Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Галочкин, Оценки числа нулей некоторых функций с алгебраическими коэффициентами рядов Тейлора, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 817–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:02:18

УДК 511.36

ОЦЕНКИ ЧИСЛА НУЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

А. И. Галочкин

Доказываются две теоремы о числе нулей аналитических функций некоторых классов, в том числе E -функций и G -функций Зигеля. С помощью этих теорем дается новое доказательство теоремы Гельфонда–Шнейдера и улучшается результат о необращении в нуль числового определителя при доказательстве теоремы Шидловского.

Библиография: 5 названий.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле степени $\varkappa$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых чисел в поле $\mathbb{K}$, $\text{Norm}(\alpha)$ – норма числа $\alpha \in \mathbb{K}$. Для аналитической функции $f(z)$ через $\text{ord}_{z=\alpha} f(z)$ будем обозначать кратность ее нуля в точке $z = \alpha$.

Пусть функция

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \quad (1)$$

удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все коэффициенты $a_{\nu} \in \mathbb{K}$;
- 2) для них и для сопряженных им чисел в поле $\mathbb{K}$

$$a_{\nu}^{[k]}, \quad k = \overline{1, \varkappa}, \quad a_{\nu}^{[1]} = a_{\nu},$$

справедливы оценки

$$|a_{\nu}| < \Lambda_1 C_1^{\nu}, \quad \prod_{k=2}^{\varkappa} |a_{\nu}^{[k]}| < \Lambda_2 C_2^{\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots; \quad (2)$$

- 3) существует последовательность $\{q_n\}$ ненулевых целых чисел в поле $\mathbb{K}$ такая, что

$$q_{\nu} a_{\nu} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \quad (3)$$

и

$$|\text{Norm}(q_{\nu})| < \Lambda_3 C_3^{\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, C_1, C_2, C_3$ – положительные числа.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00739.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет всем указанным выше условиям. Далее, пусть $N(R)$ – количество ее нулей в круге $|z| \leq R$ с учетом их кратности, в частности, $N(0) = \text{ord}_{z=0} f(z)$. Тогда при любом положительном значении R справедливо неравенство

$$(N(R) - N(0)) \ln \left(2 + \frac{N(0)}{C_1 R} \right) \leq N(0) (1 + \ln(C_1 C_2 C_3)) + 3C_1 R + \ln(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3). \quad (5)$$

Теорема 1 применима, в частности, к E -функциям Зигеля, если их рассматривать в смысле определения, данного в [1, гл. 13, § 1].

Подобная теорема справедлива также для другого класса функций, содержащего G -функции Зигеля (см. заключительные замечания в конце книги [1], а также классическую статью К. Зигеля [2]).

Пусть задана функция

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}, \quad (6)$$

коэффициенты которой a_{ν} удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты функции (1).

Формально $g(z)$ отличается от $f(z)$ отсутствием величины $\nu!$. Однако $g(z)$, в отличие от $f(z)$, не является целой функцией.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $g(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, $N(R)$ – количество ее нулей в круге $|z| \leq R$ с учетом их кратности, в частности, $N(0) = \text{ord}_{z=0} g(z)$. Тогда при любом R таком, что $0 < R < 1/(3C_1)$, выполняется неравенство

$$(N(R) - N(0)) \ln \frac{1}{3C_1 R} \leq N(0) \ln(1.5C_1 C_2 C_3) + \ln(3\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $p = N(0)$, тогда в равенстве (1)

$$f(z) = \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{\nu} \frac{z^{\nu}}{\nu!}, \quad a_p \neq 0, \quad (7)$$

а значит,

$$|\text{Norm}(q_p a_p)| \geq 1,$$

где q_n – числа, определенные с помощью (3). Следовательно,

$$|a_p| \geq |\text{Norm}(q_p) a_p^{[2]} \dots a_p^{[p]}|^{-1} \geq (\Lambda_2 \Lambda_3)^{-1} (C_2 C_3)^{-p}. \quad (8)$$

Пусть теперь $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – все другие нули функции $f(z)$, расположенные в круге $|z| \leq R$, т.е.

$$|\alpha_j| \leq R, \quad f(\alpha_j) = 0, \quad \alpha_j \neq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad n = N(R) - N(0).$$

Тогда в силу (7) при любых положительных числах r и λ справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_p &= f^{(p)}(0) = \frac{p!}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz, \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=\lambda p+3R} \left(\left(\frac{z}{u} \right)^p \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-\alpha_j}{u-\alpha_j} \right) \right) \frac{f(u) du}{u-z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (1) и (2) получаем, что

$$\begin{aligned} |f(u)| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \Lambda_1 C_1^\nu \frac{|u|^\nu}{\nu!} \leq \Lambda_1 e^{C_1(\lambda p+3R)} \quad \text{при } |u| = \lambda p + 3R, \\ \prod_{j=1}^n \left| \frac{z-\alpha_j}{u-\alpha_j} \right| &\leq \left(\frac{R+r}{\lambda p+2R} \right)^n, \end{aligned}$$

поэтому из (9) следует, что

$$|a_p| \leq \frac{p!}{(2\pi)^2} 2\pi r \cdot \frac{1}{r} 2\pi (\lambda p + 3R)^{1-p} \left(\frac{R+r}{\lambda p+2R} \right)^n \Lambda_1 e^{C_1(\lambda p+3R)} (\lambda p + 3R - r)^{-1}.$$

Отсюда ввиду произвольности числа $r > 0$ имеем

$$|a_p| \leq \Lambda_1 \lambda^{-p} \left(2 + \frac{\lambda p}{R} \right)^{-n} e^{C_1(\lambda p+3R)},$$

что вместе с неравенством (8) и равенствами $p = N(0)$, $n = N(R) - N(0)$ приводит к оценке

$$\begin{aligned} &(N(R) - N(0)) \ln \left(2 + \frac{\lambda N(0)}{R} \right) \\ &\leq N(0) (C_1 \lambda - \ln \lambda + \ln(C_2 C_3)) + 3C_1 R + \ln(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Полагая в (10) $\lambda = C_1^{-1}$, получаем неравенство (5). Теорема доказана.

Приведенные здесь и в следующем далее доказательстве теоремы 2 рассуждения близки к доказательству теоремы Иенсена (см., например, [3, гл. 1, § 1.1]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 близко к доказательству теоремы 1, поэтому проведем его менее подробно.

Как и ранее, справедливо неравенство (8). Соотношения (9) заменяются на равенства

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{g^{(p)}(0)}{p!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^{p+1}} dz, \\ g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=c} \left(\left(\frac{z}{u} \right)^p \prod_{j=1}^n \left(\frac{z-\alpha_j}{u-\alpha_j} \right) \right) \frac{g(u) du}{u-z}, \end{aligned}$$

где $c = (1.5C_1)^{-1}$, $0 < r < c$, а числа $p, n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1. На этот раз в силу (2) $|g(u)| \leq 3\Lambda_1$,

$$\left| \prod_{j=1}^n \left(\frac{z - \alpha_j}{u - \alpha_j} \right) \right| \leq \left(\frac{R+r}{c-R} \right)^n.$$

Поэтому

$$|a_p| \leq \frac{1}{(2\pi)^2} 2\pi r \cdot \frac{1}{r} 2\pi c^{1-p} \left(\frac{R+r}{c-R} \right)^n \frac{3\Lambda_1}{c-r},$$

что при $r \rightarrow +0$ приводит к неравенству

$$|a_p| \leq 3\Lambda_1 c^{-p} \left(\frac{R}{c-R} \right)^n$$

и с помощью (6) и соотношений $c = (1.5C_1)^{-1}$ и $0 < R < (3C_1)^{-1}$ позволяет завершить доказательство теоремы.

Теорема 1 дает возможность предложить новое доказательство знаменитой теоремы Гельфонда–Шнейдера, давшей решение седьмой проблемы Гильберта. В отличие от других доказательств, на первом этапе строится многочлен, имеющий “большой” порядок нуля только в точке $z = 0$, а не на некотором множестве точек. После этого оценка (5) быстро приводит к противоречию. Процесс интерполяции не применяется.

ТЕОРЕМА ГЕЛЬФОНДА–ШНЕЙДЕРА. Пусть a и α – алгебраические числа, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и $\alpha \ln a \neq 0$. Тогда число a^α трансцендентно.

ЛЕММА 1. Система уравнений

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{j=1}^q a_{ij} x_j = 0, & i &= \overline{1, p}, \\ a_{ij} &\in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, & \overline{a_{ij}} &\leq A, & p &< q, \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение $(x_1, \dots, x_q)$ в $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, удовлетворяющее неравенству

$$\overline{x_j} < C(CqA)^{p/(q-p)}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $\overline{a}$ – максимум модулей чисел, сопряженных числу $a \in \mathbb{K}$, а постоянная C зависит только от поля $\mathbb{K}$.

Доказательство этой известной леммы Зигеля можно найти, например, в [1, гл. 3, § 8].

Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от параметра n .

ЛЕММА 2. Если число α алгебраическое и $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$, то существует функция

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} A_{kl} e^{(k+l\alpha)z} \quad (11)$$

такая, что все числа $A_{kl} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$

$$0 < \max |A_{kl}| < e^{\gamma_1 n^2 / \ln^3 n} \quad (12)$$

и

$$F^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = \overline{0, p-1}, \quad p = \left\lceil \frac{n^2}{\ln^2 n} \right\rceil. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы состоит в применении леммы 1 к системе (13), состоящей из $p = \lceil n^2 / \ln^2 n \rceil$ уравнений относительно $q = n^2$ неизвестных A_{kl} .

ЛЕММА 3. Пусть a , α и a^α – алгебраические числа, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a, \alpha, a^\alpha)$, $\varkappa = \deg \mathbb{K}$ и $F(z) \not\equiv 0$ – функция вида (11), для коэффициентов A_{kl} которой выполняются неравенства (12). Пусть S – фиксированное натуральное число, p_s – порядок нуля функции $F(z)$ в точке $s \ln a$, $s = \overline{0, S}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого индекса s_0 , $0 \leq s_0 \leq S$, при $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$P(s_0) = \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq s_0}}^S p_s \leq (\varkappa + \varepsilon) p_{s_0} + \gamma_2 \frac{n^2}{\ln^3 n}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $u = z - s_0 \ln a$, получаем разложение

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(s_0 \ln a)}{\nu!} u^\nu$$

функции $F(z) = F(u + s_0 \ln a) = f(u)$ в ряд по степеням u . К функции $f(u)$ применим теорему 1. В этой теореме

$$\begin{aligned} R &= S |\ln a| = \text{const}, \quad N(0) = p_{s_0}, \\ a_\nu &= F^{(\nu)}(s_0 \ln a), \quad N(R) - N(0) \geq P(s_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее,

$$f^{(\nu)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} A_{kl} (k + l\alpha)^\nu e^{(k+l\alpha)s_0 \ln a}. \quad (16)$$

Поэтому в теореме 1 в силу (12)

$$\begin{aligned} |k + l\alpha| &\leq \gamma_3 n = C_1 = C_2^{1/(\varkappa-1)}, \\ |A_{kl} e^{(k+l\alpha)s_0 \ln a}| &\leq e^{\gamma_4 n^2 / \ln^3 n} = \Lambda_1 = \Lambda_2^{1/(\varkappa-1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наконец, если b – такое натуральное число, что $ba, b\alpha, ba^\alpha \in \mathbb{Z}_K$, то в (16)

$$b^{2nS+\nu} F^{(\nu)}(s_0 \ln a) \in \mathbb{Z}_K,$$

поэтому в (4) можно положить

$$C_3 = b^\varkappa, \quad \Lambda_3 = b^{2n\varkappa S}. \quad (18)$$

Из теоремы 1 и соотношений (15), (17) и (18) получаем, что

$$P(s_0) \ln \left(2 + \frac{p_{s_0}}{\gamma_5 n} \right) \leq p_{s_0} (\gamma_6 + \varkappa \ln n) + \gamma_7 \frac{n^2}{\ln^3 n}. \quad (19)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $p_{s_0} < n^2 / \ln^4 n$, то из (19) и неравенства $\ln(2 + p_{s_0} / (\gamma_5 n)) > \ln 2$ следует, что

$$P(s_0) \leq \gamma_8 \frac{n^2}{\ln^3 n}.$$

2) Если $p_{s_0} \geq n^2 / \ln^4 n$, то при $n > n_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\ln \left(2 + \frac{p_{s_0}}{\gamma_5 n} \right) > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \ln n$$

и, как и в случае 1), из неравенства (19) выводится оценка (14). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬФОНДА–ШНЕЙДЕРА. Допустим противное: числа a и α удовлетворяют условиям теоремы, но число $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$ алгебраическое. По лемме 2 построим функцию $F(z)$. При $\alpha \notin \mathbb{Q}$ все показатели $k + l\alpha$ в (11) различны, поэтому $F(z) \not\equiv 0$.

Пусть t – наименьший порядок нуля функции $F(z)$ в точках

$$s \ln a, \quad s = \overline{1, S}, \quad S = \varkappa + 2,$$

который достигается при $s = s_0$. Тогда из лемм 2 и 3 при $\varepsilon = 1$ получаем, что

$$\left[\frac{n^2}{\ln^2 n} \right] + (S - 1)t \leq P(s_0) \leq (\varkappa + 1)t + \gamma_2 \frac{n^2}{\ln^3 n},$$

иными словами,

$$\left[\frac{n^2}{\ln^2 n} \right] \leq \gamma_2 \frac{n^2}{\ln^3 n},$$

что приводит к противоречию при достаточно больших n . Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Можно, но немного сложнее, получить противоречие и при $S = \varkappa + 1$.

Укажем еще некоторые приложения доказанных теорем. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ – совокупность E -функций, т.е. функций вида (1), коэффициенты которых удовлетворяют условиям (2) и (4) с заменой условия (3) на более сильное требование:

$$q_n a_\nu \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad \nu = \overline{0, n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Далее, пусть функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=1}^m Q_{ij}(z) y_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad Q_{ij} \in \mathbb{K}(z). \quad (20)$$

Сначала сформулируем утверждение, близкое к лемме 2 [1, гл. 13].

ЛЕММА 4. Пусть совокупность E -функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляет решение системы дифференциальных уравнений (20) и линейно независима над полем $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого достаточно большого натурального числа n существует последовательность линейных форм

$$R_k(z) = \sum_{j=1}^m P_{kj}(z) f_j(z), \quad P_{kj}(z) \in \mathbb{K}(z), \quad k = 1, 2, \dots,$$

такая, что определитель

$$\Delta(z) = \det |P_{kj}(z)|_{k,j=\overline{1,m}} = \sum_{\gamma_9 n < l < mn + \gamma_{10}} c_l \frac{z^l}{l!}$$

отличен от нуля, причем

$$c_l \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad [\overline{c_l}] < e^{\gamma_{11} n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы почти дословно совпадает с соответствующими доказательствами из [1, гл. 13, § 2] только с той разницей, что в равенстве (31) этой главы должен быть отброшен множитель $n!$.

Теорема 1 позволяет получить нетривиальную оценку порядка нуля определителя $\Delta(z)$ в точке $\alpha \neq 0$ и, тем самым, усилить результат леммы 3 [1, гл. 13].

Полагая в теореме 1 $f(z) = \Delta(z)$, получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть выполнены все условия леммы 2 и α – комплексное число, отличное от нуля и от полюсов коэффициентов системы (20). Тогда существуют зависящие от α индексы $k_1, \dots, k_m$ такие, что

$$\det |P_{k_i, j}(\alpha)|_{i, j=\overline{1, m}} \neq 0$$

и

$$k_1 + \dots + k_m < \gamma_{12} \frac{n}{\ln n}.$$

С помощью обычных методов величину $k_1 + \dots + k_m$ удастся оценить лишь тривиально величиной

$$\deg \Delta(z) - \text{ord}_{z=0} \Delta(z) + \gamma_{13}.$$

Заметим, что для доказательства предложения не требуется, чтобы порядок нуля $\Delta(z)$ при $z = 0$ был близок к mn .

В случае, когда функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ являются G -функциями, в подобной лемме с помощью теоремы 2 при $|\alpha| < 1$ аналогичным способом удастся получить неравенство

$$k_1 + \dots + k_m < \gamma_{14} n \left(\ln \frac{1}{|\alpha|} \right)^{-1}.$$

В заключение заметим, что изложенный в настоящей статье прием позволил В. В. Зудилину [4] дать полное обоснование предложенному Г. В. Чудновским [5] методу градуированных приближений Паде.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gal@nw.math.msu.su

Поступило
17.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [2] Siegel C. L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
- [3] Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
- [4] Зудилин В. В. Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 12. С. 57–86.
- [5] Chudnovsky G. V. On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.