Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тарасов, О сложности выпуклых стереоэдров, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1563>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:25:20

О СЛОЖНОСТИ ВЫПУКЛЫХ СТЕРЕОЭДРОВ

А. С. Тарасов

1. Введение. Счетное семейство $\mathcal{T} = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ замкнутых d -мерных многогранников называется *разбиением* d -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, если

(T1) многогранники покрывают пространство:

$$\bigcup_{P_i \in \mathcal{T}} P_i = \mathbb{R}^d;$$

(T2) никакие два многогранника не имеют общих внутренних точек:

$$\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset, \quad P_i, P_j \in \mathcal{T}.$$

Мы везде будем предполагать, что многогранники P_i ограничены и выпуклы.

Разбиение $\mathcal{T}$ называется *нормальным* (в англоязычной литературе – стандартным), если

(T3) любые два многогранника $P_i, P_j \in \mathcal{T}$ либо не пересекаются вовсе, либо их пересечение $P_i \cap P_j = F^m$ есть целая грань F^m размерности m , $0 \leq m \leq d-1$, общая для обоих многогранников.

В силу (T3) для каждой $(d-1)$ -грани F^{d-1} многогранника P_i в нормальном разбиении $\mathcal{T}$ найдется кроме P_i один и только один многогранник P_j , имеющий эту же грань.

(T4) Разбиение $\mathcal{T}$ называется *изоэдральным*, если для любых двух многогранников P и P' разбиения существует симметрия разбиения $\gamma \in \text{Sym}(\mathcal{T})$, переводящая P в P' : $\gamma(P) = P'$ и $\gamma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многогранник размерности d , допускающий изоэдральное разбиение пространства $\mathbb{R}^d$, называется *стереоэдром*.

Стереоэдр есть ограниченный конечный многогранник. Для выпуклых нормальных стереоэдров имеется оценка сверху $f(h, d)$ для числа $(d-1)$ -граней, зависящая только от размерности d и индекса h трансляционной подгруппы T в группе $\text{Sym}(\mathcal{T})$ (см. [1], а также [2], [3]):

$$f(h, d) = 2(2^d - 1) + (h - 1)2^d. \quad (1)$$

В действительности оценка (1) справедлива не только для изоэдральных разбиений, но и для разбиений, которые распадаются на h решеток выпуклых многогранников.

Так как группа симметрий $\text{Sym}(\mathcal{T})$ изоэдрального разбиения – кристаллографическая, то по теореме Шенфлиса–Бибера (см. [4], [5]) в $\text{Sym}(\mathcal{T})$ содержится подгруппа T параллельных переносов конечного индекса $h = \#(\text{Sym}(\mathcal{T})/T)$.

Если $h = 1$, то $\text{Sym}(\mathcal{T}) = T$ есть группа параллельных переносов, и мы имеем известную оценку Минковского для числа граней параллелоэдра, которая является точной. Если $h \geq 1$, то оценка (1) перестает быть точной, по-видимому, для любого допустимого значения h .

С другой стороны, для любой кристаллографической группы, действующей в $\mathbb{R}^d$, индекс ее трансляционной подгруппы ограничен константой $H = H(d)$, зависящей только от размерности. Таким образом, из оценки (1) следует зависящая лишь от размерности оценка сверху $f(d)$ для числа $(d-1)$ -граней выпуклого стереоэдра:

$$f(d) = 2^d(H+1) - 2. \quad (2)$$

Так как $H(2) = 12$, а $H(3) = 48$, то оценка Делоне (2) дает при $d = 2$ $f(2) = 50$ и при $d = 3$ $f(3) = 390$. В то же время максимальное количество сторон (плоского) стереоэдра равно 6, а количество граней у известных на сегодня 3-мерных стереоэдров не превышает 38 (см. [6]).

Задача статьи – получить оценку (3), анонсированную в [7]. Эта оценка является улучшением оценки (2). Так согласно (3) $f(2) = 44$ и $f(3) = 378$.

2. Основная теорема. Пусть $T = \langle t_1, \dots, t_d \rangle$ – трансляционная подгруппа кристаллографической группы $\text{Sym}(\mathcal{T})$.

Семейство многогранников изоэдрального разбиения распадается на h смежных классов по подгруппе T . Заметим, что объем стереоэдра равен $V_P = V_T/h$, где V_T – объем основного параллелепипеда решетки T .

ТЕОРЕМА 1. Число $(d-1)$ -мерных граней выпуклого нормального d -мерного стереоэдра не превышает

$$f(d) = 2^d \left(H - \frac{1}{2} \right) - 2. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство оценки построено следующим образом. В соответствии с тем, как группа $\text{Sym}(\mathcal{T})$ разбивается на h смежных классов по T (смежных решеток), совокупность многогранников разбиения $\mathcal{T}$ распадается на h совокупностей $\mathcal{T}_i$ (решеток стереоэдров). Пусть $P \in \mathcal{T}_i$. В [4] доказано, что число стереоэдров из той же решетки $\mathcal{T}_i$, имеющих с P общую $(d-1)$ -грань, не превышает $2(2^d - 1)$. Далее, число стереоэдров из любой другой решетки $\mathcal{T}_j$, $j \neq i$, имеющих с P общую $(d-1)$ -грань, не превышает 2^d . Суммируя по классам смежности, получаем оценку (1). В нашей работе оценка (1) будет снижена за счет уменьшения вклада во множество граней со стороны стереоэдров из той же решетки, что и P , а также из смежной решетки, получаемой из данной инверсией, при условии $h \geq 2^d d!$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Объем d -мерного симплекса с вершинами в точках решетки T кратен $V_T/d!$ (см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [9]. Объем выпуклой фигуры, содержащей d отрезков, не меньше объема симплекса, у которого все d ребер, выходящих из одной вершины, равны и параллельны данным отрезкам.

ЛЕММА 1. Если индекс h , $h \geq d!$, то в разбиении $\mathcal{T}$ стереоэдр $P \in \mathcal{T}_i$ не может иметь более $2(2^{d-1} - 1)$ общих граней со стереоэдрами из той же решетки $\mathcal{T}_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем говорить, что два стереоэдра P' и P'' из одной решетки эквивалентны по mod 2, если $P' = P'' + \mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ – вектор решетки T , имеющий лишь четные координаты: $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0} \pmod{2}$. Тогда стереоэдры данной решетки $\mathcal{T}_i$ распадаются на 2^d классов эквивалентности по mod 2.

В [1] было доказано, что данный стереоэдр $P \in \mathcal{T}_i$ в каждом классе эквивалентности решетки $\mathcal{T}_i$ не может иметь более 1 соседа по $(d-1)$ -грани, если P не принадлежит этому классу, и не может иметь ни одного соседа из того же класса эквивалентности.

Доказательство леммы основано на следующем замечании. Пусть многогранник P имеет общую $(d-1)$ -грань F с многогранником $P_t = P + t$, где $t \in T \subseteq \text{Sym}(\mathcal{T})$. Образ этой грани $F - t$ является также $(d-1)$ -гранью стереоэдра P . Возьмем точки $M \in F - t$ и $M' = M + t \in F$. Мы видим, что для трансляционного вектора смежности t стереоэдра P найдется пара точек M, M' такая, что $\overrightarrow{MM'} = t$ и $M, M' \in P$.

Так как P имеет не более двух общих $(d-1)$ -граней со стереоэдрами из чужого класса эквивалентности и ни одной общей $(d-1)$ -грани со стереоэдрами из своего класса эквивалентности, то стереоэдр P и смежные с ним стереоэдры принадлежат попарно различным классам эквивалентности. Пусть стереоэдр P имеет более $2(2^{d-1} - 1)$ граней, общих со стереоэдрами из той же решетки, т.е. со стереоэдрами вида $P + T$.

В любой $(d-1)$ -мерной подрешетке решетки T лежит не более 2^{d-1} классов эквивалентности mod 2. Поэтому множество всех трансляционных векторов смежности t_i не может лежать в одном $(d-1)$ -мерном подпространстве и, следовательно, векторы $t_i = \overrightarrow{M_i M'_i}$ линейно независимы, где $M_i, M'_i \in P$. Поэтому для объема справедлива оценка $V_P > V(\text{Conv}(\{\bigcup_i [M_i, M'_i]\})) \neq 0$. В силу предложения 2 объем $V(\text{Conv}(\{\bigcup_i [M_i, M'_i]\}))$ не меньше объема V_s невырожденного симплекса S , натянутого на d линейно независимых векторов t_i , $i = 1, 2, \dots, d$. Так как $t_i \in T$, то $V_s \geq V_T/d!$, где V_T – объем фундаментального параллелепипеда решетки T .

Так как $h \geq d!$, то

$$V_P > V\left(\text{Conv}\left(\left\{\bigcup_i [M_i, M'_i]\right\}\right)\right) \geq \frac{1}{d!} V_T \geq \frac{1}{h} V_T,$$

что противоречит соотношению $V_P = V_T/h$. Лемма 1 доказана.

Допустим, что в группе $\text{Sym}(\mathcal{T})$ имеется движение γ , которое есть суперпозиция некоторой инверсии в точке и трансляции (каждое из них в отдельности может не принадлежать группе $\text{Sym}(\mathcal{T})$). С другой стороны, такая суперпозиция γ может быть представлена в виде чистой инверсии (вообще говоря, в другой точке).

ЛЕММА 2. Пусть индекс h , $h \geq 2^d d!$, и группа $\text{Sym}(\mathcal{T})$ содержит инверсию γ . Обозначим через $I(P)$ множество всех стереоэдров из решетки $\gamma(P) + T$, которые имеют с P общую $(d-1)$ -грань. Тогда $\#(I(P)) \leq 2^{d-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка O – центр тяжести многогранника P , которая в силу выпуклости P есть внутренняя точка многогранника P с центром O .

Пусть P_i – стереоэдр из $I(P)$, смежный с P по общей $(d-1)$ -грани F_i , и пусть $\gamma_i \in \text{Sym}(\mathcal{T})$ такое, что $\gamma_i(P) = P_i$. Инволюция γ_i переводит грань F_i в себя. Следовательно, единственная неподвижная точка M_i инверсии γ_i является внутренней точкой грани F_i . Заметим, что M_i – середина отрезка OO_i , а вектор $\overrightarrow{O_i O_j}$ – примитивный вектор решетки T , т.е. $\overrightarrow{O_i O_j} \not\equiv 0 \pmod{2}$ (доказательство см. в [1]–[3]).

Предположим, что P имеет больше 2^{d-1} граней, общих со стереоэдрами из решетки $I(P)$, и, следовательно, столько же точек O_i . Отсюда, так как центры O_i принадлежат попарно различным классам эквивалентности по mod 2, то множество всех центров O_i не может лежать ни в каком $(d-1)$ -мерном подпространстве. Поэтому объем

$V(\text{Conv}(\{O_i\})) \neq 0$ и, следовательно,

$$V(\text{Conv}(\{O_i\})) = \frac{k}{d!} V_T \geq \frac{1}{d!} V_T.$$

С другой стороны, $P \supset \text{Conv}(\{M_i\})$ и

$$V(P) > V(\text{Conv}(\{M_i\})) = \frac{1}{2d} V(\text{Conv}(\{O_i\})) \geq \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{d!} \cdot V_T \geq \frac{1}{h} V_T,$$

что противоречит равенству $V_P = V_T/h$. Лемма доказана.

Чтобы получить теорему, заметим, что для кристаллографической группы $\text{Sym}(\mathcal{T})$ с максимальным индексом H трансляционной подгруппы T верны следующие утверждения:

- 1) $\text{Sym}(\mathcal{T})$ содержит инверсию γ ;
- 2) $H \geq 2^d n!$.

Это действительно так, потому что инверсия присутствует как элемент симметрии любой решетки, а индекс полной группы кубической решетки, которая при $d > 3$ имеет, вообще говоря, не максимальный индекс, равен $h = 2^d n!$.

Теорема доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.11.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 64. С. 28–51.
2. Штогрин М. И. Правильные разбиения Дирихле–Вороного для второй триклинной группы. Тр. МИАН. Т. 123, 1973.
3. Dolbilin N., Dress A., Huson D. Two finiteness theorems for periodic tilings of d -dimensional Euclidean space // Discrete Comput. Geom. (to appear).
4. Schoenflies A. Kristallssysteme und Kristallstruktur. Leipzig, 1891.
5. Bieberbach Z. // Math. Ann. 1911. V. 70. P. 297–336.
6. Engel P. Geometric Crystallography. Dordrecht, 1986.
7. Tarasov A. A new upperbound for the number of $(d-1)$ -faces of a convex d -stereohedron // Abstracts of the 3rd Geometry Festival. Budapest, 1996. P. 17.
8. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1969.
9. McMullen P. // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1982. V. 91. P. 91–97.