Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Зубе, Исключительные векторные расслоения на поверхностях Энриквеса, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 825–834

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:45:15

УДК 514.74

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЭНРИКВЕСА

С. Зубе

Основная цель настоящей статьи состоит в изучении исключительных векторных расслоений на поверхностях Энриквеса.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Исключительное расслоение E на поверхности с иррегулярностью $q = h^1(O_S)$ и геометрическим родом $p_g = h^2(O_S)$ – это расслоение со следующими свойствами: $\text{Ext}^0(E, E) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^1(E, E) = q$, $\text{Ext}^2(E, E) = p_g$. Ким и Най в [1]–[3] изучали на поверхностях Энриквеса экстремальные расслоения, которые по своим свойствам очень близки к исключительным расслоениям. По определению экстремальное расслоение на поверхности Энриквеса – это жесткое расслоение E такое, что $\text{Ext}^0(E, E) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^1(E, E) = 0$, удовлетворяющее условию $\text{Ext}^2(E, E) = \mathbb{C}$. Из теоремы Римана–Роха легко вытекает, что ранг любого исключительного расслоения нечетен, а любого экстремального – четен. В [2] Ким предложил характеризацию экстремальных расслоений на поверхностях Энриквеса. Такие расслоения существуют только на нодальных поверхностях и удовлетворяют условиям $c_1^2 = 4n - 2$, $c_2 = n$ для $n > 4$. У них есть и геометрический смысл. Оказывается, существование экстремальных расслоений тесно связано с вложениями поверхности Энриквеса в грассманиан $G(2, n + 1)$.

Основная цель работы – указать необходимые и достаточные условия существования исключительных расслоений на поверхностях Энриквеса. Приводимое доказательство закрывает пробел, имеющийся в доказательстве теоремы 4 из [2]. В последнем пункте мы также приводим конструкцию исключительных расслоений, основанную на некоторых конструкциях поверхностей Энриквеса и использующую модулярные операции (отражения). Отражение может оказаться чрезвычайно полезным при конструировании и изучении модулей пучков на поверхностях Энриквеса.

2. Поверхности Энриквеса. Гладкая неприводимая поверхность S такая, что $h^1(O_S) = h^2(O_S) = 0$ и $2K_S \sim O_S$, называется *поверхностью Энриквеса*. Напомним, что дивизор D на гладкой поверхности X называется *численно эффективным*, если $DC \geq 0$ для всякой кривой C на X . На протяжении всей статьи, зачастую без специального упоминания, будем использовать следующие полезные утверждения:

(А) [4, следствие 3.1.3] Если D – численно эффективный дивизор и $D^2 > 0$, то $H^1(O_S(-D)) = 0$ и $\chi(O(D)) - 1 = \dim |D| = D^2/2$.

(Б) [4, предложение 3.1.4] Если у $|D|$ нет базисных компонент, то верно одно из следующих утверждений:

- i) $D^2 > 0$ и в $|D|$ существует неприводимая кривая C ;
- ii) $D^2 = 0$ и существует пучок $|P|$ рода 1 такой, что $D \sim kP$ для некоторого $k \geq 1$.

(В) [4, гл. 4, приложение, следствия 1 и 2] Если $D^2 \geq 6$ и D численно эффективный, то D обилен, $2D$ порожден своими глобальными сечениями, $3D$ очень обилен.

Поверхность Энриквеса S называется *нодальной* (соответственно *ненодальной*), если в ней содержится (соответственно в ней отсутствует) гладкая (-2) -кривая. Поверхности Энриквеса почти всегда ненодальные. Всякая поверхность Энриквеса представляет собой эллиптическое слоение над $\mathbb{P}^1$, имеющее в точности два кратных слоя F, F' и эллиптический пучок $|2F| = |2F'|$ с $K_S = F - F'$. На общей поверхности Энриквеса имеется десять различных эллиптических пучков $|2F_1|, |2F_2|, \dots, |2F_{10}|$ (см. [4]).

3. Решетка Мукая. Дискретные инварианты пучков и расслоений на поверхностях типа КЗ или на поверхности Энриквеса X удобно представлять в виде векторов алгебраической решетки Мукая

$$M(X) = H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \text{Pic } X \oplus H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z} \ni v = (r, D, s)$$

со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle (r, D, s), (r', D', s') \rangle = rs' + s'r - D \cdot D'.$$

С каждым пучком E на X таким, что $c_1(E) = D$, $c_2(E) \in H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ассоциируем вектор

$$v(E) = \left(\text{rank}(E), D, \frac{1}{2}D^2 - c_2 + \text{rank}(E) \frac{\chi(O_X)}{2} \right),$$

где $\chi(O_X) = 1 - q + p_g$, причем $\chi(O_X) = 2$ для поверхности типа КЗ и $\chi(O_X) = 1$ для поверхности Энриквеса. Из этой формулы и теоремы Римана–Роха вытекает равенство

$$\begin{aligned} \langle v(F), v(E) \rangle &= \langle v(E), v(F) \rangle = \chi(E, F) \\ &= \dim \text{Ext}^0(E, F) - \dim \text{Ext}^1(E, F) + \dim \text{Ext}^2(E, F). \end{aligned}$$

Из того, что K_X численно равно 0, вытекает, что $\chi(E, F) = \chi(F, E)$ на поверхности типа КЗ или поверхности Энриквеса. Для короткой точной последовательности $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0$ справедливы следующие равенства:

$$v(E) = v(F) + v(G) = (r(F) + r(G), c_1(F) + c_1(G), s(F) + s(G)).$$

4. Исключительные расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пучок E на поверхности S называется *исключительным*, если

$$\dim \text{Ext}^0(E, E) = 1, \quad \dim \text{Ext}^1(E, E) = q, \quad \dim \text{Ext}^2(E, E) = p_g.$$

Из теоремы Римана–Роха вытекает, что

$$\chi(E, E) = r^2 \chi(O_S) + (r - 1)c_1^2 - 2rc_2.$$

Так как решетка $H^2(S, \mathbb{Z})$ четная и $\chi(O_S) = 1$ для поверхности Энриквеса S , то ранг исключительного расслоения E нечетен. Для описания исключительных векторных расслоений необходим следующий результат Кулешова.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть X – гладкая поверхность типа КЗ, H – произвольный обильный дивизор на X и $v = (r, D, s)$ ($r > 0$) – исключительный вектор (т.е. $v^2 = 2$), принадлежащий решетке Мукая на X . Тогда существует простое μ_H -полустабильное расслоение E , реализующее вектор v (т.е. $v = v(E)$).

Начнем с изложения нескольких простых фактов. Первый касается пучков без кручения, удовлетворяющих некоторому гомологическому условию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть E – пучок без кручения на гладкой поверхности S и $\dim \operatorname{Ext}^1(E, E) = 1$ или 0. Тогда E локально свободен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \rightarrow E \rightarrow E^{**} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

где E^{**} – дважды двойственный пучок к E и коядро M имеет конечную длину. С помощью результата Мукая [6, следствия 2.11 и 2.12] приходим к следующему неравенству:

$$\dim \operatorname{Ext}^1(E^{**}, E^{**}) + \dim \operatorname{Ext}^1(M, M) \leq \dim \operatorname{Ext}^1(E, E).$$

В силу того, что $v^2(M) = 0$, получаем $\dim \operatorname{Ext}^1(M, M) = 2 \dim \operatorname{End}_{O_S}(M)$. Так как $\operatorname{Ext}^1(E, E) = 0$ или 1, то $M = 0$ и $E = E^{**}$. Поэтому E локально свободен.

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – гладкая поверхность Энриквеса, $v = (r, D, s) \in M(S)$ ($r > 0$) и $v^2 = 1$. Тогда

- i) существует обильный дивизор H такой, что у $D \cdot H$ и r нет общего делителя, большего единицы (т.е. $(D \cdot H, r) = 1$);
- ii) для любого обильного дивизора H , удовлетворяющего условию $(D \cdot H, r) = 1$, существует единственное H -стабильное исключительное векторное расслоение E такое, что $v(E) = v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Так как $v^2 = 1$, то $2rs - D^2 = 1$. Это означает, что $D \notin r' \cdot H^2(S, \mathbb{Z})$ для любого числа r' такого, что $(r', r) > 1$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ – наибольший общий делитель). Наша решетка $H^2(S, \mathbb{Z})$ унимодулярна, поэтому существует $X \in H^2(S, \mathbb{Z})$ такой, что $(X \cdot D, r) = 1$. Пучок $H_k = X + krH$ будет очень обильным для любого обильного дивизора H и $k \gg 0$. Очевидно, пучок H_k удовлетворяет условию $(H_k \cdot D, r) = 1$. Утверждение i) доказано.

ii) Обозначим через X универсальное накрывающее пространство для S ; X является КЗ-поверхностью. Отображение накрытия обозначим через π . Рассмотрим вектор $\hat{v} = (r, D', s') = \pi^*(v)$ на КЗ-поверхности X . Оказывается, что $\hat{v}^2 = 2$, поэтому по теореме Кулешова на X существует $\hat{H} = \pi^*(H)$ -полустабильное исключительное векторное расслоение F такое, что $\hat{v}(F) = \hat{v}$. На самом деле, F $\hat{H}$ -стабильно. Действительно, $(\hat{H} \cdot D', r) = (2H \cdot D, r) = 1$ (напомним, что число r нечетно) и для произвольного подпучка W такого, что $0 < \operatorname{rank}(W) < \operatorname{rank}(F)$, будет справедливо неравенство

$$\frac{c_1(W) \cdot \hat{H}}{\operatorname{rank}(W)} < \frac{D' \cdot \hat{H}}{\operatorname{rank}(F)}.$$

Следовательно, такой пучок F $\hat{H}$ -стабилен. Таким образом, оба пучка F и $\sigma^*(F)$ $\hat{H}$ -стабильны, где σ – инволюция без неподвижных точек на X такая, что $X/\sigma = S$. Легко видеть, что $\chi(F, \sigma^*(F)) = 2$. Поэтому существует ненулевой гомоморфизм из F в $\sigma^*(F)$, который должен быть изоморфизмом, так как оба векторных расслоения $\hat{H}$ -стабильны и имеют одинаковый детерминант. Этот изоморфизм означает, что существует расслоение E на поверхности S такое, что $\pi^*(E) = F$. Конечно, векторное расслоение E H -стабильно и $v(E) = v$. Предположим, что существует другое H -стабильное векторное расслоение $\hat{E}$ такое, что $v(E) = v(\hat{E})$. Тогда $\chi(E, \hat{E}) = 1$, значит существует нетривиальное отображение $\varphi: E \rightarrow \hat{E}$ или согласно принципу двойственности Серра $\rho: \hat{E} \rightarrow E \otimes K$. Из предположения стабильности вытекает, что оба отображения должны быть изоморфизмами. Но тогда $E = \hat{E}$ или $\det \rho$ задает ненулевой элемент в каноническом классе. Это противоречие доказывает единственность H -стабильного расслоения.

Заметим, что из условия $\text{Ext}^1(E, E) = 0$ вытекает только то, что пространство модулей таких расслоений дискретно. Утверждение ii) означает, что такое E единственно, и поэтому пространство модулей состоит только из одной точки.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неизвестно, является ли H -стабильное исключительное векторное расслоение E G -нестабильным относительно любого другого обильного дивизора G . Из теоремы вытекает, что такое возможно только, если $(G \cdot c_1(E), \text{rank}(E)) > 1$.

5. Примеры. Приведем несколько конкретных примеров исключительных векторных расслоений. Один путь их построения, как в теореме 2, состоит в том, чтобы найти стабильное инвариантное исключительное векторное расслоение на КЗ-поверхности. Рассмотрим представление Хирокавы для поверхности Энриквеса (подробности см. в [7]). Введем на $\mathbb{P}^3$ координаты $(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$, в которых квадрика $Q = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ вкладывается с помощью отображения

$$z_0 = x_0 y_0, \quad z_1 = x_1 y_1, \quad z_2 = x_0 y_1, \quad z_3 = x_1 y_0.$$

Определим инволюцию τ на $\mathbb{P}^3$ формулой $\tau(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) = (z_0 : z_1 : -z_2 : -z_3)$; тогда Q инвариантна относительно действия τ и ограничение τ на Q имеет вид

$$\tau(x_0 : x_1)(y_0 : y_1) = (x_0 : -x_1)(y_0 : -y_1).$$

Инволюция τ имеет на Q четыре неподвижные точки

$$(x_0 : x_1)(y_0 : y_1) = (1 : 0)(1 : 0), (1 : 0)(0 : 1), (0 : 1)(0 : 1), (0 : 1)(1 : 0).$$

Рассмотрим τ -инвариантный многочлен бистепени $(4, 4)$, определяющий τ -инвариантную кривую B . Предположим, что на B нет неподвижных точек инволюции τ . Рассмотрим двукратное накрытие X поверхности Q , разветвленное над B . Оказывается, что X является КЗ-поверхностью и инволюция τ индуцирует на X инволюцию σ , не имеющую неподвижных точек. Таким образом, $X/\sigma = S$ является поверхностью Энриквеса. Заметим, что таким образом можно получить общую поверхность Энриквеса. Обозначим через $\pi: X \rightarrow S$ отображение факторизации, через $\varphi: X \rightarrow Q$ отображение двукратного накрытия, разветвленное над B . Если E – исключительное векторное расслоение

на Q , то расслоение $\varphi^*(E) = \hat{E}$ также является исключительным. Действительно, согласно формуле проекции $H^i(\text{End}_{O_X}(\hat{E})) = H^i(\text{End}_{O_Q}(E)) \oplus H^i(\text{End}_{O_Q}(E) \otimes (-K_Q))$ (напомним, что $B = -2K_Q$). Так как в силу двойственности Серра

$$H^i(\text{End}_{O_Q}(E) \otimes (-K_Q)) = H^{2-i}(\text{End}_{O_Q}(E)),$$

то векторное расслоение $\hat{E}$ на КЗ-поверхности X является исключительным. Это расслоение σ -инвариантно, так как E τ -инвариантно на квадрике Q . (Действительно, расслоение E жесткое, поэтому оно $\text{PGL}(2) \times \text{PGL}(2)$ -однородно.) Ввиду того, что $\hat{E}$ σ -инвариантно, существует векторное расслоение F на S такое, что $\hat{E} = \pi^*(F)$. Легко видеть, что $v^2(F) = 1$ и F жесткое, поэтому F является исключительным векторным расслоением на поверхности Энриквеса S . Ничего не известно о стабильности расслоений $\hat{E}$ и F . Эта конструкция порождает много исключительных векторных расслоений, так как известен способ получения всех исключительных векторных расслоений на гладкой квадрике Q .

Аналогично можно рассмотреть квартику X в $\mathbb{P}^3$, заданную уравнением $z_0^4 + z_1^4 - z_2^4 - z_3^4$. Это гладкая КЗ-поверхность (см. [8]). Пусть T – автоморфизм пространства $\mathbb{P}^3$ вида

$$T: (z_0, z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_0, \sqrt{-1}z_1, -z_2, -\sqrt{-1}z_3).$$

У этого автоморфизма четыре неподвижные точки в $\mathbb{P}^3$, ни одна из которых не лежит на поверхности X ; у автоморфизма T^2 две неподвижные прямые

$$l_1 = (z_0 = z_2 = 0), \quad l_2 = (z_1 = z_3 = 0).$$

Прямые l_1 и l_2 пересекают поверхность X в восьми точках $p_1, \dots, p_8$. Рассмотрим раздутие $\bar{X} \rightarrow X$ поверхности X в этих восьми точках. Обозначим через $\bar{T}$ индуцированный автоморфизм на $\bar{X}$. Оказывается, что поверхность $X' = \bar{X}/\{\bar{T}^{2n}\}$ является КЗ-поверхностью и $\bar{T}$ действует на X' как инволюция без неподвижных точек. Поэтому $X'/\bar{T}$ является поверхностью Энриквеса S . Таким образом, по каждому исключительному векторному расслоению на $\mathbb{P}^3$ построено исключительное векторное расслоение на S ; действительно, в силу того, что каждое исключительное расслоение на $\mathbb{P}^3$ однородно, оно является и T -инвариантным. Конечно, полученное таким образом векторное расслоение на X' исключительно и его образ – тоже исключительное векторное расслоение. Эта конструкция приводит к большому числу исключительных векторных расслоений на S , которые можно описать, зная исключительные векторные расслоения на $\mathbb{P}^3$.

Теперь рассмотрим возможность построения исключительных наборов на поверхности Энриквеса. Напомним, что по определению набор векторных расслоений $E_1, \dots, E_n$ является исключительным, если $\text{Ext}^i(E_k, E_j) = 0$ для всех i и $k > j$. В частности, $\chi(E_k, E_j) = 0$. Но на поверхности Энриквеса $\chi(E, F) = \chi(F, E)$ для любых пучков E и F . Поэтому для исключительного набора на поверхности Энриквеса должны выполняться условия

$$\text{Ext}^i(E_k, E_j) = 0 \quad \forall i \text{ и } k > j, \quad \chi(E_a, E_b) = 0 \quad \text{при } a \neq b.$$

На общей поверхности Энриквеса существует исключительный набор из десяти расслоений. Известно, что на общей поверхности Энриквеса есть десять различных эллиптических пучков, скажем $|2F_1|, \dots, |2F_{10}|$ (см. [4]). Легко видеть, что $\text{Ext}^i(F_k, F_j) = 0$

$\forall i$ и $k \neq j$, поэтому набор $F_1, F_2, \dots, F_{10}$ исключительный. Было бы очень интересно описать ортогональную категорию в производной категории $D(S)$ пучков на поверхности Энриквеса S . В этой ортогональной категории должно быть всего два независимых элемента.

6. Модулярные операции. Существуют естественные модулярные отображения из одного пространства модулей в другое, определяющие изоморфизм касательных пространств к этим пространствам модулей. К ним относятся отображения $E \leftrightarrow E^*$, $E \leftrightarrow E \otimes D$, где D – линейное расслоение. На поверхности Энриквеса существует очень интересная модулярная операция, которую называют *отражением*. Эта операция аналогична отражению на КЗ-поверхностях (см. [9, 4.10, 4.11]). На решетке Мукая это отражение действует следующим образом:

$$v = (r, D, s) \leftrightarrow R(v) = \hat{v} = \left(2s, D + \left(s + \frac{r}{2} \right) K_S, \frac{r}{2} \right).$$

Заметим, что $v^2 = 2rs - D^2 = \hat{v}^2$.

Теперь опишем отражение в терминах пучков. Предположим, что пучок E без кручения порожден своими сечениями и

$$v(E) = v = (r, D, s), \quad \chi(E \otimes K) = h^0(E \otimes K), \quad h^1(E \otimes K) = h^1(E) = 0.$$

Заметим, что отсюда следует $h^2(E \otimes K) = h^2(E) = 0$, $h^0(E) = \chi(E) = \chi(E \otimes K)$. Если, например, подкрутить произвольное стабильное расслоение на достаточно большой очень обильный дивизор, то необходимое условие будет выполнено. Рассмотрим следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \overline{E}^* \rightarrow H^0(E) \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\text{ev}} E \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $\text{ev}: H^0(E) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow 0$ является каноническим отображением свертки (по предположению сюръективным). Для удобства введем обозначения $H = H^0(E)$, $h = \dim H$ и рассмотрим двойственную последовательность

$$0 \rightarrow E^* \rightarrow H^* \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow \overline{E} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Из наших условий и двойственности Серра вытекает, что

$$h^1(\overline{E}) = h^2(E^*) = h^0(E \otimes K) = \chi(E \otimes K) = h.$$

Рассмотрим последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\overline{E}) \otimes K_S \rightarrow \hat{E} \rightarrow \overline{E} \rightarrow 0, \quad (3)$$

где $\hat{E}$ задается универсальным коциклом $\text{id} \in \text{Ext}^1(\overline{E}, H^1(\overline{E})) = \text{End}(H^1(\overline{E}))$. Положим $R(E) = \hat{E}$. Из последовательностей (1) и (3), наших предположений и двойственности Серра непосредственно вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предположим, что пучок E удовлетворяет изложенным выше предположениям. Тогда пучки $\overline{E}$ и $\widehat{E}$ из последовательностей (1) и (3) обладают следующими свойствами:*

- 1) $\overline{E}$ глобально порожден своими сечениями;
- 2) $\chi(\overline{E}) = 0$, $h^0(\overline{E}) = h = h^1(\overline{E})$, $h^2(\overline{E}) = 0$;
- 3) $\chi(\overline{E} \otimes K) = 0$, $h^i(\overline{E} \otimes K_S) = 0 \quad \forall i > 0$.
- 4) $v(\widehat{E}) = \widehat{v} = R(v) = (2s, D + (s + r/2)K_S, r/2)$ и $h^0(\widehat{E}) = h^0(\widehat{E} \otimes K) = h$, $h^i(\widehat{E}) = h^i(\widehat{E} \otimes K) = 0 \quad \forall i > 0$;
- 5) $\text{Hom}(E, E) = \text{Hom}(\overline{E}, \overline{E}) = \text{Hom}(\widehat{E}, \widehat{E})$, $\text{Ext}^2(\overline{E}, \overline{E}) = 0$;
- 6) $\text{rank}(E) = \text{rank}(\widehat{E}) \pmod{2}$; более того, если $\text{rank}(E) = 2k + 1$ и оба пучка E и $\widehat{E}$ H -стабильны, то $\text{Ext}^2(\widehat{E}, \widehat{E}) = \text{Ext}^2(E, E) = 0$, $\text{Ext}^1(\widehat{E}, \widehat{E}) = \text{Ext}^1(E, E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пучок $H^* \otimes O_S$ в середине последовательности (2) глобально порожден своими сечениями, поэтому то же справедливо и для пучка $\overline{E}$.

2) Длинная точная последовательность когомологий, отвечающая последовательности (2), дает $h^0(\overline{E}) = h$, так как из двойственности Серра вытекает, что $h^0(E^*) = h^2(E \otimes K) = 0$ и $h^1(E^*) = h^1(E \otimes K) = 0$. Кроме того, как уже отмечалось, $h^2(\overline{E}) = 0$ и $h^1(\overline{E}) = h$. Поэтому $\chi(\overline{E}) = 0$.

3) Рассмотрим последовательность (2), подкрученную на K :

$$0 \rightarrow E^* \otimes K \rightarrow H^* \otimes K_S \rightarrow \overline{E} \otimes K \rightarrow 0.$$

Аналогично, длинная точная когомологическая последовательность дает $h^0(\overline{E} \otimes K) = h^1(E^* \otimes K) = h^1(E)$ и $h^1(\overline{E} \otimes K) = 0$, так как $h^2(E^* \otimes K) = h^0(E) = h = h^2(H^* \otimes K)$; $h^2(\overline{E} \otimes K) = h^0(\overline{E}^*)$ (в силу последовательности (1)).

4) Несложное вычисление показывает, что $v(\widehat{E}) = \widehat{v} = (2s, c_1(E) + (s + r/2)K_S, r/2)$. Так как последовательность (3) представляет собой универсальное расширение, то $h^1(\widehat{E}) = h^2(\widehat{E}) = 0$, поэтому по теореме Римана–Роха $h^0(\widehat{E}) = h$. Подкрутив (3) на K и воспользовавшись свойствами пучка $\overline{E} \otimes K$, легко получаем, что $h^0(\widehat{E} \otimes K) = h$, $h^1(\widehat{E} \otimes K) = h^2(\widehat{E} \otimes K) = 0$.

5) Применив $\text{Hom}(\overline{E}, *)$ к (2), получим длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}^0(\overline{E}, E^*) &\rightarrow \text{Ext}^0(\overline{E}, H^* \otimes O_S) \rightarrow \text{Ext}^0(\overline{E}, \overline{E}) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\overline{E}, E^*) \rightarrow \text{Ext}^1(\overline{E}, H^* \otimes O_S) \rightarrow \text{Ext}^1(\overline{E}, \overline{E}) \\ &\rightarrow \text{Ext}^2(\overline{E}, E^*) \rightarrow \text{Ext}^2(\overline{E}, H^* \otimes O_S) \rightarrow \text{Ext}^2(\overline{E}, \overline{E}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ввиду двойственности Серра и утверждения 3) средние члены строчек имеют вид $H^i(\overline{E} \otimes K) \otimes H^* = 0$. Поэтому $\text{Ext}^1(\overline{E}, E^*) = \text{Ext}^0(\overline{E}, \overline{E})$, $\text{Ext}^2(\overline{E}, \overline{E}) = 0$. Аналогично, применяя $\text{Hom}(*, E^*)$ к (2), получим

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}^0(\overline{E}, E^*) &\rightarrow \text{Ext}^0(H^* \otimes O_S, E^*) \rightarrow \text{Ext}^0(E^*, E^*) \\ &\rightarrow \text{Ext}^1(\overline{E}, E^*) \rightarrow \text{Ext}^1(H^* \otimes O_S, E^*) \rightarrow \text{Ext}^1(E^*, E^*) \rightarrow . \end{aligned}$$

Из наших предположений и двойственности Серра вытекает, что средние элементы строчек имеют вид

$$\text{Ext}^0(H^* \otimes O_S, E^*) = H^2(E \otimes K) = 0 = \text{Ext}^1(H^* \otimes O_S, E^*) = H^1(E \otimes K).$$

Таким образом, $\text{Hom}(E^*, E^*) = \text{Hom}(E, E) = \text{Hom}(\overline{E}, \overline{E})$. Применение $\text{Hom}(\widehat{E}, *)$ к (3) дает

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}^0(\widehat{E}, H \otimes K) &\rightarrow \text{Ext}^0(\widehat{E}, \widehat{E}) \rightarrow \text{Ext}^0(\widehat{E}, \overline{E}) \rightarrow, \\ 0 \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{E}, H \otimes K) &\rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{E}, \widehat{E}) \rightarrow \text{Ext}^1(\widehat{E}, \overline{E}) \rightarrow. \end{aligned}$$

В силу того, что $\text{Ext}^0(\widehat{E}, H \otimes K) = H^2(\widehat{E}) \otimes H = 0$, получаем $\text{Ext}^0(\widehat{E}, \widehat{E}) = \text{Ext}^0(\widehat{E}, \overline{E})$. И, аналогично, применяя $\text{Hom}(*, \overline{E})$, имеем $\text{Ext}^0(\widehat{E}, \widehat{E}) = \text{Ext}^0(\overline{E}, \overline{E})$.

6) Если $\text{rank}(E)$ нечетен, то $s(E) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, но $s(E) \notin \mathbb{Z}$, поэтому число $\text{rank}(\widehat{E}) = 2s(E)$ тоже нечетно. Если же $\text{rank}(E)$ четен, то $s(E) \in \mathbb{Z}$, поэтому $\text{rank}(\widehat{E}) = 2s(E)$ тоже четен. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент φ в $\text{Ext}^2(E, E) = \text{Ext}^0(E, E \otimes K)^*$. Ввиду стабильности элемент φ должен быть изоморфизмом, но тогда $\det \varphi$ представляет собой ненулевой элемент канонического класса. Это противоречие показывает, что $\text{Ext}^2(E, E) = 0$ и $\text{Ext}^2(\widehat{E}, \widehat{E}) = 0$. Из того, что $v^2 = \widehat{v}^2$, следует $\text{Ext}^1(E, E) = \text{Ext}^1(\widehat{E}, \widehat{E})$.

В следующей ситуации мы можем отражение обратить. Рассмотрим пучок F и предположим, что имеет место такая точная последовательность:

$$0 \rightarrow H^0(F \otimes K_S) \otimes K_S \xrightarrow{\text{ev}} F \rightarrow \overline{F} \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $\text{ev}: H^0(F \otimes K_S) \otimes K_S \rightarrow F$ — каноническая свертка. Предположим, что $\overline{F}$ — глобально порожденный пучок без кручения. Тогда имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \rightarrow \widehat{F}^* \rightarrow H^0(\overline{F}) \otimes O_S \xrightarrow{\text{ev}} \overline{F} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Положим $R(F) = \widehat{F}$. При этих предположениях справедлив аналогичный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что пучок F удовлетворяет указанным предположениям. Тогда для пучков $\overline{F}$ и $\widehat{F}$ из последовательностей (4) и (5) справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\chi(\overline{F}) = 0$, $h^0(\overline{F}) = h = h^1(\overline{F})$, $h^2(\overline{F}) = 0$;
- 2) $\chi(\overline{F} \otimes K) = 0$, $h^i(\overline{F} \otimes K_S) = 0 \quad \forall i > 0$;
- 3) $v(\widehat{F}) = \widehat{v} = (2s, D + (s + r/2)K_S, r/2)$ и $h^0(\widehat{F}) = h^0(\widehat{F} \otimes K) = h$, $h^i(\widehat{F}) = h^i(\widehat{F} \otimes K) = 0 \quad \forall i > 0$;
- 4) $\text{Hom}(F, F) = \text{Hom}(\overline{F}, \overline{F}) = \text{Hom}(\widehat{F}, \widehat{F})$, $\text{Ext}^2(\overline{F}, \overline{F}) = 0$;
- 5) $\text{rank}(F) = \text{rank}(\widehat{F}) \pmod{2}$; более того, если $\text{rank}(F) = 2k + 1$ и оба пучка F и $\widehat{F}$ H -стабильны, то $\text{Ext}^2(\widehat{F}, \widehat{F}) = \text{Ext}^2(F, F) = 0$, $\text{Ext}^1(\widehat{F}, \widehat{F}) = \text{Ext}^1(F, F)$.

Заметим, что из предложений 2 и 3 вытекает, что $R(R(E)) = E$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отражение всегда существует в производной категории пучков на поверхности S . При этом неважно, сюръективно или инъективно отображение свертки $H^0(F) \otimes O_S \xrightarrow{\text{ev}} F$.

Теперь приведем несколько примеров отражений.

ПРИМЕР 1. Пусть C – гладкая кривая на S , A – глобально порожденный дивизор на C , обладающий следующими свойствами: $h^1(O_C(A)) = h^1(O_C(A \otimes K_S)) = 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow E(C, A)^* \rightarrow H^0(O_C(A)) \otimes O_S \xrightarrow{\text{ev}} O_C(A) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Двойственная к (6) последовательность имеет вид

$$0 \rightarrow H^0(A)^* \otimes O_S \rightarrow E(C, A) \rightarrow O_C(C) \otimes A^* \rightarrow 0.$$

В силу наших предположений, этой последовательности и двойственности Серра на кривой C имеем $h^1(E(C, A)) = h^1(O_C(C - A)) = h^0(O_C(A))$, откуда вытекает последовательность

$$0 \rightarrow H^1(E(C, A)) \otimes K_S \rightarrow \hat{E} \rightarrow E(C, A) \rightarrow 0.$$

Поэтому $R(O_C(A)) = \hat{E}$.

Если $C - (-2)$ -кривая и $A = O_C$, то $R(O_C) = F$ – экстремальное векторное расслоение ранга 2, т.е. $\text{Ext}^0(F, F) = \text{Ext}^2(F, F) = \mathbb{C}$, $\text{Ext}^1(F, F) = 0$.

ПРИМЕР 2. Если $|2F|, |2G|$ – два эллиптических пучка на S , то у пучка $|F + G|$ две различные базисные точки x и y . Стандартная последовательность

$$0 \rightarrow J_{x+y}(F + G) \rightarrow O(F + G) \rightarrow O_{x+y}(F + G) \rightarrow 0$$

показывает, что $h^1(J_{x+y}(F + G)) = 2$. В результате получим следующее трехмерное расслоение E , определенное универсальным коциклом $\text{id} \in \text{End}(H^1(J_{x+y}(F + G)))$:

$$0 \rightarrow H^1(J_{x+y}(F + G)) \otimes K_S \rightarrow E \rightarrow J_{x+y}(F + G) \rightarrow 0.$$

Согласно [9, леммы 1.1, 1.2] E – простое расслоение. Несложное вычисление показывает, что расслоение E исключительное. Кроме того, из предложения 3 вытекает, что $R(E) = O(F + G)$. Заметим, что расслоение $O(F + G)$ не порождено сечением глобально, поэтому к нему нельзя применить предложение 2 и получить $R(O(F + G))$, но это можно проделать в производной категории. Так как $R(E) = O(F + G)$, то также $R(O(F + G)) = E$.

ПРИМЕР 3. Дивизор $O(aF + bG)$ при $a \geq b \geq 2$ на общей поверхности Энриквеса обилиен. Поэтому $R(O(aF + bG))$ – исключительное векторное расслоение ранга $2ab + 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kim H. Exceptional bundles on nodal Enriques surfaces. Preprint. Bayreuth, 1991.
- [2] Kim H. Exceptional bundles and moduli spaces of stable vector bundles on Enriques surfaces. Preprint. Bayreuth, 1991.
- [3] Naie D. Special rank two vector bundles over Enriques surfaces. Preprint. Paris: Université de Paris-Sud, 1993.
- [4] Cossec F., Dolgachev I. Enriques Surfaces 1. Basel: Birkhäuser, 1989.
- [5] Кулешов С. А. Теорема существования исключительных расслоений на поверхностях типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. V. 53. № 2. P. 363–378.
- [6] Mukai S. On the moduli space of bundles on $K3$ surfaces. I // Vector bundles on algebraic varieties. Bombay: Tata Inst. Fund. Res., 1987. P. 341–413.
- [7] Bart W., Peter C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1984.
- [8] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
- [9] Tyurin A. N. Cycles, curves and vector bundles on algebraic surfaces // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 1–26.