Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кучеренко, В. П. Маслов, О спектре конечномерных квадратичных бозевских операторов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 835–854

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:04:09

УДК 517

О СПЕКТРЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ БОЗЕВСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. В. Кучеренко, В. П. Маслов

В работе приведено полное исследование спектра конечномерного квадратичного бозевского оператора. Изучены случаи, когда спектр оператора дискретен и непрерывен.

Библиография: 16 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конечномерный квадратичный бозевский оператор на пространстве Фока $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \dots$ [1], [2], где $\mathcal{H}^k$ – гильбертово пространство симметричных функций из $L_2(\mathbb{R}^{lk})$, $k \geq 0$, $\mathcal{H}^0$ – одномерное пространство:

$$\hat{H}(a^+, a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B_{ij} a_i^+ a_j^+ + 2A_{ij} a_i^+ a_j + B_{ij}^* a_i a_j), \quad (1)$$

$$B_{ij} = B_{ji}, \quad A_{ij}^* = A_{ji}, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0.$$

Знак '*' означает комплексное сопряжение, знак '+' – сопряженный оператор.

Выберем n ортогональных вещественных функций $f_i(x)$, $f_i \in L_2(\mathbb{R}^l)$, $1 \leq i \leq n$, и рассмотрим представление, в котором операторы a_j^+ , a_j определяются соотношениями

$$(a_j^+ \Phi)_k(x_1, \dots, x_k) = k^{-1/2} \sum_{i=1}^k f_j(x_i) \Phi_{k-1}(x_i, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k),$$

$$(a_j \Phi)_k(x_1, \dots, x_k) = k^{1/2} \int_{\mathbb{R}^l} \Phi_{k+1}(x_i, \dots, x_k, \xi) f_j(\xi) d\xi.$$

Запишем оператор (1) в непрерывном представлении через операторы рождения $\Psi^+(x)$ и уничтожения $\Psi(x)$. Положим

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} f_i(x) f_j(y), \quad A(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} f_i(x) f_j(y).$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке фонда CONACYT and CINVESTAV under Catedra Patrimonial. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант № 94–2763.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \hat{H}(a^+, a) &= H_2(\Psi^+, \Psi) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^{2l}} (B(x, y) \Psi^+(x) \Psi^+(y) + 2A(x, y) \Psi^+(x) \Psi(y) + B^*(x, y) \Psi(x) \Psi(y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим подпространство $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ финитных функций из $\mathcal{H}_B$:

$$\Phi = (\Phi_0, \Phi_1(x), \Phi_2(x_1, x_2), \dots)^T \in \widetilde{\mathcal{H}}_B,$$

если существует такое число $d(\Phi)$, что при $j \geq d(\Phi)$ имеем $\Phi_j = 0$. Очевидно, оператор (2) определен на $\widetilde{\mathcal{H}}_B$ и согласно [1] его замыкание есть самосопряженный оператор на $\mathcal{H}_B$.

Приведение квадратичного оператора (2) к более простому виду можно достичь подобным преобразованием операторов Ψ^+ , Ψ унитарным оператором Q :

$$\xi = Q^+ \Psi Q, \quad \xi^+ = Q^+ \Psi^+ Q, \quad Q^+ Q = Q Q^+ = E. \quad (3)$$

Следуя [1]–[3], мы рассмотрим унитарные преобразования, которые можно представить в виде

$$\xi = \mathbf{U}^+ \Psi - \mathbf{V}^+ \Psi^+, \quad \xi^+ = -\mathbf{V}^T \Psi + \mathbf{U}^T \Psi^+. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{U}$ – ограниченный оператор в $L_2(\mathbb{R}^l)$, $\mathbf{V}$ – оператор Гильберта–Шмидта в $L_2(\mathbb{R}^l)$. Формулы (4) определяют в этом случае так называемое *собственное каноническое преобразование*.

Поскольку преобразование (3) обратимо и сохраняет коммутатор: $[\Psi(x), \Psi^+(y)] = [\xi(x), \xi^+(y)] = \delta(x - y)$, – то для матричных операторов

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+ & -\mathbf{V}^+ \\ -\mathbf{V}^T & \mathbf{U}^T \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V}^* \\ \mathbf{V} & \mathbf{U}^* \end{pmatrix} \quad (5)$$

справедливы соотношения (см. [1]–[3]) $\mathcal{K} \mathcal{A} = E$, $\mathcal{A} \mathcal{K} = E$. Положим

$$\widetilde{H}_2(\xi^+, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} H_2(\mathbf{V} \xi + \mathbf{U}^* \xi^+, \mathbf{U} \xi + \mathbf{V}^* \xi^+). \quad (6)$$

Очевидно,

$$Q^+ H_2(\Psi^+, \Psi) Q = \widetilde{H}_2(\xi^+, \xi). \quad (7)$$

Как и в [4], [5], преобразование (4) выберем так, чтобы квадратичный оператор $\widetilde{H}_2(\xi^+, \xi)$ был равен сумме коммутирующих стандартных форм квадратичных бозевских операторов.

Из формулы (6) (или формулы (7), которая традиционно используется при исследовании спектральных свойств операторов) следует, что спектры операторов (1) и $\widetilde{H}_2(\xi^+, \xi)$, $H_2(\Psi^+, \Psi)$ совпадают.

Дополним ортогональные функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ до полной ортогональной вещественной системы в $L_2(\mathbb{R}^l)$. Операторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ будем искать (см. [2], [4], [5]) в виде интегральных операторов с ядрами

$$\mathbf{U}(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j(x) f_j(y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) f_k(y), \quad \mathbf{V}(x, y) = \sum_{j=1}^n v_j(x) f_j(y). \quad (8)$$

Очевидно, при $u_j, v_j \in L_2$ оператор $\mathbf{U}$ ограничен в L_2 , а $\mathbf{V}$ – оператор Гильберта–Шмидта. Следуя [4], [5], выберем векторы $(u_j, v_j)^T$ из корневых подпространств оператора $\mathbf{C}$: $\mathbf{C}_{11} = A$, $\mathbf{C}_{12} = B$, $\mathbf{C}_{21} = -B^*$, $\mathbf{C}_{22} = -A^*$, так, чтобы они были ортогональны векторам $(0, f_j)^T$, $(f_j, 0)^T$, $j \geq n + 1$.

Рассмотрим корневые пространства конечномерного матричного оператора $\|C\|$:

$$C_{11} = \|A\|, \quad C_{12} = \|B\|, \quad C_{21} = -\|B^*\|, \quad C_{22} = -\|A^*\|,$$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \|A_{ij}\|, \quad \|B\| \stackrel{\text{def}}{=} \|B_{ij}\|.$$

Каждому вектору $(d_j, g_j)^T$ из корневого пространства матрицы $\|C\|$, соответствующему собственному числу λ_j , отвечает вектор $(u_j, v_j)^T$,

$$u_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^n d_j^\beta f_\beta(x), \quad v_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta=1}^n g_j^\beta f_\beta(x) \quad (9)$$

из корневого пространства оператора $\mathbf{C}$, соответствующий тому же собственному числу λ_j и ортогональный векторам $(f_j, 0)^T$, $(0, f_j)^T$, $j \geq n + 1$.

Спектр матрицы $\|C\|$ разбивается на объединение (см. [4], [5])

- 1) четверок $\lambda_j, \lambda_j^*, -\lambda_j, -\lambda_j^*$ в случае $\text{Im } \lambda_j \neq 0, \text{Re } \lambda_j \neq 0$;
- 2) пар $\lambda_k, -\lambda_k$ в случае $\text{Re } \lambda_k = 0$ или $\text{Im } \lambda_k = 0$, но $\lambda_k \neq 0$;
- 3) одной точки $\lambda = 0$ (возможно).

Обозначим через R_{λ_j} корневое подпространство, соответствующее $\lambda_j \in \sigma(\|C\|)$, и положим

$$R_j \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda_j} \oplus R_{-\lambda_j} \oplus R_{\lambda_j^*} \oplus R_{-\lambda_j^*}, \quad \text{если } \text{Re } \lambda_j \neq 0, \text{Im } \lambda_j \neq 0,$$

$$R_j \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda_k} \oplus R_{-\lambda_k}, \quad \text{если } \text{Re } \lambda_k = 0 \text{ или } \text{Im } \lambda_k = 0, \text{но } \lambda_k \neq 0,$$

$$R_0 \stackrel{\text{def}}{=} R_{\lambda_l} \quad \text{если } \lambda_l = 0.$$

В [4], [5] доказано, что размерность R_j всегда четна, $\dim R_j = 2m_j$, и в подпространстве R_j можно так выбрать m_j векторов $(d_{j,\alpha}; g_{j,\alpha})^T$, $1 \leq \alpha \leq m_j$, что вычисленные по ним согласно формулам (9) функции $(u_j^\alpha(x), v_j^\alpha(x))^T$ определяют собственное каноническое преобразование.

Разобьем функции $\{f_1, \dots, f_n\}$ на ν блоков по m_j функций в каждом блоке и введем для них двойную нумерацию: f_j^α , $1 \leq j \leq \nu$, $1 \leq \alpha \leq m_j$, $\sum_{j=1}^\nu m_j = n$. Каноническое преобразование, отвечающее функциям u_j^α, v_j^α , определим соотношениями

$$\mathbf{U}(x, y) = \sum_{j=1}^\nu \sum_{\alpha=1}^{m_j} u_j^\alpha(x) f_j^\alpha(y) + \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x) f_k(y),$$

$$\mathbf{V}(x, y) = \sum_{j=1}^\nu \sum_{\alpha=1}^{m_j} v_j^\alpha(x) f_j^\alpha(y). \quad (10)$$

В [4], [5] доказано, что при соответствующем выборе векторов $(u_j^\alpha, v_j^\alpha)^T$ собственное каноническое преобразование (10) приводит квадратичный оператор (2) к

сумме стандартных форм коммутирующих квадратичных бозеоператоров $\hat{H}_{\mu_j}(\xi_j^+, \xi_j)$, $\xi_j = (\xi_j^1, \dots, \xi_j^{m_j})$, $[\xi_j^\gamma, (\xi_k^\beta)^+] = \delta_{\gamma\beta} \delta_{jk}$, $[\xi_j^\gamma, \xi_k^\beta] = 0$:

$$H(a^+, a) = \sum_{j=1}^{\nu} H_{\mu_j}(\xi_j^+, \xi_j) + \text{const}.$$

Стандартные формы $H_{\mu_j}(\xi_j^+, \xi_j)$ полностью определяются спектром и размерами жордановых клеток ограничения матрицы $\|C\|$ на подпространство R_j .

Каждому квадратичному оператору $\hat{H}_{\mu_j}$ заменой ξ_j на $z_j = q_j + ip_j$, ξ_j^+ на $z_j^* = q_j - ip_j$ сопоставим (в силу условий $B_{ij} = B_{ji}$, $A_{ij}^* = A_{ji}$) вещественную квадратичную функцию $H_{\mu_j}(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} H_{\mu_j}(z^*, z)$.

Доказано [1], [4], [5], что из матриц (5) конечномерных (типа (8)) собственных канонических преобразований операторов ξ^+ , ξ подобным преобразованием можно получить матрицы линейных вещественных симплектических преобразований. Справедливо и обратное утверждение.

Поэтому классификация квадратичных конечномерных операторов $H_{\mu_j}(\xi_j^+, \xi_j)$ относительно конечномерных канонических преобразований следует из уже разработанной классификации вещественных квадратичных гамильтонианов относительно линейных вещественных симплектических преобразований [6, добавление 6], [7].

Стандартные формы $\hat{H}_{\mu_j}(\xi_j^+, \xi_j)$ получаются из стандартных форм $H_{\mu_j}(q, p)$ квадратичных вещественных гамильтонианов заменой q на $(\xi^+ + \xi)/2$ и p на $(\xi - \xi^+)/2i$; при этом сначала действует оператор $(\xi - \xi^+)/2i$, а затем оператор $(\xi^+ + \xi)/2$:

$$\hat{H}_{\mu_j}(\xi_j, \xi_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(H_{\mu_j} \left(\frac{\xi^+ + \xi}{2}, \frac{\xi - \xi^+}{2i} \right) + H_{\mu_j} \left(\frac{\xi^+ + \xi}{2}, \frac{\xi - \xi^+}{2i} \right)^+ \right). \quad (11)$$

В [6, добавление 6] стандартные формы квадратичных гамильтонианов классифицированы по собственным значениям и размерам жордановых клеток матрицы $I \text{Hess } H_{\mu}(q, p)$, $I_{11} = 0$, $I_{12} = E$, $I_{21} = -E$, $I_{22} = 0$, или в силу сказанного выше по собственным значениям и размерам жордановых клеток матрицы $\|C\|_{R_j}$. В дальнейшем будем использовать классификацию [6], а при переходе к спектру $\|C\|_{R_j}$ будем домножать собственные числа $I \text{Hess } H_{\mu}$ на $i/2$.

ТЕОРЕМА 1. 1°) Пусть спектр матрицы $\|C\|$ вещественный и матрица $\|C\|$ не имеет присоединенных векторов. Пусть, далее, λ_k , $k = 1, \dots, n$, – все собственные значения матрицы $\|C\|$, для которых собственные векторы $(d_k, g_k)^T$ удовлетворяют условию $\|d_k\| > \|g_k\|$. Тогда конечномерный оператор (1) конечномерным собственным каноническим преобразованием приводится к виду

$$\hat{H}(a^+, a) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k^+ \xi_k + \text{const}, \quad \bigcup_{k=1}^n \lambda_k = \sigma(\|C\|),$$

и имеет только дискретный спектр вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k n_k + \text{const}, \quad n_k \in \mathbb{Z}_+.$$

2°) Если матрица $\|C\|$ имеет комплексные собственные значения, то оператор (1) имеет только непрерывный спектр.

3°) Если матрица $\|C\|$ имеет присоединенные векторы, то оператор (1) имеет только непрерывный спектр.

4°) Если оператор (1) имеет только непрерывный спектр, то $\sigma(\hat{H})$ равно $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^1_{\pm}$. Непрерывный спектр равен $\mathbb{R}^1_{\pm}$, если и только если

- а) матрица $\|C\|$ имеет нулевое собственное значение, и ему отвечает только один присоединенный вектор; нормальная форма $H_{\mu_0}(\xi^+, \xi)$, отвечающая (корневому) подпространству R_0 , имеет вид $\frac{1}{8}(\xi_1^+ + \xi_1)^2$;
- б) все отличные от нуля собственные значения матрицы $\|C\|$ вещественны и не имеют присоединенных векторов;
- в) собственные векторы $(d_j, g_j)^T$ матрицы $\|C\|$, отвечающие положительному собственному числу λ_j , удовлетворяют условию $\|d_j\| > \|g_j\|$.

5°) Непрерывный спектр оператора $\hat{H}(a^+, a)$ равен $\mathbb{R}^1_{-}$, если оператор $-\hat{H}(a^+, a)$ удовлетворяет условиям а)–в) п. 4°.

СЛЕДСТВИЕ. Если оператор (1) удовлетворяет условиям п. 4°, то $H(a^+, a) \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 и следствие с очевидной модификацией справедливы и для бесконечномерных квадратичных бозевских операторов, рассмотренных в [5], [8].

Доказательство теоремы 1 основано на исследовании спектра нормальных форм $\hat{H}_{\mu}(\xi^+, \xi)$. В дальнейшем будем использовать представление

$$\xi_{\gamma}^+ = \frac{-\partial/\partial x_{\gamma} + x_{\gamma}}{\sqrt{2}}, \quad \xi_{\gamma} = \frac{\partial/\partial x_{\gamma} + x_{\gamma}}{\sqrt{2}}.$$

Тогда

$$H_{\mu}(\xi^+, \xi) = \frac{1}{4} \left(H_{\mu} \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) + H_{\mu} \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^+ \right).$$

Нормальные формы H_{μ} из списка [6, добавление 6] разложим на сумму двух квадратичных форм A_{μ}, B_{μ} : $H_{\mu} = A_{\mu} + B_{\mu}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- скобка Пуассона $(A_{\mu}, B_{\mu}) = 0$;
- $I \text{ Hess } A_{\mu}$ – полупростая матрица;
- $I \text{ Hess } B_{\mu}$ – нильпотентная матрица.

Докажем, что этим условиям удовлетворяют функции из приведенного ниже списка, классифицированного по собственным значениям и жордановым клеткам матрицы $I \text{ Hess } H_{\mu}$:

- 1) пара жордановых клеток порядка k с вещественными собственными числами $\pm a$:
 $H_1 = A_1 + B_1$,

$$A_1 = -a \sum_{j=1}^k p_j q_j, \quad B_1 = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}, \quad k \geq 1; \quad (12)$$

- 2) четверка жордановых клеток порядка k с собственными числами $\pm a \pm ib$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$): $H_2 = A_2 + B_2$,

$$A_2 = -a \sum_{j=1}^{2k} p_j q_j + b \sum_{j=1}^k (p_{2j-1} q_{2j} - p_{2j} q_{2j-1}), \quad B_2 = \sum_{j=1}^{2k-2} p_j q_{j+2}, \quad k \geq 2; \quad (13)$$

- 3) пара жордановых клеток нечетного порядка k с собственным числом 0: $H_3 = A_3 + B_3$,

$$A_3 = 0, \quad B_3 = \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}; \quad (14)$$

при $k = 1$ имеем $B_3 = 0$;

- 4) жорданова клетка четного порядка $2k$ с собственным числом 0: $H_4 = A_4 + B_4$,

$$A_4 = 0, \quad B_4 = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j p_{k-j} - \sum_{j=1}^k q_j q_{k-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{j+1}; \quad (15)$$

при $k = 1$ имеем $A_4 = 0$, $B_4 = \pm q_1^2/2$;

- 5) пара жордановых клеток нечетного порядка $2k + 1$ с чисто мнимыми собственными числами $\pm ib$: $H_5 = A_5 + B_5$,

$$\begin{aligned} A_5 = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{k+1} (b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} + q_{2j-1} q_{2k-2j+3}) \right), \quad (16) \\ B_5 = - \sum_{j=1}^{2k} p_j q_{j+1}; \end{aligned}$$

при $k = 0$ имеем $B_5 = 0$, $A_5 = \pm (b^2 p_1^2 + q_1^2)/2$;

- 6) пара жордановых клеток четного порядка $2k$ с чисто мнимыми собственными числами $\pm ib$: $H_6 = A_6 + B_6$,

$$\begin{aligned} A_6 = -b^2 \sum_{j=1}^k p_{2j-1} q_{2j} + \sum_{j=1}^k p_{2j} q_{2j-1}, \\ B_6 = \pm \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{b^2} q_{2j-1} q_{2k-2j+1} + q_{2j} q_{2k-2j+2} \right) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{k-1} (b^2 p_{2j+1} p_{2k-2j+1} + p_{2j+2} p_{2k-2j+2}) \right); \quad (17) \end{aligned}$$

при $k = 1$ имеем $A_6 = -b^2 p_1 q_2 + p_2 q_1$, $B_6 = \pm (b^{-2} q_1^2 + q_2^2)/2$.

Для стандартных форм самосопряженных операторов $H_\mu(\xi^+, \xi)$, вычисленных согласно формуле (11) по квадратичным гамильтонианам из списка 1)–6), справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. 1°) Самосопряженные операторы $\hat{H}_\mu(\xi^+, \xi)$, соответствующие стандартным формам 1)–4), 6) и форме 5) для индекса $k \neq 0$, имеют только непрерывный спектр.

2°) Нормальной форме 5) с индексом $k = 0$ соответствует оператор

$$\pm \frac{1}{4} \left(-b^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right)$$

с чисто дискретным спектром

$$\sigma_\pm = \left\{ \lambda : \lambda = \pm \frac{b}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{Z}_+, b > 0 \right\}.$$

3°) Нормальной форме 4) при $k = 1$ соответствует оператор $\hat{H}_4 = \pm x^2/2$ и $\sigma_\pm(\hat{H}_4) = \{ \lambda : \pm \lambda \geq 0 \}$.

4°) Для операторов $\hat{H}_\mu(\xi^+, \xi)$, $1 \leq \mu \leq 6$, за исключением формы 5) при $k = 0$ и формы 4) при $k = 1$, непрерывный спектр $\sigma(\hat{H}_\mu) = \mathbb{R}^1$.

Отметим, что свойство непрерывности спектра является прямым следствием наличия нефинитных траекторий на уровне энергии $H_\mu(q, p) = \lambda$, $\lambda \in \sigma(\hat{H}_\mu)$. В случае формы 5) при $k = 0$ нефинитных траекторий нет и спектр дискретен.

Доказательство теоремы разбивается на два этапа. Сначала на основе критерия Вейля [9] доказывается, что, за исключением формы 5) при $k = 0$, спектр $\sigma(\hat{H}_\mu)$ состоит из предельных точек спектра и $\sigma(\hat{H}_\mu) = \mathbb{R}^1$, $\sigma(\hat{H}_4) = \mathbb{R}_\pm^1$ при $k = 0$. Затем, используя [10], доказываем, что область значений $H_\mu - \lambda$, $\lambda \in \sigma(\hat{H}_\mu)$ (за исключением формы 5) при $k = 0$), – плотное множество в $L_2(\mathbb{R}^m)$. (Очевидно, индекс m выражается через индекс k в формулах (12)–(17).) Это означает [11], что операторы $\hat{H}_\mu$ имеют только непрерывный спектр (за исключением формы 5) при $k = 0$).

При доказательстве теоремы используется метод канонического оператора Маслова [12] и комплексный вариант метода ВКБ [13]–[15]. Сформулируем необходимые для доказательства теоремы свойства траекторий гамильтонианов $H_\mu(q, p)$ из списка 1)–6). Обозначим через g_H^t , g_A^t , g_B^t операторы сдвига по траекториям гамильтонианов H , A , B , т.е. $g_H^t(q_0, p_0)$ есть решение гамильтоновой системы с гамильтонианом H и начальными данными (q_0, p_0) . Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Для функций A_μ , B_μ из формул (12)–(17)

- а) скобка Пуассона равна нулю: $(A_\mu, B_\mu) = 0$;
- б) $g_{H_\mu}^t = g_{A_\mu}^t \circ g_{B_\mu}^t = g_{B_\mu}^t \circ g_{A_\mu}^t$.

ЛЕММА 2. 1°) Справедливы соотношения

- а) $g_{H_1}^t(q_0, p_0) = \{q_j = q_{j,0} \exp(-at), p_j = p_{j,0} \exp(at) : j = 1, \dots, k\}$;
- б) инвариантными подпространствами матрицы $I \text{ Hess } A_1$ являются оси $q_j \stackrel{\text{def}}{=} \{p = 0, q_i = 0 \text{ при } i \neq j\}$ и оси $p_j \stackrel{\text{def}}{=} \{q = 0, p_i = 0 \text{ при } i \neq j\}$, $j = 1, \dots, k$;
- в) матрица $I \text{ Hess } B_1$ нильпотентна и имеет два инвариантных подпространства $\{q, p : p = 0\}$, $\{q, p : q = 0\}$.

2°) Инвариантными подпространствами матрицы $I \text{ Hess } A_2$ являются двумерные подпространства $\{q, p : q_i = 0 \text{ при } i \neq 2j, 2j-1, p = 0\}$, $\{q, p : q = 0, p_i = 0 \text{ при } i \neq 2j, 2j-1\}$, $j = 1, \dots, k$. На инвариантных подпространствах первого типа матрица $I \text{ Hess } A_2$ имеет собственные значения $\lambda = -a \pm ib$, второго типа – собственные значения $\lambda = a \pm ib$. Уравнения движения в инвариантных подпространствах для гамильтониана A_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2j-1} &= -aq_{2j-1} + bq_{2j}, & \dot{p}_{2j-1} &= ap_{2j-1} + bp_{2j}, \\ \dot{q}_{2j} &= -aq_{2j} - bq_{2j-1}, & \dot{p}_{2j} &= ap_{2j} - bp_{2j-1}. \end{aligned}$$

Нильпотентная матрица $I \text{ Hess } B_2$ имеет два инвариантных подпространства $\{q, p : p = 0\}$, $\{q, p : q = 0\}$.

3°) Выполнено $I \text{ Hess } A_3 = 0$. Нильпотентная матрица $I \text{ Hess } B_2$ имеет два инвариантных подпространства $\{q, p : p = 0\}$, $\{q, p : q = 0\}$.

4°) Выполнено $I \text{ Hess } A_4 = 0$. Если $k = 2m + 1$, то подпространство с координатами $q_{2m+1}, \dots, q_{m+1}, p_m, \dots, p_1$ инвариантно относительно $I \text{ Hess } B_4$ и

$$\frac{\mathcal{D}((q_{2m+1}, \dots, q_{m+1}; p_m, \dots, p_1) \circ g_{B_4}^t(q_{2m+1}^0, \dots, q_{m+1}^0; p_m^0, \dots, p_1^0))}{\mathcal{D}(q_{2m+1}^0, \dots, q_{m+1}^0; p_m^0, \dots, p_1^0)} \equiv 1, \quad t \geq 0.$$

Если $k = 2m$, то подпространство с координатами $q_{2m}, \dots, q_{m-1}, p_m, \dots, p_1$ инвариантно относительно $I \text{ Hess } B_4$ и

$$\frac{\mathcal{D}((q_{2m}, \dots, q_{m+1}; p_m, \dots, p_1) \circ g_{B_4}^t(q_{2m}^0, \dots, q_{m+1}^0; p_m^0, \dots, p_1^0))}{\mathcal{D}(q_{2m}^0, \dots, q_{m+1}^0; p_m^0, \dots, p_1^0)} \equiv 1, \quad t \geq 0.$$

Подпространство с координатами $q_k, \dots, q_{k-j}, p_j, \dots, p_1$, $1 \leq j \leq [k/2] - 1$, и $q_k, \dots, q_{k-j+1}, p_j, \dots, p_1$, $2 \leq j \leq [k/2]$, инвариантно относительно $I \text{ Hess } B_4$.

Гамильтонова система с гамильтонианом B_4 имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= 0, & \dot{p}_1 &= \pm q_k, \\ \dot{q}_{k-1} &= -q_k \pm p_1, & \dot{p}_2 &= \pm q_{k-1} + p_1, \\ & \dots & & \dots \\ \dot{q}_1 &= -q_2 \pm p_{k-1}, & \dot{p}_k &= \pm q_1 + p_{k-1}. \end{aligned}$$

5°) При $k \neq 0$ матрица $I \text{ Hess } A_5$ имеет инвариантные двумерные подпространства $\{q, p : q_i = 0 \text{ при } i \neq 2l-1, p_j = 0 \text{ при } j \neq 2k-2l+3\}$, $l = 1, \dots, k+1$, и $\{q, p : q_i = 0 \text{ при } i \neq 2l, p_j = 0 \text{ при } j = 2k-2l+2\}$, $l = 1, \dots, k$. Ограничение $I \text{ Hess } A_5$ на эти инвариантные подпространства имеет собственные значения $\pm ib$. Уравнения движения для гамильтониана A_5 в этих инвариантных подпространствах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2l-1} &= \pm b^2 p_{2k-2l+3}, & \dot{q}_{2l} &= \pm b^2 p_{2k-2l+2}, \\ \dot{p}_{2k-2l+3} &= \pm q_{2l-1}, & \dot{p}_{2k-2l+2} &= \pm q_{2l}. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица $I \text{ Hess } B_5$ нильпотентна и имеет два инвариантных подпространства $\{q, p : q = 0\}$, $\{q, p : p = 0\}$.

6°) Матрица $I \text{ Hess } A_6$ имеет инвариантные двумерные подпространства $\{q, p : q_i = 0 \text{ при } i \neq 2j, 2j-1, p = 0\}, \{q, p : q = 0, p_i = 0 \text{ при } i \neq 2j, 2j-1\}$. Уравнения движения в этих инвариантных подпространствах имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_{2j} &= q_{2j-1}, & \dot{p}_{2j} &= b^2 p_{2j-1}, \\ \dot{q}_{2j-1} &= -b^2 q_{2j}, & \dot{p}_{2j-1} &= -p_{2j}. \end{aligned}$$

Матрица $I \text{ Hess } B_6$ нильпотентна и имеет два инвариантных подпространства $\{q, p : q_i = 0, p_i = 0 \text{ при } i = 2l, l = 1, \dots, k\}, \{q, p : q_j = 0, p_j = 0 \text{ при } j = 2l-1, l = 1, \dots, k\}$. В инвариантных подпространствах уравнения движения для гамильтониана B_6 имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 0, & \dot{q}_2 &= 0, & \dot{q}_{2m+1} &= -2b^2 \left(\pm \frac{1}{2}\right) p_{2k-2m+1}, & \dot{q}_{2j} &= -2 \left(\pm \frac{1}{2}\right) p_{2(k-j)+4}, \\ \dot{p}_{2k-2m+1} &= -\frac{2}{b^2} \left(\pm \frac{1}{2}\right) q_{2m-1}, & \dot{p}_{2(k-j)+2} &= -2 \left(\pm \frac{1}{2}\right) q_{2j}, \\ m &= 1, \dots, k, & j &= 1, \dots, k. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Матрицы $I \text{ Hess } B_\mu, 1 \leq \mu \leq 6$, нильпотентны. Матрицы $I \text{ Hess } A_\mu, \mu \neq 3, 4$, полупросты.

Отметим, что леммы 1, 2 получаются прямым дифференцированием формул (12)–(17). Лемма 3 непосредственно следует из леммы 2. Более того, в лемме 2 приведено детальное описание инвариантных подпространств матрицы $I \text{ Hess } A_\mu$.

2. Доказательство теоремы 2. 1°) Сначала определим предельный спектр стандартных форм $\hat{H}_\mu(\xi^+, \xi)$. Для того чтобы точка $\lambda \in \mathbb{R}^1$ была точкой предельного спектра самосопряженного оператора $\hat{H}_\mu$, необходимо и достаточно существование последовательности элементов $f_{n,\lambda} \in \mathcal{D}(\hat{H}_\mu)$ таких, что $\|f_{n,\lambda}\| = 1$, $f_{n,\lambda}$ слабо сходятся к 0 при $n \rightarrow \infty$ и $\|(\hat{H}_\mu - \lambda E)f_{n,\lambda}\| \rightarrow 0$ (критерий Вейля [9, гл. 9, § 132]). Формам 1)–4) после перехода по переменным $x_l, \dots, x_1, l \stackrel{\text{def}}{=} [k/2]$, в p -представление отвечают дифференциальные операторы первого порядка. Эти операторы после соответствующей замены переменных сводятся к оператору $i d/dt + \text{const}$. Ниже на примере формы 1) мы покажем, как строить последовательность Вейля для операторов первого порядка.

Формам 5), 6) отвечают дифференциальные операторы второго порядка. В этом более сложном случае функции $f_{n,\lambda}(x), x = x_1, \dots, x_m$, будем искать в виде

$$f_{n,\lambda}(x) = \varepsilon^{-m/2} \tilde{f}_{n,\lambda}(y), \quad y = \sqrt{\varepsilon}x, \quad \|\tilde{f}_{n,\lambda}(y)\|_{L_2(\mathbb{R}_y^m)} = 1$$

и $\tilde{f}_{n,\lambda}$ принадлежит пространству Шварца. Здесь ε – вспомогательный параметр, обеспечивающий применимость метода ВКБ. Очевидно, в силу нормировочного множителя $\varepsilon^{-m/2}$ имеем $\|f_{n,\lambda}\|_{L_2(\mathbb{R}_x^m)} = 1$. Далее, для функций $f_{n,\lambda}, \tilde{f}_{n,\lambda}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|(\hat{H}_\mu - \lambda)f_{n,\lambda}(x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x^m)} &= \|(\hat{H}_\mu - \lambda)\tilde{f}_{n,\lambda}(\sqrt{\varepsilon}x)\|_{L_2(\mathbb{R}_x^m)} \varepsilon^{-m/2} \\ &= \left\| \left(\varepsilon^{-1} \hat{H}_\mu \left(y, -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) - \lambda \right) \tilde{f}_{n,\lambda}(y) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_y^m)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции $\tilde{f}_{n,\lambda}(y)$ будем строить методом ВКБ – канонического оператора Маслова [12], [13] – так, чтобы нормы в соотношении (19) стремились к 0 при $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon = \varepsilon(n) \rightarrow 0$ на некоторой зависящей от n подпоследовательности. С этой целью выберем на поверхности $H_\mu(y, p) = \lambda\varepsilon$, $(y, p) \in \mathbb{R}^{2m}$ (для форм 1)–6) размерность m , очевидно, вычисляется через индекс k), точку (y_0, p_0) так, чтобы $|g_{H_\mu}^t(y_0, p_0)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Далее, выберем $(m-1)$ -мерное лагранжево многообразие $\Lambda_\varepsilon^{m-1}$ класса C^∞ , проходящее через точку (y^0, p^0) и удовлетворяющее условиям

$$\text{а) } H_\mu|_{\Lambda_\varepsilon^{m-1}} = \lambda\varepsilon;$$

$$\text{б) } \text{гамильтоново векторное поле } (I\nabla H_\mu)|_{\Lambda_\varepsilon^{m-1}} \text{ трансверсально } \Lambda_\varepsilon^{m-1}.$$

Пусть $U^\delta(y_0, p_0)$ – сферическая окрестность точки (y_0, p_0) радиуса δ . Очевидно, при достаточно малом δ семейство траекторий

$$\{g_{H_\mu}^t(y, p) : (y, p) \in (\Lambda_\varepsilon^{m-1} \cap U^\delta(y_0, p_0)), 0 \leq t < \infty\}$$

образует m -мерное бесконечно дифференцируемое лагранжево многообразие Λ_ε^m , удовлетворяющее условию $H_\mu|_{\Lambda_\varepsilon^m} = \lambda\varepsilon$. Пусть $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Lambda_\varepsilon^{m-1})$, функция $\chi_0(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ равна 1 при $t \geq 1$ и равна 0 при $t \leq 0$. Определим [12] на Λ_ε^m канонический оператор с малым параметром ε и положим

$$\tilde{f}_{n,\lambda}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K_{\Lambda^m}(\varphi_0 \chi_0(t-n) \exp(-t/n))}{\|K_{\Lambda^m}(\varphi_0 \chi_0(t-n) \exp(-t/n))\|}.$$

Поскольку мы применяем канонический оператор к нефинитным функциям, необходимо потребовать некоторые свойства регулярности поведения траекторий $g_{H_\mu}^t|_{\Lambda_\varepsilon^{m-1}}$ при $t \rightarrow \infty$. Эти свойства сформулируем применительно к гамильтонианам из списков 5), 6).

Итак, при достаточно малом δ можно считать, что $\Lambda_\varepsilon^{m-1} \cap U^\delta(y_0, p_0)$ есть карта с некоторым координатным диффеоморфизмом h на окрестность $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$ с координатами $z_1, \dots, z_{m-1}$. Обозначим через I набор из различных индексов $(i_1, \dots, i_j) \in \{1, \dots, m\}$ и положим $\bar{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, m\} \setminus I$.

УСЛОВИЕ Reg. *Существуют такие целые l, N_0, N_1 и константа C , что равномерно по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ на Λ_ε^m выполняются оценки*

$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2+k_3} g_{H_\mu}^t(y \circ h^{-1}, p \circ h^{-1})}{\partial t^{k_1} \partial z^{k_2} \partial \varepsilon^{k_3}} \right| \leq C_{k_1, k_2} (1+t)^{l+|k|N_0}, \quad |k| = k_1 + k_2 + k_3, \quad (20)$$

$$\sum_I \left| \frac{\mathcal{D}(y_I, p_{\bar{I}})}{\mathcal{D}(t, z)} \right| \geq C > 0 \quad \text{для } (t, z) \in \mathbb{R}_+^1 \times \Omega. \quad (21)$$

Здесь $(y_I, p_{\bar{I}})(t, z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_I, p_{\bar{I}}) \circ g_{H_\mu}^t(y \circ h^{-1}, p \circ h^{-1})$ и суммирование в (21) идет по всевозможным наборам I .

Из [12]–[14] следует, что при условии Reg можно так определить атлас на Λ_ε^m , что для соответствующего ему канонического оператора K_{Λ^m} справедливы оценки

$$\|\chi_0(t-n) \exp(-t/n)\|^2 = e^{-2n} + O(1),$$

$$\|K_{\Lambda^m}(\varphi_0 \exp(-t/n) \chi_0(t-n))\|^2 = \|\varphi_0\|_{\Lambda_2(\Lambda_\varepsilon^{m-1})}^2 \|\chi_0(t-n) \exp(-t/n)\|^2 + O(\varepsilon n^{l_1}),$$

$$\left\| \left(\varepsilon^{-1} H_\mu \left(y, -i\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \right) - \lambda \right) \tilde{f}_{n,\lambda} \right\|_{\Lambda_2(\mathbb{R}_y^m)}^2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + O(n^{l_2} \varepsilon) \quad (22)$$

с некоторыми показателями l_1, l_2 . Выберем $\varepsilon(n) = n^{-1-(l_1+l_2)}$. Тогда из (22) следует, что нормы в соотношении (19) стремятся к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Итак, если мы покажем, что $f_{n,\lambda}(x)$ слабо сходится к 0, то $f_{n,\lambda}(x)$ является последовательностью Вейля и $\lambda \in \sigma(\hat{H}_\mu)$ есть предельная точка спектра.

Поясним идею доказательства слабой сходимости к 0 на примере формы 6). В этом случае

$$|y \circ g_{H_6}^t(\Lambda_\varepsilon^{m-1})| \geq C(1+t) \quad (23)$$

и многообразие $\Lambda_\varepsilon^m(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{y, p : g_{H_6}^t(\Lambda_\varepsilon^{m-1}), t \geq T\}$ при некотором $T > 0$ диффеоморфно проектируется на свой образ в плоскости $\{y, 0 : p = 0\}$. Согласно (23) носитель функции $\tilde{f}_{n,\lambda}(y)$ уходит на ∞ при $n \rightarrow \infty$, т.е. для любого $\rho > 0$ существует такое $n_0(\rho)$, что при $n \geq n_0(\rho)$ $\{\text{supp } \tilde{f}_{n,\lambda}(y)\} \cap \{y : |y| \leq \rho\} = \emptyset$. Следовательно,

$$\{\text{supp } f_{n,\lambda}(\sqrt{\varepsilon(n)}x)\} \cap \{x : |x| \leq \rho\sqrt{\varepsilon(n)}\} = \emptyset \quad \text{при } n \geq n_0(\rho)$$

и для любой финитной функции $\varphi \in L_2$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f_{n,\lambda}(\sqrt{\varepsilon(n)}x) dx = 0 \quad \text{при } n \geq n_0(d),$$

где $d = \text{diam}(\text{supp } \varphi)$.

2°) Стандартные формы 1)–4) изучаются по единой схеме и мы ограничимся стандартной формой 1), которой отвечает оператор

$$\hat{H}_1 = \frac{ai}{2} \sum_{j=1}^k x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{k-1} x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{ika}{4}. \quad (24)$$

Оператору (24) соответствует система уравнений характеристик

$$\dot{x}_j = \frac{1}{2}(ax_j - x_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq k-1, \quad \dot{x}_k = \frac{1}{2}ax_k, \quad a > 0. \quad (25)$$

Поставим для системы (25) начальные данные на поверхности Λ^{k-1} :

$$x_k(0) = 1, \quad x'(0) = x'_0, \quad x' \stackrel{\text{def}}{=} x_1, \dots, x_{k-1}.$$

Пусть $x(t, x_0)$ – семейство решений системы (25), отвечающее этим начальным данным. Рассмотрим трубку траекторий $\Lambda^k \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = x(t, x'_0), |x'_0| < \delta, t \geq 0\}$. Очевидно, равномерно по $x'_0 \in U_0^\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{|x'_0| < \delta\}$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x'_0)| = \infty.$$

Из формулы Лиувилля следует, что

$$\frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}(t, x'_0)} = \exp(akt/2) \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(t, x_0)} \right) \Big|_{t=0} = \frac{a}{2} \exp(akt/2).$$

Пусть $\varphi_0(x'_0) \in C_0^\infty(U_0^\delta)$. Очевидно, функция $\Psi_n \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0 \chi_0(t-n) \exp(-t/n - akt/2 + i\lambda t)$ принадлежит пространству Шварца:

$$\|\Psi_n\|_{L_2(\mathbb{R}_x^k)}^2 = \int \chi_0^2(t-n) \exp(-2t/n - akt) |\psi_0| \left| \frac{\mathcal{D}x}{\mathcal{D}(t, x'_0)} \right| dt dx'_0 = \frac{a}{2} \|\psi_0\|^2 (e^{-2n} + O(1)).$$

Следовательно, для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$ имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\hat{H}_1 - \lambda)\Psi_n}{\|\Psi_n\|} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x^k)} &= \left\| i\psi_0 \exp(-kat/2 - i\lambda t) \frac{d}{dt} (\chi_0(t-n) \exp(-t/n)) \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x^k)} \|\Psi_n\|^{-1} \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Очевидно, носитель ψ_n уходит на ∞ при $n \rightarrow \infty$ (см. 1°). Значит, $\Psi_n/\|\Psi_n\|$ есть последовательность Вейля и предельный спектр оператора (24) равен $\mathbb{R}^1$.

3°) *Нормальная форма* 5). В случае $k = 0$ утверждение теоремы немедленно следует из уравнения гармонического осциллятора. Пусть $k > 0$. Следуя 1°) положим $m = 2k + 1$ и определим функцию $y_1 = Q_1(y', p)$, $y' = y_1, \dots, y_{2k+1}$, из уравнения $H_5(y, p) = \lambda\varepsilon$ в окрестности точки

$$\begin{aligned} (\bar{y}', \bar{p}) &= \{\bar{y}_2 = 0, \dots, \bar{y}_{2k} = 0, \bar{y}_{2k+1} \neq 0; \\ \bar{p}_1 &= 0, \dots, \bar{p}_{2k-2} = 0, \bar{p}_{2k-1} \neq 0, \bar{p}_{2k} \neq 0, \bar{p}_{2k+1} = 0\}. \end{aligned}$$

Из формулы (16) получим

$$\begin{aligned} Q_1(y', p) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^k (b^2 p_{2j} p_{2k-2j+2} + q_{2j} q_{2k-2j+2}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{k+1} b^2 p_{2j-1} p_{2k-2j+3} - \sum_{j=2}^k q_{2j-1} q_{2k-2j+3} \right) / q_{2k+1} \\ &\quad \mp p_{2k} \mp \left(\sum_{j=1}^{2k-1} p_j q_{j+1} \right) / q_{2k+1} \mp \frac{\lambda\varepsilon}{q_{2k+1}}. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g_{H_5}^t(Q_1, (\bar{y}', \bar{p}), \bar{y}', \bar{p})| = \infty. \quad (26)$$

Траектории $g_{B_5}^t$, очевидно, удовлетворяют условию

$$y_j \circ g_{B_5}^t(Q_1, \bar{y}', \bar{p}) = \bar{y}_{2k+1} \frac{t^{2k+1-j}}{(2k+1-j)! + O(t^{2k-j})}.$$

Далее, гамильтонова система, отвечающая $A_5(y, p)$, имеет интегралы

$$y_{2j-1}^2 + b^2 p_{2k-2j+3}^2 = \text{const}, \quad j = 1, \dots, k+1,$$

и

$$y_{2l}^2 + b^2 p_{2k-2l+2}^2 = \text{const}, \quad l = 1, \dots, k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{2k+1} (y_{\alpha}^2 + b^2 p_{\alpha}^2) \circ g_{H_5}^t(Q_1, \bar{y}', \bar{p}) &= \sum_{\alpha=1}^{2k+1} (y_{\alpha}^2 + b^2 p_{\alpha}^2) \circ g_{B_5}^t(Q_1, \bar{y}', \bar{p}) \\ &= \bar{y}_{2k+1}^2 \frac{t^{4k}}{((2k)!)^2} + O(t^{4k-1}) \end{aligned} \quad (27)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по ε , т.е. выполнено (26).

Теперь определим лагранжево многообразие $\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}$ так, чтобы $H|_{\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}} = \lambda\varepsilon$ и поле $I\nabla H_5|_{\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}}$ было трансверсально $\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}$. Для этого положим

$$\Lambda_{\varepsilon}^{m-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{y_1 = Q_1(\bar{y}', \bar{p}), |y' - \bar{y}'| \leq \delta, p = \bar{p}\} \quad (28)$$

и выберем числа $\bar{p}_{2k-1}, \bar{p}_{2k}, \bar{y}_{2k+1}$ так, чтобы

$$\begin{aligned} J_H &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathcal{D}(y \circ g_{H_5}^t(Q_1(y', p), y', p))}{\mathcal{D}(t, y')} \right) \Big|_{t=0, y'=\bar{y}', p=\bar{p}} \neq 0, \\ J_B &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathcal{D}(y \circ g_{B_5}^t(Q_1(y', p), y', p))}{\mathcal{D}(t, y')} \right) \Big|_{t=0, y'=\bar{y}', p=\bar{p}} \neq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для J_H, J_B получим выражения

$$J_H = \begin{cases} \mp \frac{\bar{p}_{2k-1}}{\bar{y}_{2k+1}} (b^2 \bar{p}_{2k} - \bar{y}_{2k+1}) & \text{при } k \geq 2, \\ -b^2 \bar{p}_1 + b^2 (\bar{p}_2 - \bar{y}_3) \left(\pm \frac{\bar{p}_1}{\bar{y}_3} \right) & \text{при } k = 1, \end{cases} \quad J_B = \pm \bar{p}_{2k-1}. \quad (30)$$

Используя формулы (30), выберем параметры $\bar{p}_{2k-1}, \bar{p}_{2k}, \bar{y}_{2k+1}$ так, чтобы $J_H \neq 0, J_B \neq 0$, и зафиксируем их. Очевидно, при достаточно малом δ , не зависящем от ε , выражение (28) определяет искомое многообразие $\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}$, $m = 2k+1$. Далее, из монотонного возрастания функции (27) при $t \rightarrow \infty, t \geq T$, следует, что $\Lambda_{\varepsilon}^m(T)$ есть m -мерное лагранжево многообразие (без самопересечений) в $\mathbb{R}_{y,p}^{2m}$.

Покажем, что $\Lambda_{\varepsilon}^m(T)$ удовлетворяет условиям Reg. Оценка (20) тривиально следует из формулы $g_{H_5}^t = g_{A_5}^t \circ g_{B_5}^t$, формул (18) для уравнений с гамильтонианом A_5 и нильпотентности матрицы $I \text{ Hess } B_5$.

Рассмотрим оценку (21) для якобианов. Из условия

$$J_H|_{\Lambda_{\varepsilon}^{m-1}} \neq 0 \quad (31)$$

(см. (29)) следует, что для достаточно малого t_0 “пленка”

$$\Lambda^m(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq \tau \leq t_0} g_{H_5}^{\tau}(\Lambda_{\varepsilon}^{m-1})$$

есть m -мерное лагранжево многообразие с мерой $d\tau dy'_0$. Заметим, что для достаточно малого значения t_0 оценка (21) следует из (31). Покажем, что из справедливости оценки (21) для $0 \leq \tau \leq t_0$ следует ее справедливость для всех t .

Обозначим через $\vec{J}(t, y_0)$ вектор, составленный из всевозможных якобианов вида

$$\frac{\mathcal{D}(y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_\nu}, p_{\beta_1}, \dots, p_{\beta_{m-\nu}})}{\mathcal{D}(t, y'_0)}$$

на $\Lambda_\varepsilon^m(0)$ (т.е. при T , входящем в определение $\Lambda_\varepsilon^m(T)$, равном 0). Поскольку вектор $(y, p)^T \circ g_{H_5}^t$ и векторы

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(y, p)^T \circ g_{H_5}^t(Q_1(\overline{y}_0', \overline{p}), y'_0, \overline{p}), \quad \eta = (t, y'_0)$$

удовлетворяют линейным системам с постоянными коэффициентами, то вектор $\vec{J}(t, y_0)$ также по t удовлетворяет линейной системе уравнений с постоянными коэффициентами: $\dot{\vec{J}} = L\vec{J}$. Очевидно, $\vec{J}(t + \tau, y'_0)$ по t является решением задачи Коши

$$\dot{\vec{J}} = L\vec{J}, \quad \vec{J}|_{t=0} = \vec{J}(\tau, y'_0). \quad (32)$$

Так как “пленка” $\Lambda^m(t_0)$ есть m -мерное лагранжево многообразие с мерой $d\tau dy'_0$, то

$$|\vec{J}(\tau, y'_0)| \big|_{\Lambda^m(t_0)} \geq C > 0. \quad (33)$$

Ниже будет доказано существование такой положительной константы γ , что для $0 \leq \tau \leq t_0$, $|y'_0| \leq \delta$, $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$|\vec{J}(t + \tau, y'_0)| \geq \gamma |\vec{J}(\tau, y'_0)|. \quad (34)$$

Тогда для всех $t \geq 0$, $|y'_0| \leq \delta$ выполняется неравенство

$$|\vec{J}(t, y'_0)| \geq \gamma C > 0. \quad (35)$$

Обозначим через $\tilde{J}$ вектор, составленный только из якобианов вида $\mathcal{D}(y_I, p_T)/\mathcal{D}(t, y'_0)$, $I \cap \bar{I} = \emptyset$, $I \cup \bar{I} = \{1, \dots, m\}$. Из лагранжевости $\Lambda^m(t_0)$ вытекает [16] существование универсальной, не зависящей от конкретного многообразия, положительной константы C_Λ такой, что $|\tilde{J}(t, y_0)| \geq C_\Lambda |\vec{J}|$. Отсюда в силу оценки (35) следует оценка (21) условия Reg.

Итак, многообразие $\Lambda_\varepsilon^m(T)$ удовлетворяет условию Reg. Применяя к $\Lambda_\varepsilon^m(T)$ конструкцию из 1°) (т.е. полагая в ней многообразие Λ_ε^m равным $\Lambda_\varepsilon^m(T)$), получим, что при $k \geq 1$ предельный спектр оператора $\hat{H}_5$ равен $\mathbb{R}^1$.

Докажем теперь неравенство (34). Поскольку матрица $I \text{ Hess } H_5$ имеет чисто мнимые собственные значения, то вектор $\vec{J}(t, y'_0)$, составленный из решения задачи Коши системы с матрицей $I \text{ Hess } H_5$, не содержит растущих или убывающих экспонент. Обозначим через $i\omega_j$ чисто мнимые собственные значения матрицы L (32). Пусть $\chi_{j\nu}$, $\nu = 0, \dots, \mu_j$, – собственные и присоединенные векторы, отвечающие $i\omega_j$, $\tilde{\chi}_{k,\beta}$ – базис, дуальный базису $\chi_{j,\nu}$. В силу сказанного выше справедливо равенство

$$\vec{J}(t + \tau, y'_0) = \sum_{j=1}^{\varkappa} \sum_{\nu=0}^{\mu_j} \chi_{j\nu} t^\nu \exp(i\omega_j t) C_{j\nu}(\tau, y'_0), \quad C_{j\nu}(\tau, y'_0) = (\vec{J}(\tau, y'_0), \tilde{\chi}_{j\nu}). \quad (36)$$

Предположим, что оценка (34) не выполняется. Тогда согласно (33) существуют последовательности $t_n \rightarrow \infty$ и $(\tau_n, y'_{0,n})$ такие, что $|\tilde{J}(t_n + \tau_n, y'_{0,n})| \rightarrow 0$. Значит,

$$t_n^\nu \exp(i\omega_j t_n) C_{j\nu}(\tau_n, y'_{0,n}) = (\tilde{J}(t_n + \tau_n, y'_{0,n}), \tilde{\chi}_{j\nu}) \rightarrow 0$$

и $C_{j\nu}(\tau_n, y'_{0,n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Выбирая сходящуюся подпоследовательность $\tau_{n_k} \rightarrow \tilde{\tau}$, $y'_{0,n_k} \rightarrow \tilde{y}'_0$, получим, что $C_{j\nu}(\tilde{\tau}, \tilde{y}'_0) = 0$. В силу формулы (36) отсюда следует, что $\tilde{J}(\tilde{\tau}, \tilde{y}'_0) = 0$. Это противоречит доказанному ранее неравенству $\tilde{J}(\tau, y'_0) \neq 0$ при $0 \leq \tau \leq t_0$, $|y'_0| < \delta$. Полученное противоречие доказывает оценку (34).

4°) Доказательство плотности области значений оператора $(\hat{H}_\mu - \lambda)$ (за исключением формы 5) при $k = 0$). Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шрёдингера с оператором $\hat{H}_\mu$ (12), отвечающим формам 1)–6):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{H}_\mu \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi, \quad x \in \mathbb{R}^m, \\ \Psi|_{t=0} &= \exp \left(i(x, \xi) - \frac{\beta}{2}(x, x) \right), \quad \beta \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (37)$$

Построим точное решение задачи (37) методом ВКБ [12], [13], [15]. Рассмотрим семейство траекторий линейной гамильтоновой системы:

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial H_\mu}{\partial p}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H_\mu}{\partial x}(x, p), \quad x(0) = x_0, \quad p(0) = \xi + i\beta x_0, \quad (38)$$

и обозначим через $x(t, x_0)$, $p(t, x_0)$ ее решения. Там, где зависимость решений от параметра ξ не существенна, мы не включаем ξ в число аргументов.

Очевидно, $x(t, x_0)$, $p(t, x_0)$ – линейные функции параметра x_0 и, следовательно, якобиан $J(t) = \mathcal{D}x(t, x_0)/\mathcal{D}x_0$ зависит только от времени t . Значит, при $J(t) \neq 0$ существует обратная функция $x_0 = x_0(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Очевидно, $J(0) = 1$. Поэтому на некотором промежутке $0 \leq t \leq T$ имеем $J(t) \neq 0$ и можно формально записать главный член ВКБ (с малым параметром ε при производной равной 1) для задачи (37):

$$\begin{aligned} \Psi(x, \xi, t) &= |J|^{-1/2} \rho \exp(iS(x, t)), \\ S(x, t) &= \left(x_0 \xi + \frac{i\beta}{2} x_0^2 + \int_0^t \left(p(x_0, \tau) \frac{\partial x}{\partial \tau}(x_0, \tau) - \frac{1}{2} H_\mu(x(x_0, \tau), p(x_0, \tau)) \right) d\tau \right) \Big|_{x_0=x_0(t, x)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для квадратичных операторов $\hat{H}_\mu$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + H_\mu \right) \frac{\rho}{\sqrt{|J|}} \exp(iS) &= |J|^{-1/2} \exp(iS) \left(\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} H_\mu \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) + i \frac{d}{dt} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_\mu}{\partial x_j \partial p_j} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) + C(H_\mu) \right) \rho + |J|^{1/2} \hat{H}_\mu^2 \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\rho}{\sqrt{|J|}} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_\mu}{\partial p} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x};$$

константа $C(H_\mu)$ равна $-ika/4$ для форм 1), 2) и равна 0 для форм 3)–6); $\hat{H}_\mu^2$ – дифференциальный оператор второго порядка, равный главной части дифференциального оператора $\hat{H}_\mu$.

Отметим, что для форм 1), 2) имеем

$$\frac{i}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_j} \left(x, \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{ika}{4} = 0;$$

для форм 3)–6) имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial p_j} \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Следовательно, если фаза $S(x, t)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби и $\rho(t) = \text{const}$, то все члены в правой части (40) равны 0. Поэтому при $\rho = 1$ формулы (39) определяют решение задачи Коши (37). Показав, что $\Psi(x, \xi, t) \in L_2(\mathbb{R}_x^m)$, мы тем самым докажем, что формулы (39) определяют решение из нужного класса функций.

Ниже мы докажем, что $J(t) \neq 0$, $t \in [0, +\infty)$, для формы 1) и наиболее трудного случая 5). Используя эти рассуждения, несложно получить это неравенство для всех форм 1)–6) и, следовательно, функция (39) является решением задачи Коши (37) при $t \in [0, +\infty)$.

Далее, используя соображения работы [10], проинтегрируем уравнение (37) с весом $\varphi_0(\xi) \exp(i\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, по dt , $d\xi$. Получим

$$\begin{aligned} & (\hat{H}_\mu - \lambda) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \Psi(x, \xi, t) \varphi_0(\xi) \exp(i\lambda t) d\xi dt \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(\xi) \exp\left(i(x, \xi) - \frac{\beta}{2}(x, x)\right) d\xi + i \exp(i\lambda T) \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(\xi) \Psi(x, \xi, T) d\xi. \end{aligned}$$

Очевидно, функции вида

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(\xi) \exp\left(i(x, \xi) - \frac{\beta}{2}(x, x)\right) d\xi, \quad \varphi_0 \in C_0^\infty, \quad \beta \geq 0,$$

образуют плотное множество в $L_2(\mathbb{R}_x^m)$. Докажем, что на некоторой подпоследовательности $T_n \rightarrow +\infty$ в случае форм 1)–4), 6) и формы 5) при $k \neq 0$ функции

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_0(\xi) \Psi(x, \xi, T_n) d\xi, \quad \varphi_0 \in C_0^\infty, \quad (41)$$

слабо сходятся к 0 на $L_2(\mathbb{R}_x^m)$. Отсюда следует, что область значения оператора $(\hat{H}_\mu - \lambda)$ на функциях вида

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^m} \Psi(x, \xi, t) \varphi_0(\xi) \exp(i\lambda t) dt d\xi, \quad \varphi_0 \in C_0^\infty,$$

плотна в $L_2(\mathbb{R}_x^m)$. Иными словами, если $\lambda \in \sigma(\hat{H}_\mu)$, то в силу определения (см. [10]) λ есть точка непрерывного спектра.

Схема доказательства одинакова для форм 1)–3) и форм 5), 6). Поэтому мы приведем доказательство для формы 1) и формы 5), как наиболее сложной.

5°) Форма 1). Рассмотрим уравнение (37) с оператором (24). Как известно [11], норма решения задачи Коши (37) не зависит от времени:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi) \Psi(x, \xi, T_n) d\xi \right\|_{L_2(\mathbb{R}_x^m)} = \left\| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(\xi) \exp\left(i(x\xi) - \frac{\beta}{2}(x, x)\right) d\xi \right\| \leq \|\varphi\|_{L_2}.$$

Поэтому для обоснования слабой сходимости к 0 последовательности (41) достаточно доказать слабую сходимость на некотором плотном в $L_2(\mathbb{R}_x^m)$ множестве.

Положим в начальных данных (37) параметр β равным 0. Поскольку для формы 1)

$$p \frac{\partial H}{\partial p} - H = 0,$$

то $S(x, t) = (x_0, \xi)|_{x_0=x_0(x, t)}$. Из формулы Лиувилля следует, что $J = \mathcal{D}x/\mathcal{D}x_0 = \exp(kat/2)\mu$, значит, формулы (39) дают решение задачи Коши (37) при $\rho = 1$. Следуя схеме из 4°), рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_x^m} \int_{\mathbb{R}_\xi^m} \varphi_0(\xi) \exp(iS(x, t)) g(x) |J|^{-1/2} dx d\xi, \quad g \in C_0^\infty. \quad (42)$$

Поскольку $|J|^{-1/2} = \exp(-kat/4)$, $a > 0$, то интеграл (42) стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, в силу 4°) оператор $\hat{H}_1$ имеет только непрерывный спектр.

6°) Форма 5). Положим в начальных данных (37) параметр β равным 1 и докажем, что для гамильтоновой системы (38) при $\mu = 5$ якобиан $J_5 = \mathcal{D}x/\mathcal{D}x_0 \neq 0$ для всех $t \geq 0$. Воспользуемся разложением $H_5 = A_5 + B_5$ и положим $z(t, x_0) = x \circ g_{A_5}^t(x_0, p(x_0))$, $p(x_0) = \xi + ix_0$. Из коммутативности $g_{A_5}^t, g_{B_5}^t$ следует, что

$$J_5(t, x_0) = \frac{\mathcal{D}(x \circ g_{B_5}^t(p(z), z))}{\mathcal{D}z} \frac{\mathcal{D}z(t, x_0)}{\mathcal{D}x_0}. \quad (43)$$

Гамильтонова система, отвечающая B_5 , распадается на две автономные системы для p и x компонент. Значит, согласно формуле Лиувилля

$$\frac{\mathcal{D}(x \circ g_{B_5}^t(p(z), z))}{\mathcal{D}z} = 1, \quad t \geq 0.$$

Докажем, что $\mathcal{D}z(t, x_0)/\mathcal{D}x_0 \neq 0$, $t \geq 0$. Отсюда из (43) будет следовать, что $J_5(t, x_0) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Из гамильтоновой системы (18) следуют формулы

$$\begin{aligned} z_{2l-1}(t, x_0) &= x_{2l-1,0} \cos(bt) \mp (\xi_{2k-2l+3} + ix_{2k-2l+3,0})b \sin(bt), \\ z_{2k-2l+3}(t, x_0) &= x_{2k-2l+3,0} \cos(bt) \mp (\xi_{2l-1} + ix_{2l-1,0})b \sin(bt), \end{aligned} \quad l = 1, \dots, k+1. \quad (44)$$

Аналогичные формулы получим для $z_{2l}, z_{2k-2l+2}$, $l = 1, \dots, k$. Знак ‘ $\mp$ ’ в (44) отвечает знаку ‘ $\mp$ ’ в форме 5). Отметим, что при четном k для $l = k/2 + 1$ имеем $2l-1 = 2k-2l+3 =$

$k/2 + 1$, при нечетном k для $l = (k + 1)/2$ имеем $2l = 2k - 2l + 2 = k + 1$. Так, в случае четного k

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}z(t, x_0)}{\mathcal{D}x_0} &= \prod_{l=1, l \neq k/2+1}^{k+1} \frac{\mathcal{D}(z_{2l-1}, z_{2k-2l+3})}{\mathcal{D}(x_{2l-1,0}, x_{2k-2l+3,0})} \prod_{l=1}^k \frac{\mathcal{D}(z_{2l}, z_{2k-2l+2})}{\mathcal{D}(x_{2l,0}, x_{2k-2l+2,0})} \frac{\mathcal{D}z_{k/2+1}}{\mathcal{D}x_{k/2+1,0}} \\ &= (\cos^2(bt) + b^2 \sin^2(bt))^{2k} (\cos(bt) - ib \sin(bt)) \neq 0. \end{aligned}$$

Для нечетного k в формуле (44) перед $ib \sin(bt)$ стоит знак '+'.
 Таким образом, из неравенства $\mathcal{D}z/\mathcal{D}x_0 \neq 0$ следует, что $J_5 \neq 0$. Значит, формулы (39) дают решение задачи Коши (37) для $\mu = 5, \rho = 1$.

Покажем, что при $\beta = 1$ функция $\Psi(x, \xi, t) \in L_2(\mathbb{R}_x^n)$. Поскольку в силу линейности системы (38) и линейности начальных данных (38) по x_0 функция $x(t, x_0)$ и обратная функция $x_0 = x_0(t, x)$ линейны, то фаза $S(x, t)$ (формула (39)) квадратична по x . Отметим, что при $\beta \neq 0$ функция $x_0(t, x)$ комплекснозначна. Обозначим через $\bar{x}(t)$, $\bar{p}(t)$ вещественную траекторию системы (38), т.е. траекторию с начальными данными $\bar{x}(0) = 0, \bar{p}(0) = \xi$, и докажем, что

$$\operatorname{Im} S(x, t) = \frac{1}{2} (M(t)(x - \bar{x}(t), x - \bar{x}(t))), \quad M(t) > 0. \quad (45)$$

Выше было доказано, что $S(x, t)$ – квадратичная функция x при $t \in \mathbb{R}^1$. Значит,

$$\operatorname{Im} S(x, t) = \frac{1}{2} (M(t)(x - \bar{x}(t), x - \bar{x}(t))) + D(t)x + d(t), \quad (46)$$

где $M(t)$ – вещественная симметричная матрица. Из равенства

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = p(x_0, t)|_{x_0=x_0(t, x)}$$

следует, что

$$\operatorname{Im} \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}(t)} = \operatorname{Im} \bar{p}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно, из (46) получим, что $D(t) = 0$ при $t \geq 0$. Далее, из формулы (39) следует, что $\operatorname{Im} S(x, t)|_{x=\bar{x}(t)} \equiv 0, t \geq 0$. Поэтому, полагая в (46) $x = \bar{x}(t)$, получим, что $d(t) \equiv 0, t \geq 0$, и справедлива формула (45). Теперь покажем, что $M(t) > 0$.

В [13], [14] было доказано, что в окрестности вещественной траектории $\operatorname{Im} S(x, t) \geq 0$ при $t \geq 0$ и $|x - \bar{x}(t)| \leq \delta$, откуда $M(t) \geq 0$. Поскольку $\operatorname{Im} S(x, 0) = \frac{1}{2}(x, x)$, то $M(0) = E$. Из непрерывности $M(t)$ следует, что в малой окрестности точки $t = 0$ выполнено $M(t) > 0, t \in [0, \delta]$.

Таким образом, при $t \in [0, \delta]$ функция $\Psi(x, \xi, t)$ (формула (39)) принадлежит $L_2(\mathbb{R}_x^m)$ и в силу (37) норма этой функции на $[0, \delta]$ в $L_2(\mathbb{R}_x^m)$ постоянна. Значит,

$$\sqrt{\det \|M(t)\| \cdot |J_5(t)|} = (2\pi)^{(2k+1)/2}, \quad t \in [0, \delta].$$

Так как $x(x_0, t), p(x_0, t)$ – аналитические функции t , то $M(t)$ – аналитическая функция t . Кроме того, $M(t) > 0$ для $t \in [0, \delta]$. Следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}^1$ справедливо

$$\det \|M(t)\| = (2\pi)^{(2k+1)/2} |J(t)|^{-2} \neq 0. \quad (47)$$

Собственные числа симметричной вещественной матрицы $M(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, непрерывно зависят от t . Поэтому сигнатура матрицы $M(t)$ может измениться лишь в случае, когда в некоторой точке ее определитель обращается в 0. Из (47) следует, что сигнатуры матриц $M(0) = E$ и $M(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, одинаковы. Значит, $M(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}^1$, и формула (45) доказана. Из формулы (45) следует, что $\Psi(x, \xi, t) \in L_2(\mathbb{R}_x^m)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Для доказательства слабой сходимости функций (41) к 0 положим $T_n = \pi n/b$ и вычислим $S(x, T_n)$. Рассмотрим

$$\Lambda_t^{2k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{x, p : x = x_0, p = \xi + ix_0, x_0 \in \mathbb{C}^{2k+1}\}, \quad \Lambda_t^{2k+1} \stackrel{\text{def}}{=} g_{H_5}^t(\Lambda_0^{2k+1}).$$

Из [6] следует, что фазу $S(x, t)$ можно представить в виде суммы трех интегралов:

- а) интеграла $\int p dx$ на Λ_0^{2k+1} вдоль пути, соединяющего точки $x_0 = x_0(x, t)$, $p = \xi + ix_0(x, t)$ и вещественную точку $(0, \xi)$;
- б) интеграла

$$\overline{S}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \left(p \frac{\partial H_5}{\partial p} - H_5 \right) (\overline{x}(\tau), \overline{p}(\tau)) d\tau$$

вдоль вещественной траектории;

- в) интеграла $\int p dx$ на многообразии Λ_t^{2k+1} вдоль пути, соединяющего вещественную точку $\overline{x}(t)$, $\overline{p}(t)$ и точку $(x, p(x)) \in \Lambda_t^{2k+1}$, которая проектируется в вещественную точку x (т.е. $p(x) = \partial S(x, t)/\partial x$).

Из системы (18) следует равенство $g_{A_5}^{(T_n^2)} = E$. Значит,

$$g_{H_5}^{(T_n^2)} = g_{A_5}^{(T_n^2)} \circ g_{B_5}^{(T_n^2)} = g_{B_5}^{(T_n^2)}, \quad \Lambda_{T_n}^{2k+1} = g_{B_5}^{(T_n^2)}(\Lambda_0^{2k+1}). \quad (48)$$

Используя представление фазы $S(x, t)$ в виде суммы трех интегралов и соотношения (48), находим, что решение уравнения Гамильтона–Якоби с гамильтонианами $(A_5 + B_5)/2$, $B_5/2$ и одинаковыми начальными данными $S(x, t) = (x, \xi) + \frac{i}{2}(x, x)$ в точках T_n отличаются на вещественную константу $\overline{S}(T_n)$. Значит,

$$S(x, T_n) = \left((x_0, \xi) + \frac{i}{2}(x_0, x_0) \right) \Big|_{x_0 = g_{B_5}^{-(T_n^2)}(0, x)} + \overline{S}(T_n).$$

Здесь мы воспользовались тем, что система Гамильтона для B_5 распадается на две независимые системы для x и p компонент и, следовательно, $x \circ g_{B_5}^t(x_0, p_0) = x \circ g_{B_5}^t(x_0, 0)$. Кроме того, мы использовали тождество $p \partial B_5 / \partial p - B_5 \equiv 0$.

С помощью формулы (48) докажем, что на множестве $\{|x| < R, x_{2k+1} \neq 0\}$ для всех фиксированных $R \in (0, +\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(iS(x, T_n)) = 0. \quad (49)$$

Гамильтониану B_5 отвечает система

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2k+1} &= 0, & \dot{x}_j &= -x_{j+1}, & j &= 1, \dots, 2k, \\ p_1 &= 0, & \dot{p}_j &= p_{j-1}, & j &= 2, \dots, 2k+1. \end{aligned}$$

Значит,

$$x_{2k,0} \circ g_{B_5}^{-t}(0, x) = x_{2k+1}t + x_{2k}, \quad x_{2k+1,0} \circ g_{B_5}^{-t}(0, x) = x_{2k+1}$$

и

$$\operatorname{Re} iS(x, T_n) \leq -\frac{1}{2}|x_{2k} + x_{2k+1}t|^2. \quad (50)$$

Из оценки (50) вытекает, что при $|x_{2k}| \leq R$ и $x_{2k+1} \neq 0$ справедливо равенство (49).

Теперь докажем, что функции (41) слабо сходятся к 0 при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}_x^{2k+1}} \int_{\mathbb{R}_\xi^{2k+1}} \varphi_0(\xi) g(x) \exp(iS(x, T_n)) |J(t_n)|^{-1/2} dx d\xi, \quad \varphi_0(\xi), g(x) \in C_0^\infty.$$

Поскольку $x \circ g_{H_5}^{2T_n}(x_0, p_0) = x \circ g_{B_5}^{2T_n}(x_0, p_0) = x \circ g_{B_5}^{2T_n}(x_0, 0)$, то $|J(2T_n)| = 1$. Из доказанного выше следует, что почти всюду на $\operatorname{supp} g(x)$ $\exp(iS(x, T_n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для всех $\varphi_0, g \in C_0^\infty$ интеграл (50) стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Это означает слабую сходимости к 0 последовательности (41) на плотном множестве, что и требовалось доказать.

Таким образом, в силу 4°) оператор $\hat{H}_5$ имеет только непрерывный спектр. Из 3°) следует, что непрерывный спектр оператора $\hat{H}_5$ равен $\mathbb{R}^1$.

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство получается из теоремы 2 и формул работы [5] методом разделения переменных.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

Московский государственный строительный университет

03.11.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [2] Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н. (мл.) Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
- [3] Ring P., Schuck P. The nuclear many-body problem. Berlin: Springer Verlag, 1980.
- [4] Кучеренко В. В., Маслов В. П. Приведение квадратичного бозевского оператора к нормальной форме // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 2. С. 162–165.
- [5] Кучеренко В. В., Маслов В. П. Нормальные формы квадратичных бозевских операторов // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 1. С. 69–90.
- [6] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [7] Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
- [8] Kucherenko V. V. The spectral asymptotics of the N -particle Schrödinger equation when $N \rightarrow \infty$ and the normal forms of quadratic boson operator. Reporte interno № 210. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1997.
- [9] Riez F., Nagy B. Sz. Functional Analysis. New York: Dover Publ., 1990.
- [10] Кучеренко В. В. Параметрикс для уравнений с вырождающимся символом // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 4. С. 797–800.
- [11] Yosida K. Functional Analysis. Berlin: Springer Verlag, 1965.
- [12] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
- [13] Кучеренко В. В. Асимптотические решения уравнений с комплексными характеристиками // Матем. сб. 1974. Т. 95. № 2. С. 163–213.
- [14] Кучеренко В. В. Асимптотика решения задачи Коши для уравнений с комплексными характеристиками // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1977. С. 41–137.
- [15] Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [16] Кучеренко В. В., Мотылёв Ю. Л. О границах применимости метода канонического оператора Маслова для уравнений с негладкими характеристическими корнями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 4. С. 741–762.