Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Кожанов, Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 840–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:34:34

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ НАГРУЖЕННОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ И О СВЯЗАННОЙ С НИМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ

А. И. Кожанов

В работе исследуется разрешимость нелокальной по времени краевой задачи для нелинейного параболического уравнения $u_t - \Delta u + c(\bar{u}(x, T))u = f(x, t)$, где $\bar{u}(x, t) = \alpha(t)u(x, t) + \int_0^t \beta(\tau)u(x, \tau) d\tau$ (здесь $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ – заданные функции). Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений; показывается, что полученные результаты могут быть использованы при исследовании разрешимости одной коэффициентной обратной задачи.

Библиография: 11 названий.

Нагруженными уравнениями в литературе принято называть уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения [1]. Хорошо известными представителями подобных уравнений являются уравнения Кирхгофа и подобные им, исследованию которых посвящено столь много работ, что даже краткое их перечисление займет очень много места. Различные классы нагруженных уравнений активно изучались в работах Дженалиева; итоги его исследований подведены в работе [2]. Как близкие к настоящей работе, отметим также статьи [3], [4], посвященные исследованию некоторых классов нагруженных уравнений параболического типа. И, наконец, заметим, что нагруженные уравнения естественным образом появляются при редукции некоторых обратных задач к прямым задачам для уравнений составного типа – см. [3], [5], [6].

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть x есть точка ограниченной области D пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ , t есть число из конечного интервала $(0, T)$, Q есть цилиндр $D \times (0, T)$. Далее, пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные при $t \in [0, T]$ и соответственно при $x \in \bar{D}$ функции, $c(\xi)$ – заданная при $\xi \in \mathbb{R}$ функция и $f(x, t)$ – заданная в Q функция. Для заданной функции $h(t)$ определим величину $\bar{h}(t)$

$$\bar{h}(t) = \alpha(t)h(t) + \int_0^t \beta(\tau)h(\tau) d\tau.$$

Наконец, для функции $u(x, t)$, определенной в цилиндре Q , положим

$$Lu \equiv u_t - \Delta u + c(\bar{u}(x, T))u,$$

где Δ есть оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00796.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. Найти в Q решение уравнения

$$Lu = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x)u(x, T) + \psi(x), \quad x \in D, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0. \quad (3)$$

Условие (2) данной краевой задачи представляет собой нелокальное условие, связывающее значения решения в различных точках границы [1]; тем самым, краевая задача (1), (2) *есть нелокальная краевая задача для нелинейного нагруженного параболического уравнения*. В указанной уже выше монографии [1], в работах [7], [8] приведены результаты о разрешимости некоторых нелокальных краевых задач для параболических уравнений, однако сразу же отметим, что все эти результаты соответствуют либо ситуации $\varphi(x) \equiv \text{const}$, либо же дают существование обобщенного решения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть имеют место включения $c(\xi) \in \text{Lip}(\mathbb{R})$, $\alpha(t) \in L_\infty([0, T])$, $\beta(t) \in L_1([0, T])$, $\varphi(x) \in W_\infty^1(D)$, $\psi(x) \in \dot{W}_2^1(D) \cap L_\infty(D)$, $f(x, t) \in L_\infty(Q)$, и пусть выполняются условия

$$0 < c_0 \leq c(\xi) \leq c_1 < +\infty, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \varphi_0 = \|\varphi\|_{L_\infty(D)} < 1.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству

$$W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(D) \cap L_\infty(D)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать для краткости пространство $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(D) \cap L_\infty(D))$ как пространство V ; норму в V будем определять естественным образом:

$$\|v\|_V = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(D) \cap L_\infty(D))}.$$

Пусть $v(x, t)$ есть произвольная функция из этого пространства. Рассмотрим краевую задачу: найти в Q решение уравнения

$$L_v u \equiv u_t - \Delta u + c(\bar{v}(x, T))u = f(x, t), \quad (1')$$

удовлетворяющее условиям (2) и (3). Данная задача есть линейная нелокальная краевая задача; для доказательства разрешимости этой задачи в пространстве V воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач: найти в Q решение уравнения (1'), удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = \lambda \varphi(x)u(x, T) + \psi(x), \quad x \in D, \quad (2_\lambda)$$

и условию (3).

Как обычно, обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка $[0, 1]$, для которых краевая задача $(1')$, (2_λ) , (3) разрешима в пространстве V для всех функций $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы. Если это множество окажется непустым, одновременно открытым и замкнутым, то оно, как известно, будет совпадать со всем отрезком $[0, 1]$. Но тогда краевая задача $(1')$, (2_1) , (3) будет иметь решение, принадлежащее пространству V . А это и будет означать разрешимость в пространстве V задачи $(1')$, (2) , (3) .

Итак, нам необходимо доказать непустоту множества Λ , его открытость и замкнутость.

Чтобы доказать непустоту множества Λ , покажем, что число 0 есть элемент Λ .

Краевая задача $(1')$, (2_0) , (3) есть обычная первая начально-краевая задача для линейного параболического уравнения. Хорошо известно [9], что при выполнении условий теоремы эта задача имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(D))$. Вместе с тем при принадлежности функций $f(x, t)$ и $\psi(x)$ пространствам $L_\infty(Q)$ и $L_\infty(D)$ соответственно функция $u(x, t)$ будет ограниченной (существенно) и для нее почти всюду в $\bar{Q}$ будет иметь место оценка

$$|u(x, t)| \leq \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\}. \quad (4)$$

Этот факт доказан в [10] даже для обобщенного решения; тем более, он справедлив и для решения из пространства $W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0, T; \dot{W}_2^1(D))$ (метод доказательства состоит в приближении функций $f(x, t)$, $\psi(x)$ и $c(\bar{v}(x, T))$ гладкими, использовании для краевой задачи с гладкими данными классических результатов о существовании гладкого решения и о справедливости оценки принципа максимума [9] и в осуществлении предельного перехода).

Итак, краевая задача $(1')$, (2_0) , (3) имеет решение, принадлежащее пространству V . Следовательно, множество Λ непусто.

Открытость и замкнутость множества Λ , как правило, следуют из “хороших” априорных оценок. Докажем эти оценки.

Прежде всего заметим, что оценка (4) для решений $u(x, t)$ краевой задачи $(1')$, (2_λ) , (3) дает неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \varphi_0 \|u(x, T)\|_{L_\infty(D)} + \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\}.$$

Используя элементарное неравенство $\max(\alpha, \beta + \gamma) \leq \max(\alpha, \beta) + \gamma$, справедливое для любых неотрицательных чисел α, β, γ , мы можем далее получить неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\} + \varphi_0 \|u\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))}.$$

Условие $\varphi_0 < 1$ позволяет нам получить первую равномерную по λ оценку решений краевой задачи $(1')$, (2_λ) , (3) :

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq \frac{1}{1 - \varphi_0} \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\}. \quad (5)$$

Элементарный анализ равенства

$$\int_0^T \int_D L_v u \cdot u \, dx \, dt = \int_0^T \int_D f u \, dx \, dt$$

и вновь условие $\varphi_0 < 1$ дают вторую равномерную по λ оценку

$$\int_D u^2(x, T) \, dx + \int_0^T \int_D \left[u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right] \, dx \, dt \leq M_1 \left[\int_0^T \int_D f^2 \, dx \, dt + \int_D \psi^2 \, dx \right], \quad (6)$$

где M_1 есть число, определяемое лишь числами c_0 и φ_0 .

Проанализируем следующее равенство:

$$\int_0^T \int_D L_v u \cdot (u_t - \Delta u) \, dx \, dt = \int_0^T \int_D f(u_t - \Delta u) \, dx \, dt.$$

Интегрируя по частям, опять используя условие $\varphi_0 < 1$, а также используя оценку (6), второе основное неравенство для эллиптических операторов [9] и неравенство Юнга, получаем, что для функции $u(x, t)$ будет справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_D \left[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right] \, dx \, dt + \sum_{i=1}^n \int_D u_{x_i}^2(x, T) \, dx \\ & \leq M_2 \left[\int_0^T \int_D f^2 \, dx \, dt + \int_D \psi^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_D \psi_{x_i}^2 \, dx \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где постоянная M_2 , зависит от чисел c_1 и M_1 , от функции $\varphi(x)$ и от области D .

Из оценок (6) и (7) и из условий на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^n \int_D u_{x_i}^2(x, 0) \, dx \leq M_3 \left[\int_0^T \int_D f^2 \, dx \, dt + \int_D \psi^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_D \psi_{x_i}^2 \, dx \right].$$

Интегрируя по частям в равенстве

$$\int_0^t \int_D L_v u(u_\tau - \Delta u) \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_D f(u_\tau - \Delta u) \, dx \, d\tau,$$

где t есть произвольное число из отрезка $[0, T]$, нетрудно получить оценку

$$\sum_{i=1}^n \int_D u_{x_i}^2(x, t) \, dx \leq M_4 \left[\int_0^T \int_D f^2 \, dx \, dt + \int_D \psi^2 \, dx + \sum_{i=1}^n \int_D \psi_{x_i}^2 \, dx \right]$$

с постоянной M_4 , зависящей, как и предыдущие постоянные M_1, M_2, M_3 , лишь от чисел c_0 и c_1 , функции $\varphi(x)$ и от области D . Вместе с оценками (5)–(7) последняя оценка дает равномерную по λ оценку $u(x, t)$ решений краевой задачи (1'), (2_λ), (3) в пространстве V :

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{1 - \varphi_0} \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\} + M_0 [\|f\|_{L_2(Q)} + \|\psi\|_{W_2^1(D)}]. \quad (8)$$

Эта оценка и позволит нам доказать открытость и замкнутость множества Λ .

Пусть $\{\lambda_m\}$ есть последовательность элементов множества Λ , сходящаяся к числу λ_0 . Покажем, что λ_0 также будет элементом Λ .

Всякому числу λ_m соответствует функция $u_m(x, t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи $(1')$, (2_{λ_m}) , (3) . Для семейства функций $\{u_m(x, t)\}$ будет справедлива равномерная по t оценка (8). Из этой оценки вытекает, что найдутся функция $u(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(Q)$ и подпоследовательность $\{u_{m_k}(x, t)\}$ последовательности $\{u_m(x, t)\}$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости $u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ и почти всюду в $\overline{Q}$. Из этих сходимостей следует, что предельная функция $u(x, t)$ будет решением уравнения $(1')$ и что для нее будут выполняться условия (2_{λ_0}) и (3) . Оценка (8) для решений задачи $(1')$, (2_{λ_0}) , (3) далее дает, что функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V . Отсюда и вытекает, что число λ_0 будет элементом множества Λ .

Принадлежность (произвольной) предельной для множества Λ точки ему же и означает его замкнутость.

Докажем теперь открытость множества Λ .

Пусть число λ_0 есть элемент множества Λ . Множество Λ будет открытым, если числа $\lambda = \lambda_0 + \hat{\lambda}$ при малой величине $|\hat{\lambda}|$ также будут принадлежать ему же. Пусть $w(x, t)$ есть произвольная функция из пространства V . Рассмотрим краевую задачу: найти в Q решение уравнения $(1')$, удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = \lambda_0 \varphi(x) u(x, T) + \hat{\lambda} \varphi(x) w(x, T) + \psi(x), \quad x \in D, \quad (2'_{\lambda_0})$$

и условию (3) . Согласно определению множества Λ эта задача имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V . Тем самым, краевая задача $(1')$, $(2'_{\lambda_0})$, (3) порождает оператор G , переводящий пространство V в себя: $G(w) = u$. Покажем, что при малой величине $|\hat{\lambda}|$ этот оператор будет сжимающим.

Пусть $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$ – функции из пространства V , $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – соответствующие им образы при действии оператора G . Обозначим $w(x, t) = w_1(x, t) - w_2(x, t)$, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Для функции $u(x, t)$ выполняется уравнение

$$u_t - \Delta u + c(\bar{v}(x, T))u = 0,$$

условие

$$u(x, 0) = \lambda_0 \varphi(x) u(x, T) + \hat{\lambda} \varphi(x) w(x, T), \quad x \in D,$$

а также условие (3) . Оценка (8) дает для функции $u(x, T)$ неравенство

$$\|u\|_V \leq \frac{|\hat{\lambda}| \varphi_0}{1 - \varphi_0} \|w(x, T)\|_{L_\infty(D)} + M'_0 |\hat{\lambda}| \int_D \left[w^2(x, T) + \sum_{i=1}^n w_{x_i}^2(x, T) \right] dx.$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает неравенство

$$\|u\|_V \leq M \cdot |\hat{\lambda}| \|w\|_V.$$

Если теперь число $\hat{\lambda}$ будет таким, что будет выполняться неравенство $M |\hat{\lambda}| < 1$, то оператор G как раз и станет сжимающим оператором. У сжимающегося оператора есть

неподвижная точка – функция $u(x, t)$ такая, что $G(u) = u$. Для этой функции будет выполняться уравнение (1'), условие (3) и условие

$$u(x, 0) = (\lambda_0 + \hat{\lambda})\varphi(x)u(x, T) + \psi(x), \quad x \in D.$$

Другими словами, функция $u(x, t)$ будет решением краевой (1'), (2_λ), (3) и будет принадлежать пространству V . А это и означает, что число $\lambda_0 + \hat{\lambda}$ есть элемент множества Λ , и далее – что множество Λ открыто.

Как уже говорилось выше, из доказанного следует, что краевая задача (1'), (2), (3) при принадлежности функции $v(x, t)$ пространству V будет иметь решение $u(x, t)$, принадлежащее снова пространству V . Но тогда эта краевая задача порождает оператор Φ , переводящий пространство V в себя: $\Phi(v) = u$. Покажем, что оператор Φ имеет в V неподвижные точки.

Для решений краевой задачи (1'), (2), (3) выполняется оценка (8). Следовательно, оператор Φ любой шар пространства V радиуса R такого, что

$$R \geq \frac{1}{1 - \varphi_0} \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\} + M_0 [\|f\|_{L_2(Q)} + \|\psi\|_{W_2^1(D)}],$$

будет переводить в себя.

Покажем теперь, что оператор Φ будет вполне непрерывен.

Пусть последовательность функций $\{v_m(x, t)\}$ есть ограниченная последовательность из пространства V , $\{u_m(x, t)\}$ есть последовательность образов функций $v_m(x, t)$ при действии оператора Φ . Вновь из оценок (5)–(7) вытекает, что последовательность $\{u_m(x, t)\}$ будет ограничена в пространстве V . Далее, заметим, что последовательность $\{\bar{v}_m(x, T)\}$ будет ограниченной последовательностью в пространстве $W_2^1(D)$. Из ограниченности последовательностей $\{v_m(x, t)\}$, $\{u_m(x, t)\}$ и $\{\bar{v}_m(x, T)\}$ следует, что существуют подпоследовательности $\{v_{m_k}(x, t)\}$, $\{u_{m_k}(x, t)\}$ и $\{\bar{v}_{m_k}(x, t)\}$ соответствующих последовательностей, и функции $v(x, t)$, $u(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

- $v_{m_k}(x, t) \rightarrow v(x, t)$ слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ и почти всюду в $\bar{Q}$,
- $u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в $W_2^{2,1}(Q)$ и почти всюду в $\bar{Q}$,
- $\bar{v}_{m_k}(x, T) \rightarrow \bar{v}(x, T)$ почти всюду в $\bar{D}$.

Из этих сходимостей следует, что функции $v(x, t)$ и $u(x, t)$ будут связаны уравнением (1'); очевидно при этом, что функция $u(x, t)$ будет ограничена (существенно) и что для нее будет выполняться условие (2). Обозначим $w_k(x, t) = u_{m_k}(x, t) - u(x, t)$. Имеет место равенство

$$w_{k_t} - \Delta w_k + c(\bar{v}_{m_k}(x, T))w_k = [c(\bar{v}(x, T)) - c(\bar{v}_{m_k}(x, T))]u.$$

Это равенство, оценка (8) для функции w_k , ограниченность функции $u(x, t)$, липшицевость функции $c(\xi)$ и сходимость последовательности $\{\bar{v}_{m_k}(x, T) - \bar{v}(x, T)\}$ почти всюду в $\bar{D}$ к нулевой функции дают нам сходимость

$$\|w_k\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Другими словами, для всякой ограниченной в пространстве V последовательности $\{v_m(x, t)\}$ из последовательности $\{\Phi v_m\}$ можно извлечь сильно сходящуюся

подпоследовательность. А это и означает, что оператор Φ вполне непрерывен в пространстве V .

Вполне непрерывность оператора Φ , его свойство переводить шар пространства V достаточно большого радиуса в себя и теорема Шаудера и дают нам, что оператор Φ имеет в пространстве V неподвижную точку. Эта неподвижная точка – т.е. функция $u(x, t)$ из пространства V – и будет искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана.

Обсудим вопрос о единственности решений краевой задачи (1)–(3).

Введем обозначения

$$K_0 = \frac{1}{1 - \varphi_0} \max \left\{ \frac{1}{c_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\psi\|_{L_\infty(D)} \right\}, \quad a_0 = |\alpha(T)| + \int_0^T |\beta(t)| dt.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1, а также условие

$$CK_0a_0 < 1 - \varphi_0,$$

где C есть постоянная Липшица функции $c(\xi)$. Тогда краевая задача (1)–(3) может иметь в пространстве V лишь одно решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V два решения $u(x, t)$ и $v(x, t)$. Обозначим $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$. Для функции $w(x, t)$ в Q выполняется уравнение

$$w_t - \Delta w + c(\bar{u}(x, T))w = [c(\bar{v}(x, T)) - c(\bar{u}(x, T))]v,$$

условие

$$w(x, 0) = \varphi(x)w(x, T),$$

а также условие (3). Оценка (5) для функции $w(x, t)$ вместе с липшицевостью функции $c(\xi)$ дает оценку

$$\|w\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq \frac{1}{1 - \varphi_0} \cdot C \cdot \|\bar{w}(x, T)\|_{L_\infty(D)} \|v\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))}. \quad (9)$$

Поскольку функция $v(x, t)$ есть решение краевой задачи (1)–(3), то для нее будет выполняться оценка

$$\|v\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq K_0.$$

Далее, для функции $\bar{w}(x, T)$ выполняется неравенство

$$\|\bar{w}(x, T)\|_{L_\infty(D)} \leq a_0 \|w\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))}.$$

Последние два неравенства дают возможность продолжить оценку (9):

$$\|w\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} \leq \frac{CK_0a_0}{1 - \varphi_0} \|w\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))}.$$

Очевидно, что вследствие условия $CK_0a_0 < 1 - \varphi_0$ данное неравенство возможно лишь в случае

$$\|w\|_{L_\infty(0, T; L_\infty(D))} = 0.$$

А это и дает совпадение функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ почти всюду в Q .

Теорема доказана.

Приведем еще один вариант теоремы разрешимости краевой задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть для функции $c(\xi)$ существуют положительные числа c_0, c_1 и m_0 такие, что выполняются неравенства

$$c_0 \leq c(\xi) \leq c_1 \quad \text{при} \quad \xi \in [-m_0, m_0].$$

Кроме того, пусть имеют место включения

$$\begin{aligned} c(\xi) &\in \text{Lip}([-m_0, m_0]), & \alpha(t) &\in L_\infty([0, T]), & \beta(t) &\in L_1([0, T]), \\ \varphi(x) &\in W_\infty^1(D), & \psi(x) &\in \dot{W}_2^1(D) \cap L_\infty(D), & f(x, t) &\in L_\infty(Q), \end{aligned}$$

и пусть выполняются условия

$$\varphi_0 < 1, \quad a_0 K_0 \leq m_0.$$

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение, принадлежащее пространству V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\hat{c}(\xi)$:

$$\hat{c}(\xi) = \begin{cases} c(m_0), & \text{если } \xi > m_0, \\ c(\xi), & \text{если } \xi \in [-m_0, m_0], \\ c(-m_0), & \text{если } \xi < -m_0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $\hat{c}(\xi)$ удовлетворяет условию Липшица на всей числовой оси.

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в Q решением уравнения

$$u_t - \Delta u + \hat{c}(\bar{u}(x, T))u = f(x, T) \quad (10)$$

и удовлетворяющую условиям (2) и (3).

Согласно теореме 1 краевая задача (10), (2), (3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V . Для этого решения будет выполняться оценка

$$|u(x, t)| \leq K_0$$

для почти всех точек (x, t) множества $\bar{Q}$. Следовательно, для почти всех точек x из множества $\bar{D}$ будет выполняться оценка

$$|\bar{u}(x, T)| \leq a_0 K_0.$$

Условие теоремы влечет за собой равенство $\hat{c}(\bar{u}(x, T)) = c(\bar{u}(x, T))$. Другими словами, найденная функция $u(x, t)$ – т.е. решение краевой задачи (10), (2), (3) – будет и решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Изначально функция $c(\cdot)$ может быть функцией не только числа ξ , но и точки (x, t) множества $\bar{Q}$. Необходимо лишь потребовать, чтобы условия теорем 1 и 3, накладываемые на функцию $c(x, t, \xi)$, выполнялись бы равномерно на множестве $\bar{Q}$.

Покажем, что полученные выше результаты могут быть использованы при исследовании некоторых обратных задач.

Пусть $f(x, t)$, $(x, t) \in \bar{Q}$, $\alpha(t)$, $t \in [0, T]$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, $x \in \bar{D}$, – заданные функции.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. Найти функции $u(x, t)$ и $q(x)$, связанные в Q уравнением

$$u_t - \Delta u + q(x)u = f(x, t) \quad (11)$$

при выполнении условий

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = \mu(x, t), \quad (12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D, \quad (13)$$

$$\int_0^T \alpha(t)u(x, t) dt = u_1(x), \quad x \in D. \quad (14)$$

В обратной задаче (11)–(14) условия (12) и (13) являются условиями прямой задачи, условие же (14) есть *интегральное условие* переопределения, необходимое для нахождения вместе с решением и неизвестного коэффициента. Разрешимость обратной задачи для параболического уравнения с неизвестным коэффициентом при решении и с интегральным условием переопределения в пространствах соболевского типа изучалась ранее в [11]; среди условий, гарантирующих существование решений, в указанной работе фигурировали условия неотрицательности функций $f(x, t)$, $f_t(x, t)$, $\mu(x, t)$ и $\mu_t(x, t)$. В нашей же работе разрешимость обратной задачи (11)–(14) будет доказана при выполнении иных, нежели указанные условия неотрицательности, условий.

Пусть выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) &\in L_\infty(Q), \quad u_0(x) \in W_2^1(D) \cap L_\infty(D), \\ \mu(x, t) &\in L_\infty(\Gamma \times [0, T]), \\ \exists \mathcal{M}(x, t) \text{ такая, что } \mathcal{M}(x, t) &\in V, \mathcal{M}(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = \mu(x, t), \\ \mu(x, 0) &= u_0(x) \text{ при } x \in \Gamma; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$u_1(x) \in W_2^2(D) \cap L_\infty(D), \quad 0 < k_0 \leq u_1(x) \leq k_1 < +\infty \text{ почти всюду в } \overline{D}; \quad (16)$$

$$\alpha(t) \in C^1([0, T]); \quad (17)$$

$$a(x) \equiv \int_0^T \alpha(t)f(x, t) dt + \Delta u_1(x) + \alpha(0)u_0(x) \geq m_0 > 0 \text{ почти всюду в } \overline{D}. \quad (18)$$

Определим функцию $v_0(x, t)$ как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} v_{0t} - \Delta v_0 + \frac{a(x)}{u_1(x)}v_0 &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \\ v_0|_{\Gamma \times (0, T)} &= \mu(x, t), \\ v_0(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in D. \end{aligned}$$

Как уже говорилось выше (при исследовании разрешимости краевой задачи (1'), (2), (3)), при выполнении условий (15), (16) и (18) функция $v_0(x, t)$ будет принадлежать пространству V и для нее почти всюду в множестве $\overline{Q}$ будет выполняться оценка

$$|v_0(x, t)| \leq \max \left\{ \frac{k_1}{m_0} \|f\|_{L_\infty(Q)}, \|u_0\|_{L_\infty(D)}, \|\mu\|_{L_\infty(\Gamma \times [0, T])} \right\} = N_0.$$

Определим величину $\bar{h}(T)$:

$$\bar{h}(T) = -\alpha(T)h(T) + \int_0^T \alpha'(t)h(t) dt.$$

Далее, пусть m_1 есть произвольное число из интервала $(0, m_0)$. Определим числа a_0 , N_1 и N_2 :

$$a_0 = |\alpha(T)| + \int_0^T |\alpha'(t)| dt, \quad N_1 = \frac{a_0 k_1 N_0}{k_0(m_0 - m_1)}, \quad N_2 = N_1 N_0.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия (15)–(18), а также условия

$$N_1 < 1, \quad a_0 \left(\frac{N_2}{1 - N_1} + N_0 \right) \leq m_1, \quad (19)$$

$$\int_0^T h(t)\mu(x, t) dt = u_1(x) \quad \text{при } x \in \Gamma. \quad (20)$$

Тогда обратная задача (11)–(14) имеет решение $\{u(x, t), q(x)\}$ такое, что $u(x, t) \in V$, $q(x) \in L_\infty(D)$, $q(x) > 0$ почти всюду на множестве $\bar{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию

$$c_0(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq m_1, \\ m_1, & \text{если } \xi > m_1, \\ -m_1, & \text{если } \xi < -m_1. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу: найти в Q решение уравнения

$$w_t - \Delta w + \frac{a(x) + c_0(\bar{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T))}{u_1(x)} w = -\frac{1}{u_1(x)} [\bar{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)] v_0, \quad (21)$$

удовлетворяющее условиям

$$w(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \quad (22)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in D. \quad (23)$$

Исследование разрешимости данной краевой задачи проведем с помощью метода неподвижной точки.

Пусть $v(x, t)$ есть произвольная функция из пространства V . Рассмотрим краевую задачу: найти в Q решение уравнения

$$w_t - \Delta w + \frac{a(x) + c_0(\bar{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T))}{u_1(x)} w = -\frac{1}{u_1(x)} [\bar{v}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)] v_0, \quad (21')$$

удовлетворяющее условиям (22) и (23).

Из теоремы 1 и замечания 1 следует, что краевая задача (21'), (22), (23) имеет решение $w(x, t)$, принадлежащее пространству V . Тем самым, эта краевая задача порождает оператор Φ , переводящий пространство V в себя. Покажем, что этот оператор будет

переводить некоторое замкнутое выпуклое ограниченное множество пространства V в себя.

Определим требуемое множество так:

$$W_{R_1 R_2} = \{v \in V : \|v\|_{L_\infty(Q)} \leq R_1, \|v\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} \leq R_2\}.$$

Покажем, что числа R_1 и R_2 можно выбрать так, что множество $W_{R_1 R_2}$ и будет искомым.

Для решений краевой задачи (21'), (22), (23) почти всюду на множестве $\overline{Q}$ выполняется оценка

$$|w(x, t)| \leq \frac{a_0 k_1 N_0}{k_0(m_0 - m_1)} \|v\|_{L_\infty(Q)} + \frac{a_0 k_1 N_0^2}{k_0(m_0 - m_1)} = N_1 \|v\|_{L_\infty(Q)} + N_2. \quad (24)$$

Выберем число R_1 так, чтобы выполнялось неравенство $(1 - N_1)R_1 \geq N_2$ (вследствие условия $N_1 < 1$ это возможно). Тогда из оценки (24) будет вытекать оценка

$$\|w\|_{L_\infty(Q)} \leq R_1. \quad (25)$$

Повторяя далее доказательство оценки (8) и используя оценку (25), нетрудно установить, что для решений краевой задачи (21)–(23) будет выполняться оценка

$$\|w\|_{W_2^{2,1}(Q) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))} \leq N, \quad (26)$$

где постоянная N зависит лишь от исходных данных задачи и от числа R_1 . Выберем число R_2 большим данного числа N . Вместе с выбранным ранее (и зафиксированным) числом R_1 такой выбор числа R_2 и даст нам, что оператор Φ будет переводить множество $W_{R_1 R_2}$ в себя.

Вполне непрерывность оператора Φ доказывается полностью аналогично доказательству вполне непрерывности соответствующего оператора, возникающего при доказательстве второй части теоремы 1 (при этом существенно используется вытекающее из неравенств (24) и (26) свойство оператора Φ переводить ограниченные множества пространства V в ограниченные).

Доказанные выше свойства оператора Φ и теорема Шаудера дают нам существование неподвижной точки у этого оператора – т.е. существование функции $w(x, t)$, принадлежащей пространству V и являющейся решением краевой задачи (21)–(23).

Из неравенства (24) вытекает, что для решений краевой задачи (21)–(23) будет выполняться оценка

$$\|w\|_{L_\infty(Q)} \leq \frac{N_2}{1 - N_1}.$$

Из этой оценки, в свою очередь, вытекает оценка

$$|\overline{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)| \leq a_0 \left(\frac{N_2}{1 - N_1} + N_0 \right). \quad (27)$$

Условие (19) и эта оценка дают равенство

$$c_0(\overline{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)) = \overline{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T).$$

Другими словами, найденное решение краевой задачи (21)–(23) будет решением уравнения

$$w_t - \Delta w + \frac{a(x) + \bar{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)}{u_1(x)} w = -[\bar{w}(x, T) + \bar{v}_0(x, T)]v_0.$$

Определим функцию $u(x, t)$ равенством $u(x, t) = w(x, t) + v_0(x, t)$. Очевидно, что для этой функции выполняются условия (12) и (13). Далее, будет выполняться равенство

$$u_t - \Delta u + \frac{a(x) + \bar{u}(x, T)}{u_1(x)} u = f. \quad (28)$$

Это равенство означает, что для функции $u(x, t)$ и функции $q(x)$, определенной равенством

$$q(x) = \frac{a(x) + \bar{u}(x, T)}{u_1(x)}, \quad (29)$$

уравнение (28) превратится в уравнение (11).

Умножим полученное уравнение (11) на функцию $\alpha(t)$ и проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[0, T]$. Обозначив для краткости через $\psi(x)$ функцию

$$\psi(x) = \int_0^T \alpha(t) u(x, t) dt,$$

после несложных преобразований получаем равенство

$$-\Delta(\psi - u_1) + q(x)(\psi - u_1) = 0. \quad (30)$$

Неравенство (27) и условия (16), (18) и (19) дают неравенство $q(x) > 0$ почти всюду на множестве $\bar{D}$. Далее, условие (20) и совпадение на боковой границе цилиндра Q функций $u(x, t)$ и $\mu(x, t)$ дают совпадение функций $\psi(x)$ и $u_1(x)$ на Γ . Это совпадение, неравенство $q(x) > 0$ и теорема единственности решений первой краевой задачи для эллиптических уравнений дают совпадение функций $\psi(x)$ и $u_1(x)$ почти всюду в области D .

Все сказанное означает, что функция $u(x, t)$, построенная с помощью решения краевой задачи (21)–(23), и функция $q(x)$, построенная по формуле (29), дадут требуемое решение обратной задачи (11)–(14).

Теорема полностью доказана.

Приведем простейший пример, показывающий, что множество исходных данных обратной задачи (11)–(14), для которых выполняются все условия теоремы 4, непусто.

Пусть в обратной задаче (11)–(14) область D лежит в некотором шаре $\{x : |x| \leq R\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, $f(x, t)$ и $u_0(x)$ – тождественно нулевые соответственно в $\bar{Q}$ и $\bar{D}$ функции, $u_1(x)$ есть функция

$$u_1(x) = k_0(|x|^2 + 1)^\lambda, \quad k_0 > 0, \quad \lambda \geq 1.$$

Далее, пусть $\bar{\mu}(t)$ и $\alpha(t)$ суть гладкие функции такие, что выполняется

$$\bar{\mu}(0) = 0, \quad \mu_0 = \int_0^T \bar{\mu}(t) \alpha(t) dt > 0.$$

Определим функцию $\mu(x, t)$:

$$\mu(x, t) = \frac{1}{\mu_0} \bar{\mu}(t) u_1(x).$$

Обозначим

$$\mu_1 = \max_{[0, T]} |\bar{\mu}(t)|.$$

Очевидны соотношения

$$a(x) = \Delta u_1 \geq m_0 = 2\lambda n, \quad N_0 \leq \frac{\mu_1 k_0 (R^2 + 1)^\lambda}{\mu_0}.$$

В качестве числа m_1 возьмем число λn . Имеет место неравенство

$$N_1 \leq \frac{a_0 k_0 \mu_1 (R^2 + 1)^{2\lambda}}{\lambda \mu_0 n}.$$

Очевидно теперь, что первое условие (19) будет заведомо выполняться при больших n .

При выполнении первого условия (19) имеет место неравенство

$$\frac{N_2}{1 - N_1} \leq \frac{a_0 k_0^2 \mu_1^2 (R^2 + 1)^{3\lambda}}{\mu_0 [\lambda \mu_0 n - a_0 k_0 \mu_1 (R^2 + 1)^{2\lambda}]}.$$

Вновь очевидно, что второе условие (19) также будет выполняться при больших n .

Возьмем теперь конкретные функции $\bar{\mu}(t)$ и $\alpha(t)$:

$$\bar{\mu}(t) = t, \quad \alpha(t) = t - t_0, \quad 0 < t_0 < \frac{2}{3}T.$$

Имеем

$$\mu_1 = T, \quad a_0 = 2T - t_0, \quad \mu_0 = \frac{2T^3 - 3t_0 T^2}{6}.$$

Числа m_0 и m_1 зафиксируем как и ранее: $m_0 = 2\lambda n$, $m_1 = \lambda n$. Имеют место неравенства

$$N_0 \leq \frac{6k_0 T (R^2 + 1)^\lambda}{2T^3 - 3t_0 T^2}, \quad N_1 \leq \frac{6k_0 T (2T - t_0) (R^2 + 1)^{2\lambda}}{\lambda n (2T^3 - 3t_0 T^2)},$$

$$\frac{N_2}{1 - N_1} \leq \frac{36k_0^2 T^2 (2T - t_0) (R^2 + 1)^{3\lambda}}{(2T^3 - 3t_0 T^2) [\lambda n (2T^3 - 3t_0 T^2) - 6k_0 T (2T - t_0) (R^2 + 1)^{2\lambda}]}.$$

Очевидно теперь, что условия (19) будут выполняться, если число T будет достаточно большим.

Сделаем два заключительных замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В обратной задаче (11)–(14) условия положительности функций $u_1(x)$ и $a(x)$ можно заменить условиями отрицательности. Далее, в отличие от работы [11], мы не требуем положительности функции $\alpha(t)$ на всем отрезке $[0, T]$. Эта функция может обращаться в нуль, может принимать и отрицательные значения (в то же время вследствие условий (16) и (20) она не может быть тождественно нулевой).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие гладкости на функцию $\alpha(t)$ в обратной задаче (11)–(14) можно ослабить, потребовав лишь выполнения условий $\alpha(t) \in L_\infty([0, T])$, $\alpha'(t) \in L_1([0, T])$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нахушев А. М. Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1995.
- [2] Дженалиев М. Т. К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Институт теоретической и прикладной математики, 1995.
- [3] Cannon J. R., Yin H. M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems // J. Differential Equations. 1989. V. 79. P. 266–288.
- [4] Chadam J. M., Peirce A., Yin H. M. The blowup property of solutions to some diffusion equation with localized nonlinear reactions // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 169. № 2. P. 313–328.
- [5] Kozhanov A. I. Inverse problem and “loaded” composite type equations // Нелинейные граничные задачи. 2000. Вып. 10. С. 109–116.
- [6] Kozhanov A. I. Nonlinear inverse problems for elliptic equations // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. V. 9. № 4. P. 413–424.
- [7] Шелухин В. В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 2. С. 191–207.
- [8] Шелухин В. В. Нелокальные по времени задачи для уравнений гидродинамики и вариационные принципы. Дисс. . . . д. ф.-м. н. Новосибирск, 1992.
- [9] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
- [10] Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки. М.: ВИНТИ, 1971.
- [11] Прилепко А. И., Костин А. Б. Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 3. С. 146–155.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Поступило
26.12.2001