Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Рекуррентные последовательности и мера иррациональности значений эллиптических интегралов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 785–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:35:54

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И МЕРА ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В. В. Зудилин

1. Введение. Производящая функция

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)(1 - \lambda_3 z)}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \quad (1)$$

соответствует рекуррентной последовательности

$$(n+1)u_{n+1} - b_1 \left(n + \frac{1}{2}\right)u_n + b_2 n u_{n-1} - b_3 \left(n - \frac{1}{2}\right)u_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

третьего порядка с начальными условиями

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{b_1}{2}, \quad u_2 = \frac{3b_1^2}{8} - \frac{b_2}{2}.$$

Будем считать числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различными по модулю и расположенными в порядке возрастания модулей:

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$$

(это естественное условие позволит в дальнейшем воспользоваться теоремой Пуанкаре). По теореме Виета имеем

$$b_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad b_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad b_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

В общей ситуации

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \quad (3)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00181.

является производящей функцией той же самой последовательности (2) (где вместо u подставлено t) с произвольными начальными данными t_0, t_1, t_2 . Эта функция (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3) y' - \frac{1}{2}(b_1 - 2b_2 z + 3b_3 z^2) y = A + Bz$$

или

$$\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3} (\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3} \cdot y)' = A + Bz,$$

где

$$A = t_1 - \frac{1}{2}b_1 t_0, \quad B = 2t_2 - \frac{3}{2}b_1 t_1 + b_2 t_0.$$

Поэтому

$$T(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3}} \left(\int_0^z \frac{(A + B\xi) d\xi}{\sqrt{1 - b_1 \xi + b_2 \xi^2 - b_3 \xi^3}} + C \right), \quad (4)$$

где $C = t_0$. Функция (1) получается из формулы (4) при $A = B = 0$ и $C = 1$. Введем также обозначения

$$V(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3}} \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1 - b_1 \xi + b_2 \xi^2 - b_3 \xi^3}},$$

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - b_1 z + b_2 z^2 - b_3 z^3}} \int_0^z \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - b_1 \xi + b_2 \xi^2 - b_3 \xi^3}}$$

для производящих функций последовательностей $\{v_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, соответствующих случаям $A = 1, B = C = 0$ и $A = 0, B = 1, C = 0$. Тогда любая производящая функция (4) записывается в виде

$$T(z) = AV(z) + BW(z) + CU(z).$$

Таким образом, любую последовательность $\{t_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющую рекуррентным соотношениям (2), можно представить в виде линейной комбинации последовательностей $\{v_n\}, \{w_n\}, \{u_n\}$, порожденных производящими функциями $V(z), W(z), U(z)$:

$$t_n = Av_n + Bw_n + Cu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda_3.$$

Это непосредственно следует из теоремы Пуанкаре [1, гл. V, § 5.2].

ЛЕММА 2. Для последовательностей $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{u_n} = A\alpha + B\beta + C,$$

где

$$\alpha = \int_0^{1/\lambda_3} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - b_1\xi + b_2\xi^2 - b_3\xi^3}}, \quad \beta = \int_0^{1/\lambda_3} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - b_1\xi + b_2\xi^2 - b_3\xi^3}}. \quad (6)$$

Для доказательства необходимо разложить функции $V(z), W(z), U(z)$ по дробным степеням $(1 - \lambda_3 z)$ в окрестности $z = 1/\lambda_3$ (это ближайшая к точке $z = 0$ особая точка этих функций).

ЛЕММА 3. Справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1} - \alpha u_{n+1}}{v_n - \alpha u_n} = \lambda_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1} - \beta u_{n+1}}{w_n - \beta u_n} = \lambda_2,$$

где числа α и β определяются формулами (6).

Действительно, последовательности $\{v_n - \alpha u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{w_n - \beta u_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2) и к ним применима теорема Пуанкаре. Остается воспользоваться результатом леммы 2.

Далее будем считать числа b_1, b_2, b_3 рациональными и обозначим через $d \geq 1$ наименьший общий знаменатель чисел $b_1/4, b_2/4, b_3/4$. Раскладывая функцию $U(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{b_1 z - b_2 z^2 + b_3 z^3}{4} \right)^k,$$

получаем, что знаменатель u_n делит d^n при $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому

$$V(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m \cdot \int_0^z \sum_{l=0}^{\infty} u_l \xi^l = \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{u_{l-1}}{l} z^l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m+l=n \\ m \geq 0, l \geq 1}} \frac{u_m u_{l-1}}{l} \right) z^n,$$

т.е. знаменатель v_n делит $d^n D_n$, где D_n — наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$. Аналогично, знаменатель w_n делит $d^n D_n$ при $n \geq 0$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ числа

$$u'_n = d^n D_n u_n, \quad v'_n = d^n D_n v_n, \quad w'_n = d^n D_n w_n \quad (7)$$

являются целыми. В общем случае, если $A, B, C \in \mathbb{Z}$, то число $t'_n = d^n D_n t_n$ является целым.

Пусть числа α и β определяются формулами (6). Последовательности

$$r_n = d^n D_n (v_n - \alpha u_n), \quad s_n = d^n D_n (w_n - \beta u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

представляют собой линейные формы с целыми коэффициентами от чисел α и β соответственно. Для коэффициентов (7) этих форм согласно лемме 1 выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u'_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|v'_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w'_n|} = de|\lambda_3|, \quad (8)$$

а по лемме 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|r'_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|s'_n|} = de|\lambda_2|. \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались следствием из асимптотического закона распределения простых чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n} = e.$$

Если теперь воспользоваться результатом Г. В. Чудновского [2, лемма 3.5], примененным к оценкам (8) и (9), то мы получим следующее общее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $de|\lambda_2| < 1$. Тогда мера иррациональности чисел α , β , а также любого числа вида $A\alpha + B\beta$, $A, B \in \mathbb{Z}$, $A^2 + B^2 \neq 0$, равна

$$\mu = 1 - \frac{1 + \log d + \log |\lambda_3|}{1 + \log d + \log |\lambda_2|}.$$

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $q_* = q_*(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| (A\alpha + B\beta) - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$$

для всех целых $q \geq q_*$ и для всех $p \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сказанное выше легко переносится на случай, когда $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Q}[i]$.

2. Приложение. В качестве иллюстрации теоремы 1 рассмотрим случай $b_1 = 4b$, $b_2 = 0$, $b_3 = -4$, где целое число b удовлетворяет неравенству $b \geq 8$. Тогда $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\lambda_2 e < 1$, что позволяет воспользоваться теоремой 1. Для чисел α, β получаем следующие выражения:

$$\alpha = \int_0^{1/\lambda_3} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 4b\xi + 1}}, \quad \beta = \int_0^{1/\lambda_3} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 4b\xi + 1}}.$$

Если положить

$$x = \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 4b\xi + 1}},$$

то

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 4y^3 - 4by + 1,$$

откуда $y = \wp(x+x_0)$, где $\wp(\cdot)$ — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 4b$, $g_3 = -1$ и некоторыми периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, причем $\omega_1, \omega_2/i \in \mathbb{R}_+$, а x_0 — один из двух нулей этой функции, поскольку $y = 0$ при $x = 0$. Если $x = \alpha$, т.е. $y = 1/\lambda_3$ — корень многочлена $4y^3 - 4by + 1$, расположенный между двумя другими его корнями, то $\alpha + x_0 = \omega_1 + \omega_2$. Таким образом, α — действительное число, равное расстоянию от $\omega_1 + \omega_2$ (центра основного параллелограмма периодов) до одного из ближайших нулей функции Вейерштрасса. Отметим, что нули x_0 и $2\omega_1 + 2\omega_2 - x_0$ функции Вейерштрасса симметричны относительно точки $\omega_1 + \omega_2$.

Окончательно, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\wp(\cdot)$ – функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 4b$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 8$, и $g_3 = -1$, и пусть $y_2 < y_3$ – положительные корни многочлена $4y^3 - g_2y - g_3$. Тогда расстояние

$$\alpha = \int_0^{y_2} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}$$

от центра основного параллелограмма периодов до одного из ближайших нулей функции $\wp(\cdot)$ имеет меру иррациональности

$$\mu = 1 - \frac{1 - \log y_2}{1 - \log y_3}.$$

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $q_* = q_*(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$$

для всех целых $q \geq q_*$ и для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Приведем в заключение численные значения меры иррациональности μ с точностью до 10^{-4} при некоторых значениях b .

b	8	9	10	12	15
μ	131.8246	49.7916	32.8300	21.3450	15.4781

b	20	30	50	100	200
μ	11.8407	9.2698	7.5906	6.3679	5.6598

Теорема 2 настоящей заметки анонсирована в тезисе [3]. В работе [4] подробно рассмотрен случай рекуррентной последовательности порядка $n \geq 3$ и вытекающие оценки меры иррациональности чисел

$$\int_0^{y_1} \frac{\kappa(\xi)}{(a\xi^m - b\xi + 1)^s} d\xi, \quad s \in (0, 1) \cap \mathbb{Q},$$

где степень многочлена $\kappa(y) \in \mathbb{I}[y]$ меньше $m - 1$ и y_1 – наименьший по модулю корень многочлена $ay^m - by + 1$, при некотором выборе рациональных a и b .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ipsun.ras.ru

Поступило
20.01.97

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. 3 изд. М.: Наука, 1967.
2. Chudnovsky G. V. // Lecture Notes in Math. 1982. V. 925. P. 299–322.
3. Зудилин В. В. О мере иррациональности значений эллиптических интегралов // Материалы Международных научных чтений по аналитической теории чисел и приложениям. М.: МГУ, 1997. С. 20–21.
4. Зудилин В. В. Разностные уравнения и мера иррациональности чисел // Тр. МИРАН. Т. 218 (в печати).