphi} |\nabla(v e^{-i\omega\sqrt{\varphi}})|^2 \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} & = \int_{\Omega_R^\varphi} \left(|\nabla\varphi|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
& \quad + i\omega \ln R \int_{S_R^\varphi} (\bar{v}v_\nu - v\bar{v}_\nu) ds - \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega_R^\varphi} (\bar{v}\Delta v - v\Delta\bar{v}) \ln \varphi dx \\
& = \int_{\Omega_R^\varphi} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} \\
& \quad + \frac{i\omega}{2} \int_{\Omega_R^\varphi} (2 \ln R - \ln \varphi) (\bar{v}(\Delta v + \omega^2 v) - v(\Delta\bar{v} + \omega^2 \bar{v})) dx \\
& = \int_{\Omega_R^\varphi} \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla\varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}}. \tag{36}
\end{aligned}$$

Используя (20)–(23), (32) и (36), получаем неравенства

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) ds \\
& = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho} \int_{\Theta_\rho} (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) D(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_8 \int_1^\infty \int_{\Theta_\rho} (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-1/2} \\
&\quad \times \rho^{n-2} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} d\rho d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\
&\leq C_8 \int_\Omega (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) \frac{dx}{r} < \frac{C_8}{\alpha_1} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \omega^2 \frac{|\nabla \varphi|^2}{4\varphi} |v|^2 \right) \frac{dx}{\sqrt{\varphi}} < \infty, \quad (37)
\end{aligned}$$

где $\Theta_\rho = \{(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) : x = (\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in S_\rho^\varphi\}$. Но из (8) следует, что

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^R \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} (|\nabla v|^2 + \omega^2 |v|^2) ds &\geq \int_{R_1}^R \frac{d\rho}{\rho} \int_{S_\rho^\varphi} (|v_\nu|^2 + \omega^2 |v|^2) ds \\
&\geq \beta_1 \int_{R_1}^R \frac{d\rho}{\rho} = \beta_1 (\ln R - \ln R_1) \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty. \quad (38)
\end{aligned}$$

Противоречие между (37) и (38) доказывает второе утверждение теоремы 3.

Обозначим через L_0 минимальный оператор, порожденный в $L_2(\Omega)$ дифференциальным выражением $-\Delta$, L – самосопряженное расширение L_0 , определенное граничным условием (2). Спектр $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L)$, где $\sigma_p(L)$ – точечный спектр, $\sigma_c(L)$ – непрерывный спектр оператора L [5].

В областях, удовлетворяющих условию (4) с границей $\Gamma \in \Pi_{0, \dots, 0, 1} [1]$, и в областях, удовлетворяющих условиям (4) и (5) с границей $\Gamma \in \Pi_{\alpha, \dots, \alpha, 1}, [4]$, установлено отсутствие точечного спектра у L .

Оценка (17) позволяет доказать отсутствие точечного спектра у оператора L в областях с границами из классов $\Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Gamma \in \Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, $n \geq 2$. Тогда $\sigma_p(L) = \emptyset$, $\sigma_c(L) = [0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем, что $\sigma(L) = [0, +\infty)$. Так как оператор L самосопряжен и неотрицателен, то $\sigma(L) \subset [0, +\infty)$. Поскольку область с границей из класса $\Pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ содержит шары любого радиуса, то, используя результаты работы [6], имеем $\sigma(L) \supset [0, +\infty)$, а значит, $\sigma(L) = [0, +\infty)$.

Для доказательства теоремы 4 теперь достаточно установить, что на полуоси $\lambda \in [0, +\infty)$ нет собственных значений оператора L .

Рассмотрим вначале случай $\lambda = \omega^2 > 0$. Пусть $v(x, \omega) \not\equiv 0$, $\omega \neq 0$, – решение задачи (1), (2). Тогда из теоремы 2 следует, что

$$\int_{\Omega_{R_l}} |v|^2 dx \geq \beta_2 \ln R_l \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty, \quad \beta_2 > 0,$$

т.е. $v(x, \omega) \notin L_2(\Omega)$ и $\lambda > 0$ не является собственным значением оператора L .

В случае $\lambda = \omega^2 = 0$ воспользуемся следующим утверждением, которое справедливо для произвольной Γ .

ЛЕММА. Пусть $n \geq 2$ и $v \not\equiv 0$ – решение задачи (1), (2) с $\omega = 0$. Тогда существуют положительные постоянные R_3 и β_3 такие, что

$$\int_{S_R} |v|^2 ds \geq \beta_3 R^{n-1} \ln^\gamma R, \quad R \geq R_3, \quad (39)$$

где $\gamma = 1$ при $n = 2$ и $\gamma = 0$ при $n \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теорем 1 и 2, будем считать v вещественной. Пусть

$$J(R) = \int_{S_R} v^2 ds, \quad H(R) = \int_{S_R} v v_r ds.$$

Функция $J(R)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$J'(R) = \frac{n-1}{R} J(R) + 2H(R), \quad R > R_2,$$

и начальному условию $J(R_2) = 0$. Поэтому

$$J(R) = 2R^{n-1} \int_{R_2}^R \frac{H(r)}{r^{n-1}} dr, \quad R > R_2. \quad (40)$$

Из (1), (2) и $\omega = 0$ следует равенство

$$H(R) = \int_{\Omega_R} |\nabla v|^2 dx, \quad R > 0,$$

т.е. функция $H(R)$ монотонно возрастает и положительна для $R \geq R_3 > R_2$. Из (40) выводим оценку

$$J(R) \geq 2H(R_3)R^{n-1} \int_{R_2}^R \frac{dr}{r^{n-1}} \geq \beta_3 R^{n-1} \ln^\gamma R, \quad R \geq R_3,$$

из которой следует утверждение леммы.

Завершим доказательство теоремы 4. Из (39) следует, что при $\lambda = \omega^2 = 0$ для решения $v \not\equiv 0$ задачи (1), (2) справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_R} |v|^2 dx \geq C_9 R^n \ln^\gamma R \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty, \quad C_9 > 0, \quad R > R_3,$$

т.е. $v(x, 0) \in L_2(\Omega)$ и $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L . Теорема 4 полностью доказана.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
14.07.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.
- [2] Odeh F. M. Uniqueness theorems for Helmholtz equation in domains with infinite boundaries // J. Math. Mech. 1963. V. 12. № 6. P. 857–867.
- [3] Рамм А. Г. Спектральные свойства оператора Шрёдингера в областях с бесконечной границей // Матем. сб. 1965. Т. 66(108). № 3. С. 321–343.
- [4] Tayoshi T. The asymptotic behaviour of the solutions of $(\Delta + \lambda)u = 0$ in domains with the unbounded boundary // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1972. V. 8. № 2. P. 375–391.
- [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Т. 2. М.: Мир, 1966.
- [6] Глазман И. М. О характере спектра многомерных сингулярных краевых задач // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. № 2. С. 171–174.