Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов, Асимптотическое поведение спектральной функции одного семейства операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 793–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:52:52

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

А. С. Печенцов, А. Ю. Попов

В $L_2[0, +\infty)$ рассмотрим оператор L , задаваемый дифференциальным выражением

$$ly(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

и граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0.$$

Предполагается, что $\alpha \in \mathbb{R}$, q — действительнoзначная функция, непрерывная на $[0, +\infty)$. Обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ решение уравнения $ly = \lambda y$ с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \varphi'(0, \lambda) = -\cos \alpha, \quad \theta(0, \lambda) = \cos \alpha, \quad \theta'(0, \lambda) = \sin \alpha.$$

Функции φ, θ , а также $\rho, m, \hat{f}$ (они появятся ниже) зависят, естественно, и от α , но мы будем опускать аргумент α для того, чтобы не перегружать текст работы обозначениями. Хорошо известна теорема Г. Вейля о представлении произвольной функции $f \in L_2[0, +\infty)$ в виде интеграла по спектру оператора L .

ТЕОРЕМА [1]–[3]. *Существует неубывающая и ограниченная снизу на $\mathbb{R}$ функция ρ , для которой справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует*

$$\hat{f}(\lambda) \Big|_{L_2(\mathbb{R}, d\rho)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) \varphi(x, \lambda) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \varphi(x, \lambda) dx,$$

а функция f представляется как предел в $L_2[0, +\infty)$ преобразования Фурье по мере $d\rho$ от $\hat{f}$:

$$f(x) \Big|_{L_2(\mathbb{R}^+)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda).$$

2. *Если $\sin \alpha \neq 0$, то для функции $m(z)$, определяемой в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ равенством*

$$m(z) = -\operatorname{ctg} \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{z - \lambda}, \quad (1)$$

имеем $\theta(x, z) + m(z)\varphi(x, z) \in L_2[0, +\infty)$ $\forall z: \operatorname{Im} z > 0$.

3. *Для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}$, не содержащего спектра оператора L , имеем $\int_E d\rho(\lambda) = 0$.*

Утверждение 3 теоремы показывает, что мера $d\rho$ сосредоточена на спектре оператора L . Функция $\rho(\lambda)$ называется *спектральной функцией*, а $m(z)$ — *функцией Вейля–Титчмарша* оператора L . Из представления (1) видно, что функция $m(z)$ аналитична в верхней полуплоскости и что если на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$ существует

$$\lim_{y \rightarrow +0} m(\lambda + iy) = m(\lambda) \in C(a, b),$$

то $\rho(\lambda)$ имеет на этом интервале непрерывную производную, которая связана с $m(\lambda)$ соотношением

$$\rho'(\lambda) = \frac{-\operatorname{Im} m(\lambda)}{\pi}, \quad \lambda \in (a, b). \quad (2)$$

Исследование свойств функции $p(\lambda)$, а тем более ее отыскание по потенциалу q и числу α , определяющим оператор L , является, как правило, очень трудной задачей. Известны общие теоремы Б. М. Левитана и В. А. Марченко (см. монографии [4]–[6]) об оценках $\rho(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) - \rho(-\infty) &= o(\exp(-a\sqrt{|\lambda|})) \quad (\lambda \rightarrow -\infty) \quad \forall a > 0, \\ \rho(\lambda) &= \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi \sin^2 \alpha} + \rho(-\infty) + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + o(1) \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

(Считается, что произведена нормировка $\rho(0) = 0$.)

Самый простой случай $q(x) \equiv 0$ был исследован Титчмаршем в [7]. Оказалось, что при $\lambda > 0$

$$\rho'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)},$$

а при $\lambda < 0$ случаи $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ резко различаются:

$$\begin{aligned} \rho'_\alpha(\lambda) &\equiv 0, \quad \lambda < 0, \quad \operatorname{ctg} \alpha < 0, \\ \rho'_\alpha(\lambda) &= \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} \delta(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda < 0, \quad \operatorname{ctg} \alpha > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}^2 \alpha$, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

В этой работе мы исследуем случай $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ и интересуемся поведением производной спектральной функции на $(-\infty, 0)$ для потенциалов специального вида.

Вызывает интерес следующая задача общего вида.

Пусть $Q \in C(0, +\infty)$. Через $\rho_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda)$ обозначим спектральную функцию оператора, задаваемого дифференциальным выражением

$$-y''(x) + \varepsilon Q(x)y(x)$$

и граничным условием

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \operatorname{ctg} \alpha > 0.$$

Верно ли, что на $(-\infty, 0)$ семейство обобщенных функций $\rho'_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda)$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ (в каком-нибудь “разумном” смысле) к производной спектральной функции (3) невозмущенного оператора $-y''$? Положительное решение этой задачи позволило бы для функций $f \in L_2[0, +\infty)$ писать “приближенное спектральное разложение” в виде

$$f(x) = \int_{\lambda_0 - \beta}^{\lambda_0 + \beta} + \int_{-\beta}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) \varphi_\alpha(x, \lambda) d\rho_\alpha(\varepsilon, Q, \lambda) \quad (\beta = \beta(\varepsilon) \downarrow 0),$$

опуская интеграл по дополнению к малой окрестности спектра невозмущенного оператора. Насколько нам известно, такие исследования ранее не проводились. Титчмарш в работе [7] выразил через функции Ганкеля 1-го рода функцию Вейля–Титчмарша $m(\lambda, \varepsilon)$ оператора

$$-y'' - \varepsilon xy, \quad \varepsilon > 0, \quad y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \operatorname{ctg} \alpha > 0.$$

Он установил, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$m(\lambda, \varepsilon) = \frac{H_{1/3}^{(1)}(A) \sin \alpha - \sqrt{\lambda} H_{-2/3}^{(1)}(A) \cos \alpha}{H_{1/3}^{(1)}(A) \cos \alpha + \sqrt{\lambda} H_{-2/3}^{(1)}(A) \sin \alpha}, \quad (4)$$

где $A = 2\lambda^{3/2}/(3\varepsilon)$, $\lambda^{3/2} = -i|\lambda|^{3/2}$ при $\lambda < 0$, $H_p^{(1)}$ — функции Ганкеля 1-го рода.

С помощью представления (4) в работе [7] было доказано, что в некоторой окрестности точки λ_0 у функций $m(\lambda, \varepsilon)$ имеется лишь один полюс $\lambda_0(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha + O(\varepsilon^2) \quad (\varepsilon \rightarrow +0),$$

а мнимая часть его удовлетворяет неравенству

$$-\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{\varepsilon}\right) \leq \operatorname{Im} \lambda_0(\varepsilon) < 0.$$

Но поведение $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ при $\lambda \in (-\infty, 0)$ и $\varepsilon \rightarrow +0$ Титчмарш не исследовал. Нам удалось в определенном смысле почти до конца решить эту задачу. Несмотря на наличие явной формулы для $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ (ввиду (2) имеем $\rho'(\lambda, \varepsilon) = -\operatorname{Im} m(\lambda, \varepsilon)/\pi$, так как из (4) следует, что функция $m(\lambda, \varepsilon)$ аналитична в замкнутой верхней полуплоскости с выброшенной точкой 0) это оказалось далеко не просто. Дело в том, что если подставить в (4) известные асимптотические ряды для $H_{1/3}^{(1)}(A)$ и $H_{-2/3}^{(1)}(A)$ при $A \rightarrow -i\infty$ (по отрицательной части мнимой оси), то для $m(\lambda, \varepsilon)$ получится асимптотический ряд, все члены которого вещественны. Следовательно, указанный ряд не дает никакой информации о $\rho'(\lambda, \varepsilon)$.

Мы получили следующее представление для функции $\rho'(\lambda, \varepsilon)$, справедливое при любых $\lambda < 0$ и $\varepsilon > 0$:

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = \frac{\pi^{-1} \tau (\beta_{1,1}(a) \beta_{2,2}(a) + \beta_{1,2}(a) \beta_{2,1}(a))}{(\beta_{1,1}(a) \cos \alpha - \beta_{1,2}(a) \tau \sin \alpha)^2 + (\beta_{2,1}(a) \cos \alpha + \beta_{2,2}(a) \tau \sin \alpha)^2}, \quad (5)$$

где $\tau = \sqrt{-\lambda}$, $a = |A| = 2\tau^3/(3\varepsilon)$,

$$\beta_{1,1}(a) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B_{1/3}^-(a)}{\Omega_{1/3}(a)}, \quad \beta_{1,2}(a) = \frac{\Omega_{2/3}(a)}{\Omega_{1/3}(a)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B_{2/3}^-(a)}{\Omega_{1/3}(a)},$$

$$\beta_{2,1}(a) = \frac{B_{1/3}^+(a)}{2\Omega_{1/3}(a)}, \quad \beta_{2,2}(a) = \frac{B_{2/3}^+(a)}{2\Omega_{1/3}(a)},$$

$$\Omega_p(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(a \cos t) \cos(pt) dt,$$

$$B_p^-(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-a \operatorname{ch} t) \operatorname{sh}(pt) dt, \quad B_p^+(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-a \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(pt) dt.$$

Представление (5) позволило доказать формулируемые ниже теоремы 1–3.

ТЕОРЕМА 1. При любом $\varepsilon > 0$ справедлива асимптотика

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) \sim \frac{\exp\left(-\frac{4}{3} \frac{|\lambda|^{3/2}}{\varepsilon}\right)}{\pi \sqrt{-\lambda} \sin^2 \alpha} \quad (\lambda \rightarrow -\infty).$$

ТЕОРЕМА 2. Существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , эффективно зависящие от α , такие, что при $\varepsilon \in (0, c_1)$ выполняются оценки

$$\begin{aligned}\rho'(\lambda, \varepsilon) &= O\left(|\lambda|^{-1/2} \exp\left(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\right)\right), & \lambda \in (-\infty, -2 \operatorname{ctg}^2 \alpha), \\ \rho'(\lambda, \varepsilon) &= O\left(|\lambda|^{1/2} \exp\left(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\right)\right), & \lambda \in \left(-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha, -c_2 \varepsilon^{2/3}\right), \\ \rho'(\lambda, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{1/3}), & \lambda \in [-c_2 \varepsilon^{2/3}, 0).\end{aligned}$$

Постоянные в символах O зависят только от α и эффективны.

Обозначим $T(\lambda, \varepsilon) = \beta_{1,1}(a) \cos \alpha - \beta_{1,2}(a) \tau \sin \alpha$. Ответ на вопрос о поведении $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ на “критическом” отрезке $I = [-2 \operatorname{ctg}^2 \alpha, -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha]$ дает

ТЕОРЕМА 3. Существует положительная постоянная c_3 , эффективно зависящая от α , такая, что при любых $\varepsilon \in (0, c_3)$ справедливы следующие утверждения.

1. Функция $T(\lambda, \varepsilon)$ имеет на отрезке I единственный нуль $\lambda_1(\varepsilon)$ с асимптотикой

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \alpha + O(\varepsilon^2).$$

2. При любых $d > 0$, $\lambda \in I \setminus I_{d,\varepsilon}$ ($I_{d,\varepsilon} = [\lambda_1(\varepsilon) - d, \lambda_1(\varepsilon) + d]$) выполняется оценка

$$\rho'(\lambda, \varepsilon) = O\left(d^{-2} \exp\left(-\frac{4|\lambda|^{3/2}}{3\varepsilon}\right)\right).$$

3. Если

$$\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha}{3\varepsilon}\right) \leq d \leq \varepsilon^2,$$

то

$$\int_{I_{d,\varepsilon}} d\rho(\lambda) = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} + O(\varepsilon).$$

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве $C^*(I)$ семейство функций $\rho'(\lambda, \varepsilon)$ слабо сходится к

$$\frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} \delta(\lambda - \lambda_0)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: pech@imiss.math.msu.su

Поступило
09.12.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weyl H. // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–269.
2. Weyl H. // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1909. P. 37–64.
3. Weyl H. // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1910. P. 442–467.
4. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
5. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
6. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
7. Titchmarsh E. C. // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1951. V. 207. P. 321–328.