Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Об алгебраических когомологиях вещественных алгебраических M -многообразий, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 854–867

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 07:16:30

УДК 512.7

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОГОМОЛОГИЯХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ M -МНОГООБРАЗИЙ

В. А. Краснов

Для вещественного алгебраического M -многообразия X рассматривается канонический гомоморфизм алгебраической группы когомологий множества вещественных точек в алгебраическую группу когомологий множества комплексных точек

$$\varrho_k: H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{alg}}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Этот гомоморфизм согласован с отображениями цикла. Производятся оценки размерности ядра данного гомоморфизма.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть далее X – n -мерное неособое проективное вещественное алгебраическое многообразие, т.е. X – такая схема над $\mathbb{R}$, что произведение $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C}$ является n -мерным неособым проективным комплексным алгебраическим многообразием. Множество комплексных точек $X(\mathbb{C})$ является компактным комплексным n -мерным многообразием, а множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$, если оно непустое, является n -мерным компактным дифференцируемым многообразием (может быть, несвязным). Будем предполагать, что X является M -многообразием, тогда множество $X(\mathbb{R})$ непустое. Напомним, что X называется M -многообразием, если неравенство Гарнака–Тома

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

становится равенством. Пусть $A^*(X_{\mathbb{C}})$ – кольцо Чжоу многообразия $X_{\mathbb{C}}$, тогда определено комплексное отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^*(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

которое циклу $Z \in A^q(X_{\mathbb{C}})$ сопоставляет класс когомологий

$$[Z(\mathbb{C})]^* \in H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Образ этого отображения обозначим через $H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$ и назовем *комплексной алгебраической группой когомологий*. Кроме комплексного отображения цикла определено вещественное отображение цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \tag{0.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS, грант INTAS-OPEN-2000-269.

где $A^*(X)$ – кольцо Чжоу многообразия X , которое циклу $Z \in A^q(X)$ сопоставляет класс когомологий

$$[Z(\mathbb{R})]^* \in H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Образ этого отображения цикла обозначим через $H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ и назовем *вещественной алгебраической группой когомологий*. Операция комплексификации для циклов определяет гомоморфизм колец Чжоу $A^*(X) \rightarrow A^*(X_{\mathbb{C}})$, композицию его с отображением цикла $\text{cl}_{\mathbb{C}}$ будем также обозначать через

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \quad (0.2)$$

Заметим, что циклу $Z \in A^q(X)$ это отображение сопоставляет класс когомологий

$$[Z(\mathbb{C})]^* \in H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Для M -многообразия X справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ (см. [1]). *Если $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$, то также $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = 0$.*

Поэтому для M -многообразия однозначно определен гомоморфизм

$$\varrho_*: H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A^*(X) & \\ \text{cl}_{\mathbb{R}} \swarrow & & \searrow \text{cl}_{\mathbb{C}} \\ H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\varrho_*} & H_{\text{alg}}^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \end{array} \quad (0.3)$$

Главная цель этой работы – изучить гомоморфизм ϱ_* , в частности, оценить размерность его ядра (имеется ввиду размерность над полем $\mathbb{Z}/2$). Приведем пример такой оценки, которая доказывается очень просто. Для этого обозначим факторгруппу

$$H^{n-k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)/H_{\text{alg}}^{n-k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

через $H_{\text{tr}}^{n-k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ и назовем ее *трансцендентной группой когомологий*. Тогда выполняется неравенство

$$\dim \ker \varrho_k \leq \dim H_{\text{tr}}^{n-k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Для доказательства этой оценки достаточно установить следующее утверждение: *если $Z_1 \in A^k(X)$ и $Z_2 \in A^{n-k}(X)$, причем $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_1) \in \ker \varrho_k$, то классы когомологий $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_1), \text{cl}_{\mathbb{R}}(Z_2)$ ортогональны относительно спаривания групп когомологий*

$$H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \quad H^{n-k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

с помощью индекса пересечения. А это утверждение вытекает из равенства индексов пересечения со значениями в $\mathbb{Z}/2$

$$(Z_1(\mathbb{R}), Z_2(\mathbb{R})) = (Z_1(\mathbb{C}), Z_2(\mathbb{C})).$$

1. Старые и новые теоремы. Сформулируем сначала некоторые известные результаты про гомоморфизм ϱ_* . Из [2, теорема 0.7] немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 1.1. *Если многообразие X является M -многообразием и отображение цикла*

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}} : A^{<k}(X) \rightarrow H^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

эпиморфно, то гомоморфизм

$$\varrho_k : H_{\mathrm{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\mathrm{alg}}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

будет мономорфизмом.

В формулировке этой теоремы используются обозначения

$$A^{<k}(X) = \bigoplus_{q < k} A^q(X), \quad H^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{q < 2k} H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Заметим, что для полного пересечения условие теоремы выполняется при $k < \dim X$.

Из результатов в работе [3] вытекает

ТЕОРЕМА 1.2. *Если многообразие X является M -многообразием и 2-примарная подгруппа $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ 2-периодическая, то размерность ядра гомоморфизма*

$$\varrho_1 : H_{\mathrm{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\mathrm{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

равна иррегулярности $q(X)$.

В этой статье мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если многообразие X является M -многообразием, то при каждом k выполняется неравенство*

$$\dim \ker \varrho_k + \dim H_{\mathrm{alg}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Заметим, что из неравенства в этой теореме вытекает утверждение теоремы 1.1, но это неравенство при $k = 1$ дает более слабую оценку на $\dim \ker \varrho_1$, чем равенство в предыдущей теореме; мы докажем следующую теорему, в которой устранен этот недостаток.

ТЕОРЕМА 1.4. *Если многообразие X является M -многообразием и 2-примарная подгруппа $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ 2-периодическая, то при k нечетном выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} \dim \ker \varrho_k + \dim H_{\mathrm{alg} - \mathrm{odd}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \\ \leq \dim H^2(G, H_{\mathrm{odd}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\mathrm{even}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \end{aligned}$$

а при k четном выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \dim \ker \varrho_k + \dim H_{\mathrm{alg} - \mathrm{even}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \\ \leq \dim H^2(G, H_{\mathrm{even}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\mathrm{odd}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

В этой теореме $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа, она действует на множестве комплексных точек $X(\mathbb{C})$, а поэтому и на группах когомологий. Кроме этого применяются обозначения

$$\begin{aligned} H_{\text{alg-odd}}^{<k}(\cdot, \cdot) &= \bigoplus_{2q-1 < k} H_{\text{alg}}^{2q-1}(\cdot, \cdot), & H_{\text{alg-even}}^{<k}(\cdot, \cdot) &= \bigoplus_{2q < k} H_{\text{alg}}^{2q}(\cdot, \cdot), \\ H_{\text{odd}}^{<2k}(\cdot, \cdot) &= \bigoplus_{2q-1 < 2k} H^{2q-1}(\cdot, \cdot), & H_{\text{even}}^{<2k}(\cdot, \cdot) &= \bigoplus_{2q < 2k} H^{2q}(\cdot, \cdot), \end{aligned}$$

и аналогичный смысл имеют выражения

$$H_{\text{alg-odd}}^{\leq k}(\cdot, \cdot), \quad H_{\text{alg-even}}^{\leq k}(\cdot, \cdot), \quad H_{\text{odd}}^{\leq 2k}(\cdot, \cdot), \quad H_{\text{even}}^{\leq 2k}(\cdot, \cdot).$$

Так как группы $H^1(G, \cdot)$, $H^2(G, \cdot)$ 2-периодические, то определены их размерности над полем $\mathbb{Z}/2$. Заметим также, что если группа $H^q(X(C), \mathbb{Z})$ свободная, то для M -многообразия выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dim H^2(G, H^q(X(C), \mathbb{Z})) &= \text{rk } H^q(X(C), \mathbb{Z})_+, \\ \dim H^1(G, H^q(X(C), \mathbb{Z})) &= \text{rk } H^q(X(C), \mathbb{Z})_-, \end{aligned}$$

где $H^q(X(C), \mathbb{Z})_{\pm}$ – инвариантная и антиинвариантная подгруппы группы $H^q(X(C), \mathbb{Z})$ относительно инволюции комплексного сопряжения $g \in G$. Если 2-примарная подгруппа $H^q(X(C), \mathbb{Z})(2)$ 2-периодическая, то для M -многообразия выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dim H^2(G, H^q(X(C), \mathbb{Z})) &= \dim H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2) + \text{rk}(H^q(X(C), \mathbb{Z})/\text{Tors})_+, \\ \dim H^1(G, H^q(X(C), \mathbb{Z})) &= \dim H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2) + \text{rk}(H^q(X(C), \mathbb{Z})/\text{Tors})_-. \end{aligned}$$

В дополнение к сформулированным теоремам о гомоморфизме ϱ_* будут доказаны следующие аналоги неравенства Гарнака–Тома для алгебраических когомологий. В этих теоремах многообразие X не обязано быть M -многообразием.

ТЕОРЕМА 1.5. *При каждом k выполняется неравенство*

$$\dim H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \quad (1.1)$$

ТЕОРЕМА 1.6. *При каждом k нечетном выполняется неравенство*

$$\dim H_{\text{alg-odd}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^2(G, H_{\text{odd}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\text{even}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})),$$

а при k четном –

$$\dim H_{\text{alg-even}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^2(G, H_{\text{even}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\text{odd}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

Заметим, что неравенство (1.1) нельзя заменить на неравенство для всех когомологий

$$\dim H^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

при $k < n = \dim X$. Например, если число компонент связности $s > 1$, то неравенство

$$\dim H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

не выполняется. На самом деле, справедливо следующее неравенство (см. [2]):

$$\dim H^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq \dim H^{\leq k+n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

2. Применение эквивариантных когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$.

При доказательстве теорем 1.3, 1.5 мы будем применять эквивариантные когомологии $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$ и эквивариантное отображение цикла. Сначала мы приведем без доказательства необходимые далее факты об эквивариантных когомологиях вещественного алгебраического многообразия. Подробности можно посмотреть в [1]–[8].

На множестве комплексных точек $X(\mathbb{C})$ действует группа Галуа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, поэтому определены эквивариантные когомологии $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$. Имеются две спектральные последовательности, которые сходятся к этим когомологиям. Первая спектральная последовательность нам не потребуется, поэтому мы ее не приводим, а вторая спектральная последовательность имеет вид

$$H_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2). \quad (2.1)$$

Для M -многообразия эта спектральная последовательность вырождается, причем

$$H_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Обозначим через t образующую группы

$$H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}/2) = H^1(G, \mathbb{Z}/2),$$

где pt – одноточечное G -пространство. Тогда гомоморфизм умножения на t будем обозначать через

$$t: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$$

и называть *гомоморфизмом сдвига* (см. [7]), для M -многообразия он является вложением. Спектральная последовательность (2.1) определяет возрастающую фильтрацию

$$\begin{aligned} F^0 H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) &\subset F^1 H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \subset \dots \subset F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \\ &\subset F^q H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) = H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2), \end{aligned}$$

причем выполняются равенства

$$\begin{aligned} F^p H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) &= t^{q-p} H^p(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2), \\ F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) &= \ker[\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)], \end{aligned}$$

где α – канонический гомоморфизм забывания вещественной структуры. Мы можем рассмотреть эквивариантные когомологии множества вещественных точек, тогда выполняется равенство

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Заметим, что при гомоморфизме ограничения

$$\beta: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

образы элементов

$$a \in H^p(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2), \quad t^{q-p}a \in H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2)$$

совпадают, т.е. выполняется равенство $\beta(t^{q-p}a) = \beta(a)$. Рассмотрим возрастающую фильтрацию

$$\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^0 \subset \dots \subset \mathcal{F}^{2n-1} \subset \mathcal{F}^{2n} = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{F}^p = \beta(H^p(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)) \subset H^{\leq p}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \subset H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Эта фильтрация получается из спектральной последовательности, которую мы сейчас опишем. При $p + q > 2n$ группа $II_r^{p,q}$ не зависит от p ; обозначим ее через H_r^q . Дифференциал

$$d_r^{p,q}: II_r^{p,q} \rightarrow II_r^{p+r, q-r+1}$$

также не зависит от p при $p + q > 2n$; обозначим его через d_r^q . Тогда получаем спектральную последовательность (H_r^q, d_r^q) , которая сходится к группе $H^N(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$, где $N > 2n$. Гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^N(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^N(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

является изоморфизмом при $N > 2n$, поэтому можно считать, что спектральная последовательность (H_r^q, d_r^q) сходится к группе $H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Эта спектральная последовательность в работе [4] названа спектральной *последовательностью Калинина*, так как Калинин заметил в [5], что удобно вместо всей второй спектральной последовательности $II_r^{p,q}$ рассматривать полученную предельную спектральную последовательность H_r^q . Заметим, что

$$H_2^q = H^1(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)^G / (1 + g^*)H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

Фильтрация (2.2) получается из этой спектральной последовательности.

Кроме комплексного (0.2) и вещественного (0.1) отображений цикла определено эквивариантное отображение цикла

$$\text{cl}: A^*(X) \rightarrow H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2), \quad (2.3)$$

которое циклу $Z \in A^q(X)$ сопоставляет эквивариантный класс когомологий

$$[Z(\mathbb{C}); G]^* \in H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2).$$

Эти отображения цикла связаны между собой соотношениями

$$\alpha \circ \text{cl} = \text{cl}_{\mathbb{C}}, \quad \beta \circ \text{cl} = Sq \circ \text{cl}_{\mathbb{R}},$$

где

$$\beta: H^{2q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^{2q}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{k=0}^{2q} H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

– гомоморфизм ограничения, а Sq – полный квадрат Стиррода (см. [1], [2]).

ЛЕММА 2.1. Для каждого k выполняется включение

$$Sq(H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}^{2k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ и $Z \in A^k(X)$ – такой цикл, что $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = a$; тогда $\text{cl}(Z) \in H^{2k}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)$, поэтому $\beta(\text{cl}(Z)) \in \mathcal{F}^{2k}$. С другой стороны, имеем равенства $\beta(\text{cl}(Z)) = Sq(\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z)) = Sq(a)$. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает включение

$$Sq(H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}^{2k}.$$

Так как гомоморфизм

$$Sq: H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

является изоморфизмом, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \dim H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= \dim Sq(H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \leq \dim \mathcal{F}^{2k} = \dim H_{\infty}^{\leq 2k} \\ &\leq H_2^{\leq 2k} = \dim H^1(G, H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) \leq H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \end{aligned}$$

Итак, теорема 1.5 доказана, переходим к доказательству теоремы 1.3. Рассмотрим группу

$$Sq(\ker \varrho_k \oplus H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)).$$

Покажем, что она содержится в группе $\mathcal{F}^{2k-1}$. В силу леммы 2.1 группа

$$Sq(H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2))$$

содержится в группе $\mathcal{F}^{2k-2}$, а поэтому она содержится в группе $\mathcal{F}^{2k-1}$. Пусть $a \in \ker \varrho_k$ и $Z \in A^k(X)$ – такой цикл, что $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = a$; тогда элемент

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = \alpha(\text{cl}(Z)) \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

равен нулю. Следовательно,

$$\text{cl}(Z) \in F^{2k-1}H^{2k}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2) = tH^{2k-1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2).$$

Поэтому

$$Sq(a) = \beta(\text{cl}(Z)) \in \beta(H^{2k-1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}/2)) = \mathcal{F}^{2k-1}.$$

Итак, включение

$$Sq(\ker \varrho_k \oplus H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}^{2k-1}$$

доказано, поэтому выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \dim \ker \varrho_k + \dim H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= \dim Sq(\ker \varrho_k \oplus H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \\ &\leq \dim \mathcal{F}^{2k-1} = \dim H_{\infty}^{\leq 2k} \leq H_2^{\leq 2k} \\ &= \dim H^1(G, H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) \\ &\leq H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2). \end{aligned}$$

Теорема 1.3 доказана.

3. Применение эквивариантных когомологий с целыми коэффициентами. При доказательстве теорем 1.4, 1.6 мы будем применять эквивариантные когомологии с целыми коэффициентами $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$. Имеются две спектральные последовательности, которые сходятся к этим когомологиям. Первая спектральная последовательность нам не потребуется, поэтому мы ее не приводим, а вторая спектральная последовательность имеет вид

$$I_2^{p,q}(\mathbb{Z}) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}). \quad (3.1)$$

Пусть $\mathbb{Z}_-$ – G -модуль целых чисел, на котором инволюция $g \in G$ действует умножением на -1 . Тогда мы можем рассмотреть эквивариантные когомологии $H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$. Вторая спектральная последовательность для них имеет вид

$$I_2^{p,q}(\mathbb{Z}_-) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-). \quad (3.2)$$

G -модуль целых чисел, на котором инволюция $g \in G$ действует тривиально, мы будем обозначать через $\mathbb{Z}_+$ или просто через $\mathbb{Z}$. Итак,

$$H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_+) = H^*(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

Обозначим через T образующую группы

$$H^1(\text{pt}; G, \mathbb{Z}_-) = H^1(G, \mathbb{Z}_-) = \mathbb{Z}/2,$$

где pt – одноточечное G -пространство. Тогда гомоморфизм умножения на T будем обозначать через

$$T: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_{\pm}) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_{\mp})$$

и называть гомоморфизмом сдвига (см. [3], [7]). Спектральная последовательность (3.1) определяет возрастающую фильтрацию

$$\begin{aligned} F^0 H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) &\subset F^1 H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \subset \dots \subset F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \\ &\subset F^q H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

аналогичную фильтрацию группы $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ определяет спектральная последовательность (3.2). Заметим, что G -модуль $\mathbb{Z}_-$ обозначается также через $\mathbb{Z}(1)$, а вообще, через $\mathbb{Z}(l)$ обозначается G -модуль целых чисел, на котором инволюция $g \in G$ действует умножением на $(-1)^l$. Таким образом, при четном l имеем равенство $\mathbb{Z}(l) = \mathbb{Z}$, а при нечетном l справедливо равенство $\mathbb{Z}(l) = \mathbb{Z}_-$. Тогда при $p \leq q$ выполняется равенство

$$F^p H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(l)) = T^{q-p} H^p(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(l+p-q)).$$

Мы можем рассмотреть эквивариантные когомологии множества вещественных точек. Заметим, что при l четном выполняется равенство

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}(l)) = H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-4}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots$$

и гомоморфизм редукции по $\text{mod } 2$

$$R: H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}(l)) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{p=0}^q H^p(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

переводит сумму $[a^q] + [a^{q-2}] + [a^{q-4}] + \dots$ в сумму

$$[a^q \bmod 2] + \delta([a^{q-2}]) + [a^{q-2}] + \delta([a^{q-4}]) + [a^{q-4}] + \dots,$$

где δ – гомоморфизм Бокштейна. А при l нечетном выполняется равенство

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}(l)) = H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-3}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-5}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots$$

и гомоморфизм редукции по $\bmod 2$ переводит сумму $[a^{q-1}] + [a^{q-3}] + [a^{q-5}] + \dots$ в сумму

$$\delta([a^{q-1}]) + [a^{q-1}] + \delta([a^{q-3}]) + [a^{q-3}] + \delta([a^{q-5}]) + [a^{q-5}] + \dots.$$

Обозначим через

$$B: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(l)) \rightarrow H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-3}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-5}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots$$

гомоморфизм ограничения

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(l)) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}(l))$$

при нечетном l , и пусть при четном l гомоморфизм

$$B: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(l)) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-4}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots$$

равен композиции гомоморфизма ограничения и гомоморфизма редукции на первом слагаемом

$$\begin{aligned} H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-4}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots \\ \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus H^{q-4}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \oplus \dots. \end{aligned}$$

Через $H_{\text{odd}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ обозначим прямую сумму

$$\bigoplus_q H^{2q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2);$$

аналогично,

$$H_{\text{even}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_q H^{2q}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

На этих группах определены возрастающие фильтры

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{odd}}^0 \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2n-1} \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2n} = H_{\text{odd}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \\ \mathcal{F}_{\text{even}}^0 \subset \mathcal{F}_{\text{even}}^1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{\text{even}}^{2n-1} \subset \mathcal{F}_{\text{even}}^{2n} = H_{\text{even}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{odd}}^p &= B(H^p(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(p+1))) \subset H_{\text{odd}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \\ \mathcal{F}_{\text{even}}^p &= B(H^p(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(p))) \subset H_{\text{even}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2). \end{aligned}$$

Эти фильтры получаются из спектральных последовательностей Калинина

$$(H_r'^q, d_r'^q) \Rightarrow H_{\text{odd}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \quad (H_r''^q, d_r''^q) \Rightarrow H_{\text{even}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2),$$

которые строятся так же, как спектральная последовательность (H_r^q, d_r^q) . Заметим, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} H_2'^{2q-1} &= H^2(G, H^{2q-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), & H_2'^{2q} &= H^1(G, H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \\ H_2''^{2q-1} &= H^1(G, H^{2q-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), & H_2'^{2q} &= H^2(G, H^{2q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Определены гомоморфизмы редукции по $\bmod 2$

$$(H_r'^q, d_r'^q) \rightarrow (H_r^q, d_r^q), \quad (H_r''^q, d_r''^q) \rightarrow (H_r^q, d_r^q);$$

заметим, что при этом соответствующие гомоморфизмы

$$H_{\text{odd}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2), \quad H_{\text{even}}^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

равны $1 + \delta$, где δ – гомоморфизм Бокштейна.

ЛЕММА 3.1. При каждом нечетном k выполняется включение

$$Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k},$$

а при четном k –

$$Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}_{\text{even}}^{2k},$$

где $Sq^{\text{even}} = 1 + Sq^2 + Sq^4 + \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрели отображения цикла (0.2), (2.3) в когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$, но определены также отображения цикла в когомологии с целыми коэффициентами

$$\text{CL}_{\mathbb{C}}: A^k(X) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad \text{CL}: A^k(X) \rightarrow H^{2k}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}(k)),$$

композиция которых с гомоморфизмом редукции по mod 2 совпадает с гомоморфизмами (0.2), (2.3). Из равенства $\beta \circ \text{cl} = Sq \circ \text{cl}_{\mathbb{R}}$ вытекает равенство $B \circ \text{CL} = Sq^{\text{even}} \circ \text{cl}_{\mathbb{R}}$. Из этого соотношения и вытекают утверждения леммы. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекают включения

$$Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg-odd}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k}, \quad Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg-even}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}_{\text{even}}^{2k}.$$

Так как выполняется равенство $Sq = (1 + \delta) \circ Sq^{\text{even}}$, то гомоморфизм

$$Sq^{\text{even}}: H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

является изоморфизмом. Поэтому справедливы неравенства: если k нечетное, то

$$\begin{aligned} \dim H_{\text{alg-odd}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= \dim Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg-odd}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \\ &\leq \dim \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k} = \dim H'_{\infty}^{\leq 2k} \leq H'_2^{\leq 2k} \\ &= \dim H^2(G, H_{\text{odd}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\text{even}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})), \end{aligned}$$

а если k четное, то

$$\begin{aligned} \dim H_{\text{alg-even}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= \dim Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg-even}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \\ &\leq \dim \mathcal{F}_{\text{even}}^{2k} = \dim H''_{\infty}^{\leq 2k} \leq H''_2^{\leq 2k} \\ &= \dim H^2(G, H_{\text{even}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\text{odd}}^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Итак, теорема 1.6 доказана, переходим к доказательству теоремы 1.4. Прежде всего будет доказана следующая

ЛЕММА 3.2. Пусть многообразие X является M -многообразием, а 2-примарная подгруппа $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})(2)$ группы когомогий $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ является 2-периодической. Тогда при $p = 1, 2$ гомоморфизмы

$$H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)), \quad (3.4)$$

индуцированные редукцией по mod 2

$$R: H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

мономорфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизмы (3.4) разлагаются в композицию гомоморфизмов

$$H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)).$$

Так как для M -многообразия инволюция $g \in G$ действует на $H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$ тривиально, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) &= H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2), \\ H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2) &= H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2, \end{aligned}$$

а поэтому гомоморфизм

$$H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2))$$

мономорфен. Следовательно, достаточно проверить мономорфность гомоморфизма

$$H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/2).$$

Далее, для сокращения записи введем обозначения

$$H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H, \quad T = \text{Tors } H, \quad L = H/T$$

и рассмотрим коммутативную диаграмму из G -модулей

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & H & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T/2 & \longrightarrow & H/2 & \longrightarrow & L/2 \longrightarrow 0 \end{array},$$

строки в которой точны. Из нее получаем коммутативную диаграмму когомологий этих G -модулей

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^p(G, T) & \longrightarrow & H^p(G, H) & \longrightarrow & H^p(G, L) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^p(G, T/2) & \longrightarrow & H^p(G, H/2) & \longrightarrow & H^p(G, L/2) \longrightarrow \cdots \end{array}.$$

Из условия, что 2-примарная группа $T(2)$ является 2-периодической следует, что гомоморфизм

$$H^p(G, T) \rightarrow H^p(G, T/2)$$

является изоморфизмом, а так как инволюция $g \in G$ действует на $H/2$ тривиально, то гомоморфизм

$$H^p(G, T/2) \rightarrow H^p(G, H/2)$$

является мономорфизмом. Группа L свободная, поэтому гомоморфизм

$$H^p(G, L) \rightarrow H^p(G, L/2)$$

также мономорфен. Тогда из верхней коммутативной диаграммы следует, что гомоморфизм

$$H^p(G, H) \rightarrow H^p(G, H/2)$$

мономорфен. Лемма доказана.

Мы будем доказывать только первое неравенство в теореме 1.4, т.е. для нечетного k , так как второе неравенство доказывается аналогично. Прежде всего, покажем, что выполняется включение

$$Sq^{\text{even}}(\ker \varrho_k \oplus H_{\text{alg-odd}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1}. \quad (3.5)$$

В силу леммы 3.1 группа

$$Sq^{\text{even}}(H_{\text{alg-odd}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2))$$

содержится в группе $\mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-2}$, а поэтому она содержится в группе $\mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1}$; осталось доказать включение

$$Sq^{\text{even}}(\ker \varrho_k) \subset \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1}. \quad (3.6)$$

Пусть $a \in \ker \varrho_k$ и $Z \in A^k(X)$ – такой цикл, что $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = a$; тогда элемент

$$\varrho_k(a) = \text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = \alpha(\text{cl}(Z)) \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

равен нулю, а нужно показать, что

$$Sq^{\text{even}}(a) \in \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1}.$$

Рассмотрим элемент $\text{CL}_{\mathbb{C}}(Z) \in H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$; он принадлежит группе $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ – и определяет элемент группы

$$H'^{2k}_2 = H^1(G, H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) - (1 - g^*)H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Обозначим этот элемент через b ; тогда при гомоморфизме

$$H^1(G, H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G, H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)) = H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$$

он переходит в элемент $\text{cl}_{\mathbb{C}}(a)$, т.е. в нуль. А из леммы 3.2 следует, что и элемент b равен нулю. Поэтому класс когомологий $\text{CL}_{\mathbb{C}}(Z) = \alpha(\text{CL}(Z))$ определяет нулевой элемент из группы H'^{2k}_{∞} . Это означает, что

$$Sq^{\text{even}}(a) = B(\text{CL}(Z)) \in \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1}.$$

Итак, включение (3.6) доказано, поэтому выполняется включение (3.5), следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \dim \ker \varrho_k + \dim H_{\text{alg-odd}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= \dim Sq^{\text{even}}(\ker \varrho_k \oplus H_{\text{alg-odd}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)) \\ &\leq \dim \mathcal{F}_{\text{odd}}^{2k-1} = \dim H'^{<2k}_{\infty} \leq H'^{<2k}_2 \\ &= \dim H^2(G, H_{\text{odd}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H_{\text{even}}^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned}$$

Теорема 1.4 доказана.

4. Замечания и примеры. Заметим, что при конкретном k гомоморфизм

$$\varrho_k : H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{alg}}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

для которого коммутативна диаграмма, аналогичная диаграмме (0.3),

$$\begin{array}{ccc} & A^k(X) & \\ \text{cl}_{\mathbb{R}} \swarrow & & \searrow \text{cl}_{\mathbb{C}} \\ H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\varrho_k} & H_{\text{alg}}^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) \end{array}, \quad (4.1)$$

может быть определен и не только для M -многообразий. Например, всегда определен гомоморфизм

$$\varrho_0 : H_{\text{alg}}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{alg}}^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, так как

$$H_{\text{alg}}^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \cdot [X(\mathbb{R})]^*, \quad H_{\text{alg}}^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \cdot [X(\mathbb{C})]^*$$

и в силу диаграммы (4.1) выполняется равенство $\varrho_0([X(\mathbb{R})]^*) = [X(\mathbb{C})]^*$. Также, всегда определен гомоморфизм ϱ_n , где $n = \dim X$. Действительно, тогда

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^n(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &= H_0(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)^s, \\ H_{\text{alg}}^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) &= H_0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2, \end{aligned}$$

где s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, и в силу диаграммы (4.1) выполняется равенство $\varrho_n(m_1, \dots, m_s) = m_1 + \dots + m_s$. Если многообразие X является GM -многообразием и инволюция комплексного сопряжения $g \in G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует на группе $H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)$ тривиально, то гомоморфизм ϱ_k , для которого коммутативна диаграмма (4.1), также определен, так как в этом случае справедливо утверждение про $\text{cl}_{\mathbb{R}}, \text{cl}_{\mathbb{C}}$ (см. [1]): *если $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$, то $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) = 0$* . С другой стороны, например, для квадрики X , заданной уравнением

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

гомоморфизм

$$\varrho_1 : H_{\text{alg}}^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2),$$

для которого коммутативна диаграмма (4.1), не определен, так как для кривой $Z \in A^1(X)$, заданной уравнением $x_3 = 0$, выполняется равенство $\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z) = 0$ и неравенство $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z) \neq 0$.

В общем случае определен гомоморфизм

$$\varrho_k^{(\infty)} : H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_{\infty}^{2k}.$$

Тогда элемент $\varrho_k^{(\infty)}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(Z))$ получается из элемента $\text{cl}_{\mathbb{C}}(Z)$ с помощью факторизации. С другой стороны, этот гомоморфизм равен композиции гомоморфизмов

$$H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{Sq} \mathcal{F}^{2k} \rightarrow \mathcal{F}^{2k} / \mathcal{F}^{2k-1}.$$

В частности, если многообразие X является GM -многообразием, то определен гомоморфизм

$$\varrho_k^{(2)}: H_{\text{alg}}^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_2^{2k} = H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)^G / (1 + g^*) H^{2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2).$$

В этом случае выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \dim \ker \varrho_k^{(2)} + \dim H_{\text{alg}}^{<k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &\leq \dim H^1(G, H^{<2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)), \\ \dim H_{\text{alg}}^{\leq k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) &\leq \dim H^1(G, H^{\leq 2k}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2)), \end{aligned}$$

впрочем, второе неравенство всегда выполняется. Можно сформулировать аналогичные неравенства для $GM\mathbb{Z}$ -многообразий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–747.
- [2] Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
- [3] Краснов В. А. Вещественные алгебраические $GM\mathbb{Z}$ -поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 4. С. 51–80.
- [4] Degtyarev A., Kharlamov V. Halves of real Enriques surface // Comment. Math. Helv. 1996. V. 71. P. 628–663.
- [5] Калинин И. О. Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 2. С. 91–110.
- [6] Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
- [7] Краснов В. А. Вещественные алгебраические GM -многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 39–66.
- [8] Краснов В. А. Этальные и эквивариантные когомологии вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 166–186.

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило
23.05.2003