Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Об одной случайной динамической системе, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 803–809

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:45:10

УДК 519.21

ОБ ОДНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

З.И. Бежаева, В.И. Оселедец

Рассматривается дискретная динамическая система

$$X_{n+1} = 2\sigma \cos(2\pi\theta_n)g(X_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где θ_n – эргодический стационарный процесс, одномерное распределение которого равномерно на отрезке $[0, 1]$, $g(x)$ – нечетная непрерывная ограниченная возрастающая функция, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел.

Доказывается, что при некоторых условиях существует единственный стационарный процесс, являющийся решением указанных уравнений, и этот процесс имеет непрерывный чисто сингулярный спектр.

Библиография: 6 названий.

Введение. Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$X_{n+1} = 2\sigma \cos(2\pi\theta_n)g(X_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где θ_n – эргодический стационарный процесс, одномерное распределение которого равномерно на отрезке $[0, 1]$, $g(x)$ – нечетная непрерывная ограниченная возрастающая функция, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел.

В некоторых физических работах (см. [1]) численно и экспериментально исследовались свойства случайного процесса X_n . При этом рассматривался случай $\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\}$, где $\alpha \in (0, 1)$ – иррациональное число, фигурные скобки означают дробную часть числа, $g(x) = \tanh x$.

Результаты численного счета [1] показали, что при $\sigma = 1.5$, $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ должен существовать единственный стационарный процесс X_n , являющийся решением (1), для которого $P(X_n = 0) = 0$. При этом процесс X_n должен иметь непрерывный чисто сингулярный спектр. Позднее было показано, что это явление естественно возникает в некоторых автономных динамических системах с непрерывным временем [2].

Чтобы прояснить природу рассматриваемого явления, в данной работе будем изучать стационарный процесс (X_n, θ_n) , удовлетворяющий уравнениям (1), в двух случаях:

$$1) \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ x, & |x| \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad 2) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x < 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00377, и Международного научного фонда, грант DSM-9300752.

В п. 1 мы покажем, что если θ_n – эргодический стационарный процесс, одномерное распределение которого равномерно на отрезке $[0, 1]$, и

$$\int_0^1 \ln(2\sigma |\cos(2\pi\theta)|) d\theta = \ln \sigma > 0,$$

т.е. если $\sigma > 1$, то для случаев 1) и 2) существует единственный стационарный процесс X_n , удовлетворяющий уравнениям (1). При этом (X_n, θ_n) – стационарный процесс и $P(X_n = 0) = 0$.

В п. 2 мы покажем, что процесс X_n имеет непрерывный чисто сингулярный спектр, если $\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\}$, где α – иррациональное число.

1. Рассмотрим последовательность (X_n, θ_n) , которая удовлетворяет рекуррентным соотношениям

$$X_{n+1} = 2\sigma |\cos(2\pi\theta_n)| g(X_n), \quad X_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где $(\theta_n, n \in \mathbb{Z})$ – эргодический стационарный процесс, одномерное распределение которого равномерно на отрезке $[0, 1]$. Как было сказано, мы будем рассматривать два случая:

$$1) \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad 2) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x < 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Нас будет интересовать стационарный процесс X_n , удовлетворяющий соотношениям (2).

Очевидно, что если $X_n \equiv 0$ для любого n , то X_n является решением уравнения (2). Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если $\sigma > 1$, то существует единственный стационарный процесс (X_n, θ_n) , удовлетворяющий уравнениям (2), такой, что $P(X_n = 0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$\sigma_k = \sigma(\theta_{-k}) = 2\sigma |\cos(2\pi(\theta_{-k}))|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ f_{\theta_{-k}}(x) = \sigma_k g(x), \quad f_{n,\omega}(x) = f_{\theta_{-1}}(f_{\theta_{-2\alpha}}(\dots f_{\theta_{-n\alpha}}(x))), \quad n \geq 1,$$

где ω – реализация процесса $(\theta_n, n \in \mathbb{Z})$.

Из уравнений (1) следует, что $X_0 = f_{n,\omega}(X_{-n})$. Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма.

ЛЕММА. При каждом $x > 0$ при почти всех ω существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\omega}(x) = \varphi(\theta),$$

не зависящий от x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы состоит из двух частей.

1) Сначала рассмотрим случай, когда

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Из определения $f_{\theta_{-k}}(x)$ и вида функции $g(x)$ можно вывести, что

$$f_{n,\omega}(x) = \begin{cases} \sigma_{n,\omega}x, & 0 \leq x \leq \frac{\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\sigma_{n,\omega}}, \\ \tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n), & x > \frac{\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\sigma_{n,\omega}}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\sigma_{n,\omega} = \prod_{i=1}^n \sigma_i = \prod_{i=1}^n \sigma(\theta_{-i}), \quad \tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \leq \sigma_1, \quad n \geq 1.$$

По теореме Биркгофа для почти всех ω существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sigma_{n,\omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \sigma(\theta_{-k}) = E \ln \sigma_i = \int_0^1 \ln(2\sigma |\cos(2\pi\theta)|) d\theta = \ln \sigma > 0.$$

Поэтому для почти всех ω существуют $n(\omega)$, $c(\omega)$ такие, что для $n > n(\omega)$

$$\sigma_{n,\omega} > c(\omega)\sigma^{n/2}. \quad (4)$$

Значит, для почти всех ω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\sigma_{n,\omega}} = 0. \quad (5)$$

Из соотношения

$$f_{n,\omega}(x) = f_{n-1,\omega}(f_{\theta_{-n}}(x)) \quad (6)$$

следует, что $\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f_{n-1,\omega}(\sigma_n)$. Кроме того, для почти всех ω найдется $n_1(\omega)$ такое, что при $n > n_1(\omega)$

$$\sigma_n > \frac{\tilde{\sigma}_{n-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})}{\sigma_{n-1,\omega}}, \quad (7)$$

так как, начиная с некоторого $n_1(\omega)$, в силу (4)

$$\prod_{i=1}^n \sigma_i > \sigma_1 > \tilde{\sigma}_{n-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Из (4)–(7), а также из вида (3) функции $f_{n-1,\omega}(x)$ следует, что, начиная с некоторого $n_2(\omega)$,

$$\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \tilde{\sigma}_{n-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}).$$

Последнее равенство и (5) означают, что для почти всех ω при любом фиксированном $x > 0$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\omega}(x) = \varphi(\omega)$$

и этот предел не зависит от x .

2) Пусть теперь

$$g(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x > 0.$$

Тогда функция $f_{\theta_{-k}}(x) = \sigma_k g(x)$ задает дробно-линейное преобразование. Дробно-линейному преобразованию $f_{\theta_{-k}}(x)$ соответствует матрица

$$A_{\theta_{-k}} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование $f_{n,\omega}(x)$ также является дробно-линейным и ему соответствует матрица

$$A_{n,\omega} = A_{\theta_{-1}} \cdot A_{\theta_{-2}} \cdots A_{\theta_{-n}} = \begin{pmatrix} \sigma_{n,\omega} & 0 \\ c_{n,\omega} & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и раньше,

$$\sigma_{n,\omega} = \prod_{k=1}^n \sigma_k.$$

Из очевидного соотношения $A_{n+1,\omega} = A_{\theta_{-1}} A_{n,S^{-1}\omega}$, где S – оператор сдвига в пространстве траекторий процесса θ_n , следует, что $c_{n+1,\omega} = \sigma_{n,S^{-1}\omega} + c_{n,S^{-1}\omega}$.

Обозначим

$$\frac{c_{n+1,\omega}}{\sigma_{n+1,\omega}} = \tilde{c}_{n+1,\omega}.$$

Тогда

$$\tilde{c}_{n+1,\omega} = \frac{\sigma_{n,S^{-1}\omega}}{\sigma_{n+1,\omega}} + \frac{c_{n,S^{-1}\omega}}{\sigma_{n+1,\omega}} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{\tilde{c}_{n,S^{-1}\omega}}{\sigma_1}.$$

Продолжая рекуррентно эту формулу, получаем, что при всех ω

$$\tilde{c}_{n+1,\omega} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n}.$$

Пусть

$$c(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \sigma_k}.$$

Теперь из (4) следует, что при почти всех ω существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_{n+1,\omega} = c(\omega).$$

Отсюда, вновь используя (4), получаем, что при почти всех ω при любом $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1,\omega}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{n+1,\omega} x}{c_{n+1,\omega} x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\tilde{c}_{n+1,\omega} x + 1/\sigma_{n+1,\omega}} = \frac{1}{c(\omega)}.$$

Лемма доказана.

Пусть теперь

$$\varphi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,\omega}(x).$$

Очевидно, что для $\varphi(\omega)$ справедливо равенство $\varphi(S\omega) = f_{\theta_0}(\varphi(\omega))$. Легко видеть также, что процесс $\varphi(S\omega) = f_{\theta_0}(\varphi(\omega), \theta_n)$, где θ_n – равномерно распределенный на отрезке $[0, 1]$ стационарный процесс, удовлетворяющий уравнениям (2).

Покажем теперь, что этот стационарный процесс является единственным стационарным процессом, удовлетворяющим уравнениям (2), для которого $P(X_n = 0) = 0$.

Рассмотрим любой стационарный процесс, удовлетворяющий уравнениям (2) и такой, что $P(X_n = 0) = 0$.

Пусть $P(\omega, \Delta)$ – условная вероятность того, что $X_0 \in \Delta$ при условии, что фиксирована реализация процесса θ_n .

Заметим, что при почти всех ω условное распределение $P(\omega, \Delta)$ сосредоточено в интервале $(0, \varphi(\omega)]$. Это следует из того, что при почти всех ω значение $X_0 = f_{n,\omega}(X_{-n})$ и, как было показано, при больших n значение функции $f_{n,\omega}(X_{-n})$ содержится в отрезке $(0, \varphi(\theta)]$.

Из стационарности (X_n, θ_n) и из (2) следует, что

$$P(\omega, \Delta) = P(S^{-n}\omega, f_{n,\omega}^{-1}(\Delta)).$$

Рассмотрим $\Delta \subseteq (0, \varphi(\omega))$. Пусть $f_{n,\omega}^{-1}(\Delta) = \Delta_n$. Тогда из (3) следует, что при больших n

$$\Delta_n \subseteq \left(0, \frac{\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\sigma_{n,\omega}}\right)$$

для случая 1).

Для случая 2) имеем при больших n

$$\Delta_n \subseteq \left(0, \exp\left(-n \ln \frac{\sigma}{2}\right)\right).$$

Рассмотрим теперь множество $A_\varepsilon = \{x : 0 \leq x < \varepsilon\}$. Из условия $P(X_n = 0) = 0$ получаем, что $P(A_\varepsilon) = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда следует, что существует множество B_ε такое, что для любого $\omega \in B_\varepsilon$ условная вероятность $P(\omega, A_\varepsilon) < \sqrt{\delta(\varepsilon)}$ и $P(B_\varepsilon) > 1 - \sqrt{\delta(\varepsilon)}$. Действительно, рассмотрим множество

$$\overline{B}_\varepsilon = \{\omega : P(\omega, A_\varepsilon) \geq \sqrt{\delta(\varepsilon)}\}.$$

Тогда

$$P(\overline{B}_\varepsilon) \leq \frac{1}{\sqrt{\delta(\varepsilon)}} \int_0^1 P(\theta, A_\varepsilon) d\theta = \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Из (5) следует, что для некоторого $n(\omega, \varepsilon)$

$$\frac{\tilde{\sigma}_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{\sigma_{n,\theta\sigma_i}} < \varepsilon$$

при всех $n > n(\theta)$. Поэтому для $n > n(\omega, \varepsilon)$ в случае 1)

$$\Delta_n = f_{n,\omega}^{-1}(\delta) \subseteq [0, \varepsilon).$$

Для случая 2) имеем $\Delta_n \subseteq [0, \varepsilon)$, если $\exp(-n \ln(\sigma/2)) < \varepsilon$.

Отсюда следует, что при достаточно больших n

$$P(S^{-n}\omega, \Delta_n) \leq P(S^{-n}\omega, A_\varepsilon).$$

Известно [4], что существует строго возрастающая последовательность $\{n_k(\omega)\}$ такая, что $S^{-n_k(\omega)}\omega \in B_\varepsilon$. Отсюда следует, что при больших k

$$P(S^{-n_k(\omega)}\omega, \Delta_{n_k(\omega)}) \leq P(S^{-n_k(\omega)}\omega, A_\varepsilon) \leq \sqrt{\delta(\varepsilon)}.$$

Но $P(\theta, \Delta) = P(S^{-n_k(\omega)}\omega, \Delta_{n_k(\omega)})$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ $P(\theta, \Delta) \leq \sqrt{\delta(\varepsilon)}$. Это означает, что $P(\theta, \Delta) = 0$ для любых $\Delta \subseteq (0, \varphi(\omega))$. Следовательно, $P(\omega, \varphi(\omega)) = 1$.

Доказательство теоремы закончено.

2. В этом пункте мы докажем, что для рассматриваемых в данной работе функций $g(x)$ стационарный процесс X_n ($P(X_n = 0) = 0$), удовлетворяющий уравнениям (1), имеет чисто непрерывный сингулярный спектр, если $\theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\}$ и α – любое иррациональное число.

Рассмотрим процесс $|X_n|$. Стационарный процесс $|X_n|$ удовлетворяет уравнениям (2) и, как было показано, $P(\omega, \varphi(\omega)) = 1$. Но для рассматриваемого случая $\varphi(\omega) = \varphi_0(\theta_0)$, т.е. $|X_n| = \varphi_0(\theta_n)$.

Пусть $Y_n = \text{sign } X_n$. Тогда Y_n – стационарный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$Y_{n+1} = \varepsilon(\theta_n)Y_n, \quad \theta_{n+1} = \{\theta_n + \alpha\},$$

$$\varepsilon(\theta) = \text{sign}(\cos(2\pi\theta)) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \frac{1}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} < \theta < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(\theta + k\alpha)Y_0.$$

Для стационарного процесса X_n величина Y_n принимает два значения $\{-1, 1\}$.

Пусть $p(\theta, y) = P(Y_0 = y \mid \theta_0 = \theta)$. Введем динамическую систему $\{T^n\}$, где преобразование T действует в пространстве пар (θ, y) , y принимает два значения $\{-1, 1\}$, по правилу

$$T: (\theta, y) \mapsto (\theta + \alpha, \varepsilon(\theta)y).$$

Определим инвариантную меру μ как прямое произведение меры Лебега на $[0, 1]$ на равномерную меру на двухточечном множестве $\{-1, 1\}$.

Из определения функции $p(\theta, y)$ и стационарности процесса Y_n следует, что

$$p(\theta + \alpha, \varepsilon(\theta)y) = p(\theta, y),$$

т.е. $p(\theta, y)$ – T -инвариантная функция. Хорошо известно [3], [4], что T – эргодическое преобразование, т.е. каждая T -инвариантная функция есть константа. Поэтому почти всюду $p(\theta, y) = 1/2$, так как $\sum_y p(\theta, y) = 1$.

Процесс Y_n можно считать функцией на пространстве пар (θ, y) , а именно,

$$Y_n = \prod_{k=0}^{n-1} \varepsilon(\theta + k\alpha) Y_0,$$

где $Y_0 = Y_0(\theta, y) = y$. При таком задании процесса $Y_n = Y_0(T^n(\theta, y))$.

Исходный процесс X_n может быть представлен в виде $X_n = X_0(T^n(\theta, y))$, где $X_0(\theta, y) = \varphi_0(\theta)Y_0(\theta, y)$. Следовательно, спектральная мера процесса X_n есть спектральная мера функции $X_0(\theta, y)$ относительно динамической системы $\{T^n\}$, так как

$$EX_n X_0 = \int X_0(T^n(\theta, y)) X_0(\theta, y) d\mu(\theta, y).$$

Заметим, что пространство $H \subset L_2(\mu)$ функций вида $F(\theta)Y_0(\theta, y)$ инвариантно относительно динамической системы $\{T^n\}$. В частности,

$$X_0 = \varphi_0(\theta)Y_0(\theta, y) \in H,$$

так как $\varphi_0(\theta)$ неотрицательная и ограниченная.

Оператор

$$U: F(\theta, y) \mapsto F(T(\theta, y))$$

динамической системы в пространстве $L_2(\mu)$ имеет в H непрерывный спектр [3], [4].

Кроме того, известно, что в инвариантном пространстве H спектр оператора U сингулярен [5], [6]. Отсюда следует, что процесс X_n имеет непрерывный чисто сингулярный спектр.

Второй из авторов благодарит А. С. Пиковского, М. А. Закса, У. Фейдель, Ю. Куртца за полезные обсуждения.

Московский институт электроники и математики

Поступило

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

04.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pikovski A. S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 5209–5219.
- [2] Pikovski A. S., Feudel U., Kurths J., Zaks M. A. Singular continuous spectra in dissipative dynamics // Nichtlineare Dynamik. Preprint: Max-Planck-Arbeitsgruppe, 1994. P. 1–25.
- [3] Оселедец В. И. О спектре эргодических автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1968. Т. 168. № 5. С. 1009–1011.
- [4] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. П. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [5] Каток А. В., Стёпин А. М. Аппроксимации в эргодической теории // УМН. 1967. Т. 22. № 5. С. 81–106.
- [6] Агеев О. Н. Перемешивание в компонентах перекладывания $T_{\alpha, \beta}$ // УМН. 1994. Т. 49. № 2. С. 143–144.