Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Асимптотическая оценка суммы ряда Дирихле на кривых, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 810–816

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:27:46

УДК 517.53

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ НА КРИВЫХ

А. М. Гайсин

В достаточно общих предположениях получена асимптотическая оценка суммы целого ряда Дирихле на кривых. Полученный результат обобщает известные теоремы А. И. Павлова и Т. Ковари.

Библиография: 12 названий.

Пусть $\{p_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}, \quad a_n \neq 0, \quad (1)$$

– целая функция. Применяя интерполяционный метод, Павлов доказал, что если

$$\frac{n}{p_n} \downarrow, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty, \quad (2)$$

то [1]

$$\overline{\lim}_{\substack{z \in \Gamma \\ z \rightarrow \infty}} \frac{\ln |f(z)|}{\ln M(|z|)} = 1, \quad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad (3)$$

где $f(z)$ – целая функция, заданная рядом (1), а Γ – кривая, уходящая в бесконечность. В этой теореме замечательно то, что регулярный (в смысле (3)) рост функции $f(z)$ в бесконечности получается без каких-либо априорных ограничений на ее рост. Отметим, что ранее равенство (3) было установлено Ковари для последовательностей $\{p_n\}$, $p_n > n(\ln n)^{1+\eta}$ ($\eta > 0$) [2].

В работе [3] вводится класс так называемых интерполяционных последовательностей. Интерполяционными, в частности, являются последовательности $\{p_n\}$, удовлетворяющие условиям (2) или условию $p_n > cn \ln n [\ln \ln n]^{2+\eta}$ ($c > 0$, $\eta > 0$) [3]. В статье [4] это понятие распространяется на произвольные последовательности $\{\lambda_n\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) и для таких последовательностей аналог равенства (3) доказывается для целых рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-259.

Цель статьи – дать достаточно простое доказательство более сильного результата.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right), \quad q_n = -\ln |Q'(\lambda_n)|.$$

Введем функцию

$$c(t) = \max_{q_n < t} q_n.$$

Тогда имеет место теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$\int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty. \quad (5)$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \quad (6)$$

то

$$\lim_{\substack{s \in \gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln \mathfrak{M}(\operatorname{Re} s)} = 1, \quad \mathfrak{M}(\sigma) = \sup_{|t| < \infty} |F(\sigma + it)|,$$

где γ – кривая, уходящая в бесконечность так, что если $s \in \gamma$ и $s \rightarrow \infty$, то $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$.

Отметим, что условия (5), (6) существенно слабее критерия интерполяционности [5]:

$$n(t) \leq \psi(t), \quad n(t) = \sum_{p_n < t} 1, \quad (7)$$

$$-\ln \prod_{p_n/2 < p_k < 2p_n} \left| 1 - \frac{p_n}{p_k} \right| \leq \psi(p_n), \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Здесь ψ – некоторая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \psi(t) \uparrow \infty, \quad \frac{\psi(t)}{t} \downarrow, \quad t \rightarrow \infty, \quad \int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt < \infty,$$

знак ' $\downarrow$ ' означает монотонное убывание.

В условиях (7), (8) требуется вогнутость мажоранты, чего нет в условиях (5), (6). Таким образом, здесь рассматривается более общая ситуация, в которой интерполяционный метод уже не применим. Нами используются методы теории рядов экспонент и одна идея из [6]. Наконец, отметим, что все упомянутые результаты работ [1], [2] и [4] содержатся в нашей теореме.

1. Леммы. Эквивалентное условие.

ЛЕММА 1 (Карлеман–Миоу [3]). Пусть $g(z)$ – функция, аналитическая в круге $\overline{D}(z_0, R) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$,

$$M = \max_{\overline{D}(z_0, R)} |g(z)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(z)|,$$

где γ – непрерывная кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $C(z_0, R) = \{z : |z - z_0| = R\}$.

Тогда

$$|g(z)| \leq M^{3/4} m^{1/4}, \quad z \in \overline{D}\left(z_0, \frac{R}{6}\right).$$

Через W обозначим множество положительных, возрастающих, непрерывных на $[0, \infty)$ функций $w = w(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_1^\infty \frac{w(t)}{t^2} dt < \infty.$$

ЛЕММА 2. Пусть $w \in W$, а $v = v(\sigma)$ – решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)},$$

где $u = u(\sigma)$ – неубывающая, непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $u(\sigma) \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow \infty$. Тогда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$u(\sigma + \delta) = u(\sigma) + o(1), \quad \delta = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}.$$

Лемма доказывается точно так же, как и соответствующая лемма из [6]. Полное доказательство содержится в [7].

Приведем другое, эквивалентное (5), условие. Оно получается из следующей теоремы [8]: пусть $f(z)$ – целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ с корнями $\{\lambda_n\}$, тогда для любой точки $z \neq 0$

$$\ln |f(z)| = - \int_0^1 \frac{n_\sigma(z)}{\sigma} d\sigma + O(1)|z|^{\rho(|z|)},$$

где $O(1)$ означает некоторую функцию, ограниченную вне любого круга $\{z : |z| \leq r\}$ ($r > 0$), а $n_\sigma(z)$ – число точек λ_n в круге $\Delta_\sigma(z) = \{h : |h - z| \leq \sigma|z|\}$.

Прежде заметим, что при условии (6) (см., например, [9])

$$\int_1^\infty \frac{n(x)}{x^2} dx < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{N(x)}{x^2} dx < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{\ln M(Q, x)}{x^2} dx < \infty, \quad (9)$$

где

$$n(x) = \sum_{\lambda_n < x} 1, \quad N(x) = \int_0^x \frac{n(t)}{t} dt, \quad M(Q, x) = \max_{|z|=x} |Q(z)|.$$

Но в этом случае $Q(z)$ – целая функция уточненного порядка $\rho(r)$, $\rho(r) \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$, такого, что [10]

$$\ln M(Q, r) \leq r^{\rho(r)}, \quad \int_1^\infty r^{\rho(r)-2} dr < \infty.$$

Таким образом, с учетом результатов из [8], [10], приведенных выше, получаем следующее эквивалентное (5) условие: *существует функция $w \in W$ такая, что*

$$\int_0^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma \leq w(\lambda_n), \quad n \geq 1, \quad m_\sigma(\lambda_n) = n_\sigma(\lambda_n) - 1. \quad (10)$$

Отметим, что условие (10) можно было бы получить и непосредственно, т.е. без ссылки на работу [10]. Но это потребовало бы проведения определенных выкладок. Заметим, что в оценке (10) мы не требуем выполнения такого сильного условия, как монотонность убывания $w(x)/x$. Тем не менее, оценка (10) более наглядно иллюстрирует распределение точек λ_n и имеет практическое значение: она удобна при проверке условия (5). Убедимся в этом на примерах.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Delta_j = [2^j - [2^j/(j \ln^2 j)], 2^j]$ ($[a]$ – целая часть a), а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, попавших в $\bigcup_j \Delta_j$. Ясно, что условие (6) выполнено. Проверяется также, что

$$n(t) \leq A \frac{t}{\ln t (\ln \ln t)^2}, \quad t \geq e^e.$$

Далее при $\lambda_n = 2^j$ имеем

$$\int_0^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma \geq \int_{n(\lambda_n)/\lambda_n}^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma \geq \left[\frac{2^j}{j \ln^2 j} \right] \ln \frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma > 2^{-1} \frac{\lambda_n}{\ln \lambda_n \ln \ln \lambda_n}, \quad n \geq n_0.$$

Мы видим, что условие (10) не имеет места.

ПРИМЕР 2. Пусть теперь $\Delta_j = [2^{j^2} - [2^{j^2}/j^2], 2^{j^2}]$, а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – соответствующая последовательность. Поскольку

$$n(b_j) \geq \left[\frac{2^{j^2}}{j^2} \right] > \frac{b_j}{\ln b_j} - 1, \quad b_j = 2^{j^2},$$

то последовательность Λ неинтерполяционная (условие (8) не выполнено), так как функция ψ из условий (7) и (8) необходимо должна удовлетворять требованию $\psi(t) \ln t = o(t)$, $t \rightarrow \infty$. Убедимся, что тем не менее условие (10) выполнено. Действительно, пусть $\lambda_n \in \Lambda$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma = \int_{1/\lambda_n}^{n(\lambda_n)/\lambda_n} \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma + \int_{n(\lambda_n)/\lambda_n}^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma = A + B.$$

Но при $1/\lambda_n \leq \sigma \leq n(\lambda_n)/\lambda_n$ имеем $m_\sigma(\lambda_n) \leq \sigma\lambda_n$. Следовательно, $A \leq n(\lambda_n)$. Поскольку

$$B \leq n(2\lambda_n) \ln \frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)},$$

то

$$\int_0^1 \frac{m_\sigma(\lambda_n)}{\sigma} d\sigma \leq 2n(2\lambda_n) \ln \frac{\lambda_n}{n(\lambda_n)}.$$

Легко проверяется, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \ln \frac{\lambda_n}{n} < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^{\infty} \frac{n(t) \ln(t/n(t))}{t^2} dt < \infty,$$

и условие (10) выполнено.

Таким образом, попутно приведен пример неинтерполяционной последовательности, удовлетворяющей условиям нашей теоремы.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из условий (5), (9) следует, что найдется функция $w \in W$ такая, что $\max(c(t), \sqrt{t}, N(et)) \leq w(t)$. Тогда существует функция $w^* = w^*(t) = \beta(t)w(t) \in W$, где $0 < \beta(t) \uparrow \infty, t \rightarrow \infty$.

Через $v = v(\sigma)$ обозначим решение уравнения

$$w^*(v) = 3 \ln \mu(\sigma),$$

где $\mu(\sigma)$ – максимальный член ряда (4). Положим

$$R_{v(\sigma)} = \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n \sigma}.$$

Тогда

$$R_{v(\sigma)} \leq \mu(\sigma + \delta) \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta \lambda_n}, \quad \delta = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \quad (11)$$

Но согласно лемме 2 (если положить $u(\sigma) = \ln 3 + \ln \ln \mu(\sigma)$) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_1 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\mu(\sigma + \delta) < \mu(\sigma)^{1+o(1)}.$$

Следовательно, из (11) получаем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1

$$R_{v(\sigma)} \leq \mu(\sigma)^{1+o(1)} \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta \lambda_n} \leq \mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp[-(1+o(1))3 \ln \mu(\sigma)] < 1. \quad (12)$$

Пусть

$$\varphi(s) = \sum_{\lambda_n \leq v(\sigma)} a_n e^{\lambda_n s}.$$

Тогда [9]

$$a_n = e^{-\alpha \lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi_n(t) \varphi(t + \alpha) dt, \quad (13)$$

где

$$\psi_n(t) = \frac{1}{q'(\lambda_n)} \int_0^\infty \frac{q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda, \quad q(\lambda) = \prod_{\lambda_n \leq v(\sigma)} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right), \quad (14)$$

α – произвольный комплексный параметр, C – замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}_q$ – сопряженную диаграмму $q(\lambda)$. Поскольку $\overline{D}_q = \{0\}$, то в качестве C можно взять контур

$$\left\{ t : |t| = \frac{\delta}{6}, \delta = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)} \right\}.$$

Положим $\alpha = \sigma + i\tau$, где τ – такое, что $\alpha \in \gamma$. Поскольку для $\lambda_n \leq v(\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{q'(\lambda_n)} \right| \leq \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| \leq e^{c(v(\sigma))} = \mu(\sigma)^{o(1)},$$

то из (13), (14) получим, что при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq \delta \max_{|\xi - \alpha| \leq \delta/6} |\varphi(\xi)| \int_0^\infty M(r+1, q) e^{-\delta r/6} dr. \quad (15)$$

Но

$$\begin{aligned} \ln M(R, q) &= n(v) \ln \left(1 + \frac{R^2}{v^2}\right) + 2R^2 \int_0^v \frac{n(t)}{t(t^2 + r^2)} dt \\ &\leq \frac{n(v)}{v} R + 2N(v) = o(1)\delta R + o(1) \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (12) и применяя лемму Карлемана–Мию, из (15) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 получаем оценку

$$\mu(\sigma)^{1+o(1)} \leq \mathfrak{M}^{3/4}(\sigma + \delta) \max_{\substack{\xi \in \gamma \\ |\xi - \alpha| \leq \delta}} |F(\xi)|^{1/4}. \quad (16)$$

Далее при $\sigma \rightarrow \infty$ вне некоторого множества $E_2 \subset [0, \infty)$ конечной меры

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\sigma + \delta) &\leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + \delta)} \\ &\leq \mu(\sigma + 2\delta) \left[n(v) + \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta \lambda_n} \right] < \mu(\sigma)^{1+o(1)}. \end{aligned}$$

Эта оценка также получается применением леммы 1. Следовательно, при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1 и E_2

$$\mu(\sigma) \leq \mathfrak{M}(\sigma) < \mathfrak{M}(\sigma + \delta) \leq \mu(\sigma)^{1+o(1)}.$$

Но тогда с учетом этой оценки из (16) при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1, E_2 получаем, что

$$\mathfrak{M}^{1+o(1)}(\sigma + \delta) \leq \max_{\substack{\xi \in \gamma \\ |\xi - \alpha| \leq \delta}} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|,$$

где $\xi^* \in \gamma$, $\sigma - \delta \leq \operatorname{Re} \xi^* \leq \sigma + \delta$. Отсюда при $\sigma \rightarrow \infty$ вне E_1, E_2

$$\frac{\ln |F(\xi^*)|}{\ln \mathfrak{M}(\operatorname{Re} \xi^*)} = 1 + o(1), \quad \xi^* \in \gamma.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нами доказано более сильное утверждение: для каждого круга $\overline{D}(a, \delta)$ ($a \in \gamma$, $\delta = w^*(v(\sigma))/v(\sigma)$) найдется точка $\xi = \xi(a)$, $\xi \in \gamma \cap \overline{D}(a, \delta)$, такая, что при $a \rightarrow \infty$

$$\ln \mathfrak{M}(\operatorname{Re} \xi) = [1 + o(1)] \ln |F(\xi)|.$$

О существенности условий (5), (6) можно сказать следующее. Хорошо известно, что для любой последовательности натуральных чисел p_n таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует ряд вида (1), ограниченный на положительной полуоси [11]. Аналогичный пример имеется и для рядов Дирихле.

Вопрос о существенности условия (5) тесно связан с проблемой, поставленной в работе [12], и пока остается открытым.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

Поступило

26.01.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Павлов А. И. О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Сиб. матем. ж. 1972. Т. 13. № 5. С. 1169–1181.
- [2] Kövari T. On the asymptotic paths of entire functions with gap power series // J. Anal. Math. 1965. V. 15. P. 281–286.
- [3] Korevaar J., Dixon M. Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Indag. Math. (N. S.) 1978. V. 40. № 2. P. 243–258.
- [4] Гайсин А. М. Асимптотическое поведение суммы целого ряда Дирихле на кривых // Исследования по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989. С. 3–15.
- [5] Berndtsson B. A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation // Nederl. Acad. Wet. Proc. 1978. V. 81. P. 400–414.
- [6] Murai T. The deficiency of entire functions with Fejér gaps // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33. № 3. P. 39–58.
- [7] Гайсин А. М. Об одной гипотезе Поля // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [8] Красичков И. Ф. Оценка снизу для целых функций конечного порядка // Сиб. матем. ж. 1965. Т. 6. № 4. С. 840–861.
- [9] Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
- [10] Бойчук В. С. О некоторых свойствах уточненного порядка // Сиб. матем. ж. 1979. Т. 20. № 2. С. 229–236.
- [11] Гайсин А. М. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.
- [12] Macintyre A. J. Asymptotic paths of integral functions with gap power series // Proc. London Math. Soc. 1952. V. 2. № 3. P. 286–296.