Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, О числе частиц в конденсате слабонеидеального бозе-газа, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 790–792

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:51:36

О ЧИСЛЕ ЧАСТИЦ В КОНДЕНСАТЕ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов

В статистической физике слабонеидеального бозе-газа [1], [2] важную роль играет величина, равная числу частиц, имеющих нулевой импульс, и называемая числом частиц в конденсате. Данная величина выражается через волновую функцию системы N частиц $\Psi_N(x_1, \dots, x_N)$ ($x_1, \dots, x_N$ — координаты частиц, принадлежащие пространству с мерой M) следующим образом:

$$n_f = N \int dx dy d\xi_1 \cdots d\xi_{N-1} \Psi_N(x, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}) \Psi_N^*(y, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}) \frac{f^*(x)f(y)}{\int d\xi |f(\xi)|^2} \quad (1)$$

при $f(x) = 1$.

В этой работе строится асимптотическая формула для n_f в случае, когда N -частичная система с потенциалом взаимодействия между частицами порядка $O(1/N)$ находится во внешнем потенциале порядка $O(1)$. Отметим, что при произвольном f величина (1) имеет физический смысл числа частиц, находящихся в состоянии с волновой функцией f .

Построенная в [3], [4] асимптотика решения N -частичного уравнения Шрёдингера с точностью $O(N^{-m/2})$ имеет вид

$$\Psi_N = K_{\varphi, N}(g^{(0)} + N^{-1/2}g^{(1)} + \dots + N^{-(m-1)/2}g^{(m-1)}) + O(N^{-m/2}), \quad (2)$$

где $\varphi \in L^2(M)$, $\|\varphi\| = 1$, а через $K_{\varphi, N}$ обозначен канонический оператор, имеющий следующий вид. Обозначим через F_{φ} подпространство пространства Фока F [5], состоящее из всех наборов $(w_0, w_1, \dots)$ симметричных по $x_1, \dots, x_p \in M$ комплексных функций $w_p(x_1, \dots, x_p)$, для которых выполнены условия

$$\int dx_1 \varphi^*(x_1) w_p(x_1, \dots, x_p) = 0, \quad (w, w) \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \int dx_1 \cdots dx_p |w_p(x_1, \dots, x_p)|^2 < \infty.$$

Оператор $K_{\varphi, N}: F_{\varphi} \rightarrow L^2(M^N)$ имеет вид

$$(K_{\varphi, N}w)(x_1, \dots, x_N) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{\sqrt{N^p p!}} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_p \leq N} w_p(x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \prod_{i \neq i_1, \dots, i_p} \varphi(x_i).$$

Сопоставим каждой функции $f \in L^2(M)$ операторы рождения и уничтожения $a_f^{\pm}: F_{\varphi} \rightarrow F_{\varphi}$ вида

$$\begin{aligned} (a_f^+ w)_p(x_1, \dots, x_p) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p \left(f(x_k) - \varphi(x_k) \int f(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right) \\ &\quad \times w_{p-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p), \\ (a_f^- w)_{p-1}(x_1, \dots, x_{p-1}) &= \sqrt{p} \int dx f^*(x) w_p(x, x_1, \dots, x_{p-1}). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Королевского общества Великобритании.

Обозначим через $\hat{n}: F_\varphi \rightarrow F_\varphi$ оператор вида $(\hat{n}w)_p = pw_p$. Приведем асимптотическую формулу для величины (1), отвечающей волновой функции (2). Для любого оператора $A: F_\varphi \rightarrow F_\varphi$ введем обозначение

$$\langle A \rangle = \frac{(g, Ag)}{(g, g)},$$

где $g = g^{(0)} + N^{-1/2}g^{(1)} + \dots + N^{-(m-1)/2}g^{(m-1)}$. Пусть при любом $k = \overline{0, m-1}$ для любого $s > 0$ ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} p^s \int dx_1 \dots dx_p |g_p^{(k)}(x_1, \dots, x_p)|^2$$

сходится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\|f\| = 1$ выполнено соотношение

$$n_f = |(f, \varphi)|^2(N - \langle \hat{n} \rangle) + N^{1/2}(\varphi, f)\langle a_f^- \rangle + N^{1/2}(f, \varphi)\langle a_f^+ \rangle + \langle a_f^+ a_f^- \rangle + O(N^{-1/2}). \quad (3)$$

Доказательство предложения 1 следует из правил коммутации операторов рождения и уничтожения с оператором $K_{\varphi, N}$, полученных в [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f = \varphi$. Тогда $a_\varphi^\pm = 0$, поэтому формула (3) принимает вид $N - \langle \hat{n} \rangle + O(N^{-1/2})$. Слагаемое порядка $O(1)$ в данной формуле зависит только от $g^{(0)}$ и не зависит от $g^{(1)}, \dots, g^{(m-1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В общем случае слагаемое порядка $O(1)$ в формуле (3) зависит от $g^{(0)}$ и $g^{(1)}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f_1, f_2, f_3, \dots$ – ортонормированный базис в $L^2(M)$. Тогда

$$\sup_f n_f = N - \sum_{i=1}^{\infty} \langle (a_{f_i}^+ - \langle a_{f_i}^+ \rangle) (a_{f_i}^- - \langle a_{f_i}^- \rangle) \rangle + O\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Величина (4) не зависит от выбора базиса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Слагаемое порядка $O(1)$ в формуле (4) не зависит от $g^{(1)}, \dots, g^{(m-1)}$.

Схема доказательства формулы (4) заключается в следующем. Величина n_f (3) представляется в виде

$$n_f = \frac{N(f, \rho f)}{(f, f)}$$

для некоторого оператора ρ , действующего в $L^2(M)$. Предложение 1 позволяет определить вид этого оператора с точностью $O(1/N^{3/2})$. Применяя теорию возмущений, находим спектр оператора ρ с точностью $O(1/N^{3/2})$, а значит, и его норму, которая равна $\sup n_f$, с этой же точностью.

Найдем величины (3) и (4) для случая, рассмотренного в работе [3]. Вектор $g^{(0)}$ имеет следующий вид. Пусть $G_p(x)$, $p = \overline{0, \infty}$, – полная система функций в $L^2(M)$, $F_p(x) \in L^2(M)$, $p = \overline{0, \infty}$, причем

$$G_0(x) = \varphi^*(x), \quad F_0(x) = -\varphi(x), \quad \sum_{p=1}^{\infty} dx |F_p(x)|^2 < \infty,$$

$$\int dx (G_p^*(x)G_q(x) - F_p^*(x)F_q(x)) = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, \infty},$$

$$\int dx (F_p(x)G_q(x) - F_q(x)G_p(x)) = 0, \quad p, q = \overline{0, \infty}.$$

Каждому набору чисел $(\nu_1, \nu_2, \dots)$, $\sum \nu_k \leq N$, отвечает вектор $g^{(0)}$ вида

$$g_{\nu_1 \nu_2 \dots}^{(0)} = \prod_{p=1}^{\infty} (a_{G_p}^+ - a_{F_p}^-) \nu_p e^{\frac{1}{2} a^+(FG^{-1})a^+} \Phi^{(0)},$$

где $\Phi^{(0)}$ – вакуумный вектор пространства Фока вида $(1, 0, 0, \dots)$, а $a^+(FG^{-1})a^+$ – оператор вида

$$a^+(FG^{-1})a^+ = \int dx dy a^+(x)(FG^{-1})(x, y)a^+(y),$$

функция FG^{-1} однозначно определяется из соотношения

$$\int (FG^{-1})(x, y)G_p(y) dy = F_p(x), \quad p = \overline{0, \infty}.$$

В [3] доказано, что функция $K_{\varphi, N}g^{(0)}$ является асимптотическим стационарным решением N -частичного уравнения Шрёдингера, если φ – решение уравнения Хартри, а (F_p, G_p) – решение системы в вариациях для системы, состоящей из уравнения Хартри и уравнения, ему сопряженного.

Из предложения 1 вытекает, что величина n_{φ} для волновой функции $K_{\varphi, N}g^{(0)}$ имеет следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполнены соотношения*

- 1) $n_{\varphi} = N - \sum_{p=1}^{\infty} \nu_p \int dx (|G_p(x)|^2 + |F_p(x)|^2) - \sum_{p=1}^{\infty} \int dx |F_p(x)|^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right);$
- 2) $\sup_f n_f = n_{\varphi} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $f \neq \varphi$ средние значения $\langle a_f^{\pm} \rangle$ в формуле (3) порядка $O(1/N^{1/2})$ и зависят от первой поправки $g^{(1)}$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Университет Бристоля (Великобритания)
E-mail: olshv@ms2.inr.ac.ru

Поступило
 04.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. № 1. С. 77–90.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния. М.: Наука, 1976.
3. Маслов В. П., Шведов О. Ю. // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266–288.
4. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 2. P. 173–216.
5. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.