Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Мерзляков, Обобщение теорем Лагерра о нулях целых функций, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 855–863

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1569>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 03:54:34

УДК 517.547.2

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ЛАГЕРРА О НУЛЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

С. Г. Мерзляков

В статье доказаны результаты, обобщающие классические теоремы Лагерра о кратности и количестве нулей функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

а также приведены конкретные приложения.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Хорошо известны следующие две теоремы Лагерра [1, с. 268–269].

ТЕОРЕМА А. Пусть все нули многочлена

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$$

вещественны и $\varphi(w)$ – целая функция вида

$$\varphi(w) = e^{aw} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{w_n}\right) e^{-w/w_n}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad w_n > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n^2} < \infty. \quad (1)$$

Тогда все нули многочлена

$$g(z) = a_0 \varphi(0) + a_1 \varphi(1)z + \dots + a_p \varphi(p)z^p$$

вещественны и среди них столько же положительных, равных 0 и отрицательных, сколько среди нулей многочлена $f(z)$.

ТЕОРЕМА Б. Предположим, что $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям теоремы А. Пусть $f(z)$ – целая функция вида

$$f(z) = ce^{\beta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_n}\right),$$

где β и все z_n положительны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} < \infty.$$

Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

то

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(n) z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественны и отрицательны.

В данной статье подобные результаты получены для более общего случая, а также решен вопрос о кратности нулей функции $g(z)$.

2. Предварительные результаты. Обозначим через $\mathcal{LP}$ (класс Лагерра–Поля) множество целых функций f вида

$$f(z) = cz^k e^{\beta z - \gamma z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}, \quad (2)$$

$$k \in \mathbb{N}_0, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \gamma \geq 0, \quad z_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n^2} < \infty.$$

Как известно, функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{LP}$ тогда и только тогда, когда она равномерно на компактах аппроксимируется полиномами, все нули которых вещественные (см. [2, с. 427]). Это утверждение было сформулировано Лагерром и доказано Поля.

Рассмотрим функцию φ вида (1). Из очевидного неравенства

$$(1+x)e^{-x} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

вытекает соотношение $0 < \varphi(n) \leq e^{an}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому оператор

$$A: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C}), \quad (Af)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

будет линейным, инъективным и непрерывным в топологии равномерной сходимости на компактах.

По теореме Лагерра оператор A переводит полиномы класса $\mathcal{LP}$ в полиномы этого же класса, и поэтому в силу непрерывности $\forall f \in \mathcal{LP} \quad Af \in \mathcal{LP}$.

В данной статье будет описана зависимость поведения корней функции Af от корней функций f и φ . Для этого нам понадобится следующее свойство оператора A для простейшего случая.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{LP}$, $\alpha > 0$,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Тогда

- 1) если в точке $x_0 \neq 0$ у функции $g(z)$ корень кратности $m > 1$, то у функции $f(z)$ в этой же точке корень кратности $m + 1$;
- 2) если функция $f(z)$ имеет p положительных корней, $0 \leq p \leq \infty$, и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0, \quad (4)$$

то у функции $g(z)$ число положительных корней равно $p + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, число c в представлении (2) можно считать равным единице, и, следовательно, функция $f(z)$ будет вещественной на вещественной оси.

Как легко видеть, $g(z) = \alpha f(z) + z f'(z)$, так что для точек $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, имеем

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^{1-\alpha} [|x|^\alpha f(x)]'.$$

Функция под знаком производной непрерывна на вещественной оси, вещественно-аналитична на ней вне начала координат и обращается в 0 в нуле. Отсюда заключаем, что, во-первых, в произвольном корне кратности m функции $f(x)$, отличном от начала координат, у функции $g(x)$ будет корень кратности $m - 1$. Здесь корень нулевой кратности функции $g(x)$ означает отсутствие корня.

Во-вторых, по теореме Ролля между любыми двумя соседними различными нулями функции $xf(x)$ будет лежать, по крайней мере, один нуль функции $g(x)$. Таким образом, если у функции $f(x)$ бесконечное число положительных корней, то и у функции $g(x)$ их будет бесконечное число.

Если же число p конечно и выполнено условие (4), то, очевидно, у функции $|x|^\alpha f(x)$ за последним неотрицательным корнем существует локальный максимум или минимум, следовательно, за этим корнем найдется, по крайней мере, один корень функции $g(x)$.

Как нетрудно убедиться, для завершения доказательства надо показать, что на любом интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, на котором функция $xf(x)$ не обращается в 0, функция $g(x)$ имеет не более одного корня с учетом кратности.

Предположим сначала, что функция $f(z)$ является полиномом. В таком случае функция $g(z)$ будет полиномом той же степени, кратности нуля в начале координат этих полиномов, очевидно, совпадают. Из сказанного выше заключаем, что между любыми двумя соседними различными нулями функции $xf(x)$ имеется ровно один нуль функции $g(x)$, и все нули этой функции лежат между минимальным и максимальным нулем функции $xf(x)$.

Для трансцендентной функции $f(z)$ найдется последовательность вещественных полиномов $p_n \in \mathcal{LP}$, сходящаяся к этой функции равномерно на компактах. Тогда последовательность полиномов $q_n(z) = \alpha p_n(z) + zp'_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, будет сходиться равномерно на компактах к функции $g(z)$.

Допустим, что на некотором интервале (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, функция $xf(x)$ не обращается в 0, а функция $g(x)$ имеет на нем более одного корня с учетом кратности.

В таком случае по теореме Гурвица найдутся числа a_1, b_1 , $a < a_1 < b_1 < b$, такие, что на интервале (a_1, b_1) , начиная с некоторого n , полиномы $p_n(z)$ не обращаются в 0, а полиномы $q_n(z)$ имеют на нем, по крайней мере, два корня с учетом кратности, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает лемму.

3. О кратности нулей. Для исследования вопроса о кратности нулей функции Af понадобится следующий результат.

ЛЕММА 2. Пусть функция φ имеет бесконечное число нулей и

$$\varphi(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{w_n}\right), \quad w_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n} < \infty,$$

а функция $f \in \mathcal{L}\mathcal{P}$ отлична от тождественного нуля.

Тогда у функции Af все нули, отличные от начала координат, простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение леммы неверно, и в точке $x_0 \neq 0$ функция Af имеет корень кратности $m, m > 1$.

Положим

$$(A_j f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_j(n) z^n, \quad \varphi_j(w) = \prod_{n=j}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{w_n}\right), \quad j \in \mathbb{N},$$

где

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

и докажем, что последовательность функций $\{A_j f : j \in \mathbb{N}\}$ равномерно на компактах сходится к функции $f(z)$.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0, R > 0$, очевидно, найдется число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} e^{dn} |a_n| R^n \leq \varepsilon, \quad \text{где } d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n}.$$

Из неравенства (3) найдем

$$1 \leq \varphi_j(x) \leq \exp\left(x \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{w_n}\right), \quad x \geq 0,$$

поэтому для некоторого числа $j_0 \in \mathbb{N}$

$$\varphi_j(x) \leq 1 + \delta, \quad 0 \leq x < n_0, \quad j \geq j_0, \quad \text{где } \delta = \varepsilon \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| R^n \right)^{-1}.$$

Таким образом,

$$|(A_j f)(z) - f(z)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} (\varphi_j(n) - 1) |a_n z^n| + \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_j(n) |a_n z^n| \leq 2\varepsilon$$

для $|z| \leq R$, что доказывает равномерную сходимость.

Из соотношения

$$(Af)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{w_1}\right) \varphi_2(n) a_n z^n$$

и леммы 1 вытекает, что у функции $A_1 f$ в точке x_0 будет корень кратности $m+1$. Аналогично, функция $A_j f$ будет иметь в точке x_0 корень кратности $m+j$, что противоречит равномерной сходимости последовательности функций $\{A_j f : j \in \mathbb{N}\}$ к отличной от тождественного нуля функции $f(z)$. Лемма доказана.

Покажем теперь, как связаны кратности нулей функции Af с нулями функций φ и f .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция f лежит в классе $\mathcal{LP}$ и отлична от тождественного нуля, а функция φ имеет вид (1). Функция Af имеет в точке $x_0 \neq 0$ корень кратности $m > 1$ тогда и только тогда, когда функция φ имеет вид

$$\varphi(w) = e^{bw} \prod_{n=1}^r \left(1 + \frac{w}{w_n}\right), \quad r < \infty, \quad (5)$$

а у функции $f(z)$ в точке $x_0 \exp b$ корень кратности $m + r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что у функции φ бесконечное число нулей. В таком случае φ можно представить в виде произведения двух целых функций φ_1 и φ_2 , где φ_1 имеет вид (1), а φ_2 удовлетворяет условиям леммы 2.

Положим

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Ясно, что функция $f_1(z)$ отлична от тождественного нуля и лежит в классе $\mathcal{LP}$.

Из представления

$$(Af)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_2(n) \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

и леммы 2 заключаем, что у функции $(Af)(z)$ все нули, отличные от начала координат, простые.

Пусть теперь функция φ имеет вид (5).

В этом случае оператор A представляется в виде конечной композиции операторов, рассмотренных в лемме 1, и оператора

$$B: H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C}), \quad (Bg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{bn} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(e^b z).$$

Доказательство теоремы завершается применением леммы 1.

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 1.

Функция $f(z) = \exp z$, очевидно, принадлежит классу $\mathcal{LP}$ и не обращается в 0, поэтому если φ имеет вид (1), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n!} z^n$$

есть целая функция, все нули которой вещественные и простые.

ПРИМЕР 1. Из теории Γ -функции следует, что функция

$$\varphi(w) = \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(lw+1)}, \quad l \in \mathbb{N},$$

имеет вид (1), следовательно, у функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(ln)!}$$

все нули вещественные и простые.

Отметим, что вопрос о простоте нулей данной функции обсуждался в статье [3].

4. О количестве нулей. В этом пункте мы найдем зависимость числа положительных нулей функции Af от числа положительных нулей функции f и числа нулей функции φ . Нам понадобятся следующие хорошо известные факты о переменах знака в последовательности коэффициентов ряда Тейлора целых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем *числом перемен знака целой функции* $f(z)$ с вещественными коэффициентами число перемен знака в последовательности ее коэффициентов ряда Тейлора. Нулевые коэффициенты при этом не учитываются.

ТЕОРЕМА В. Если у полинома с вещественными коэффициентами имеются лишь вещественные нули, то его число перемен знака совпадает с числом положительных корней.

ТЕОРЕМА Г. Для целой функции с вещественными коэффициентами число положительных корней не превосходит числа ее перемен знака.

Доказательство этих результатов можно найти в [4].

Обозначим через $\mathcal{L}$ (класс Лагерра) множество целых функций $f(z)$, которые допускают представление вида

$$f(z) = q(z)e^{\beta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_n}\right),$$

где $\beta \geq 0$, $q(z)$ – полином, все корни которого вещественные и неотрицательные, $z_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n} < \infty.$$

Из теоремы Лагерра [2, с. 427] вытекает, что класс $\mathcal{L}$ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, представимых равномерно на компактах в виде

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(z)p_n(z), \quad (6)$$

где $q(z)$ – зависящий от функции $f(z)$ полином, все корни которого вещественные и неотрицательные, а $p_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, – полиномы, все корни которых вещественные и отрицательные.

ЛЕММА 3. Пусть функция f из класса $\mathcal{LP}$ вещественна на вещественной оси и отлична от тождественного нуля. Эквивалентны следующие условия:

- 1) $f \in \mathcal{L}$;
- 2) функция f имеет конечное число перемен знака, совпадающее с числом ее положительных корней;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Представим функцию $f(z)$ в виде предела (6), где полиномы $q(z)$ и $p_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, вещественны на вещественной оси и имеют соответственно лишь неотрицательные и отрицательные корни.

По теореме В число перемен знака полинома $q(z)p_n(z)$ совпадает с числом положительных корней полинома $q(z)$, поэтому, как легко видеть, число перемен знака предельной функции $f(z)$ не превосходит числа этих корней. Но число положительных нулей полинома $q(z)$ совпадает с числом положительных нулей функции $f(z)$, и искомая импликация следует из теоремы Г.

2) $\Rightarrow$ 3). Если функция $f(z)$ имеет конечное число перемен знака, то ее коэффициенты ряда Тейлора, начиная с некоторого номера, будут одного знака. В таком случае, очевидно, выполнено 3).

3) $\Rightarrow$ 1). Из соотношения 3) заключаем, что у функции $f(z)$ конечное число положительных корней, поэтому

$$f(z) = q(z)e^{\beta z - \gamma z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_n}\right) e^{-z/z_n},$$

где $q(z)$ – полином, все корни которого вещественные и неотрицательные, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$, $z_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z_n^2} < \infty.$$

Для произвольного числа $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$f(z) = q_j(z)e^{\beta_j z - \gamma z^2} \prod_{n=j+1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_n}\right) e^{-z/z_n},$$

где $q_j(z)$ – полином,

$$\beta_j = \beta - \sum_{n=1}^j \frac{1}{z_n},$$

поэтому из неравенства (3) вытекает, что

$$|f(x)| \leq |q_j(x)| e^{\beta_j x - \gamma x^2}, \quad x \geq 0.$$

Ясно, что соотношение 3) выполняется лишь при $\gamma = 0$ и $\beta_j \geq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Таким образом, функция f лежит в классе $\mathcal{L}$ и лемма полностью доказана.

Сформулируем основной результат данного пункта.

ТЕОРЕМА 2. Пусть у функции φ вида (1) r корней, а у функции f из класса $\mathcal{LP}$ p положительных корней, $0 \leq r, p \leq +\infty$.

Тогда

- 1) если функция $f \in \mathcal{L}$, то функция $Af \in \mathcal{L}$ имеет p положительных корней;
- 2) если функция $f \notin \mathcal{L}$, то функция $Af \notin \mathcal{L}$ имеет $p + r$ положительных корней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать функцию f вещественнозначной на вещественной оси.

Так как $\varphi(n) > 0$, $n = 0, 1, \dots$, то числа перемен знака функций f и Af одинаковы, поэтому по лемме 3 обе функции одновременно либо принадлежат классу $\mathcal{L}$, либо не принадлежат. Если принадлежат, то по той же лемме число их положительных корней совпадает, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь функция f не принадлежит классу $\mathcal{L}$.

Сначала предположим, что число r конечно. Как легко видеть, функции $z^j f(z)$, $j = 1, 2, \dots$, не лежат в классе $\mathcal{L}$ и по лемме 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x^j f(x)| = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

В таком случае из леммы 1 вытекает, что для любого числа $\alpha > 0$ функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

имеет $p + 1$ положительный корень и по доказанному выше не принадлежит классу $\mathcal{L}$.

Применяя эти рассуждения несколько раз, получим утверждение теоремы для $r < \infty$.

Осталось рассмотреть случай, когда $r = \infty$.

Для произвольного числа $j \in \mathbb{N}$ представим функцию $\varphi(w)$ в виде произведения функций $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$, где $\varphi_1(w)$ есть целая функция вида (1), а $\varphi_2(w)$ – полином степени j .

Положим

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(n) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Как показано выше, функция $f_1(z)$ не принадлежит классу $\mathcal{L}$ и у функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_2(n) \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(z)$$

не менее j положительных корней. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция f лежит в классе $\mathcal{LP}$, то и функция $h(z) = f(-z)$, очевидно, будет лежать в этом же классе; число отрицательных корней функции Af совпадает с числом положительных корней функции Ah , поэтому, используя теорему 2, можно найти число отрицательных корней функции Af .

Указанные в начале данной статьи теоремы Лагерра с помощью теоремы 2 можно уточнить следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция φ вида (1) имеет, по крайней мере, один корень, а функция f из класса $\mathcal{LP}$ – конечное число корней. Число корней функции Af совпадает с числом корней функции f тогда и только тогда, когда функция f является полиномом.

Действительно, по теореме 2 число корней функции Af не увеличится по сравнению с числом корней функции f только в том случае, если функции $f(z)$ и $f(-z)$ лежат в классе $\mathcal{L}$. Значит, функция $f(z)$ – полином.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция φ вида (1) имеет, по крайней мере, один корень, а функция f лежит в классе $\mathcal{LP}$. Все нули функции Af будут отрицательны тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет условиям теоремы Б.

Приведем еще один пример использования теорем 1 и 2.

ПРИМЕР 2. Для чисел $a, b > 0$ функция

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(an + b)n!}$$

имеет бесконечное число корней, причем все они отрицательные и простые.

Действительно, у функции $\Gamma(aw + b)$ бесконечное число нулей, и она имеет вид (1), функция $\exp z$ принадлежит классу $\mathcal{L}$, а функция $\exp(-z)$ не принадлежит, так что исконое вытекает из теорем 1 и 2.

Институт математики УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: mer@imat.rb.ru

Поступило

10.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.
- [2] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [3] Казьмин Ю. А. Об одной задаче Гельфонда–Ибрагимова. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1965. № 6. С. 37–44.
- [4] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.