Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Х. Садикова, Общий класс неравенств со смешанными средними, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 864–872

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:25:48

УДК 517.5

ОБЩИЙ КЛАСС НЕРАВЕНСТВ СО СМЕШАННЫМИ СРЕДНИМИ

Р. Х. Садикова

Пусть (T, Σ, μ) – пространство с положительной мерой, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – строго монотонная непрерывная функция, $\mathfrak{G}(T)$ – совокупность вещественных μ -измеримых функций на T . Пусть $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T)$ и $(f \circ x)(\cdot) \in L_1(T, \mu)$. Для средних $\mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}(x(\cdot))$ и смешанных средних $\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)))$ доказаны сравнения, из которых выводятся аналогии или обобщения некоторых классических неравенств Гёльдера, Минковского, Беллмана, Пирсона, Годуновой и Левина, Стеффенсена, Маршалла и Олкина и др.

Результаты являются продолжением исследований автора.

Библиография: 14 названий.

Предварительные сведения. Пусть (T, Σ, μ) – пространство с положительной мерой, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – строго монотонная непрерывная функция и $\mathfrak{G}(T)$ – совокупность вещественных μ -измеримых функций на T . Пусть $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T)$ и $(f \circ x)(\cdot) \in L_1(T, \mu)$. Обозначим

$$\mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}(x(\cdot)) = f^{-1} \left(\int_T f(x(t)) d\mu(t) \right),$$

$$L_f = \{x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T) \mid \mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}(x(\cdot)) < \infty\}, \quad \mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}: L_f \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для функции $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T)$, где $T = T_1 \times \dots \times T_n$, положим

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), \dots, (T_n, \mu_n, f_n)}(x(\cdot)) \\ &= (\mathfrak{M}_{(T_n, \mu_n, f_n)} \circ \mathfrak{M}_{(T_{n-1}, \mu_{n-1}, f_{n-1})} \circ \dots \circ \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)})(x(\cdot)), \\ & L_{f_1, \dots, f_n} = \{x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T) \mid \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), \dots, (T_n, \mu_n, f_n)}(x(\cdot)) < \infty\}. \end{aligned}$$

Вообще говоря,

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), (T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) \neq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2), (T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)).$$

Отметим два свойства, которые будут использованы в дальнейшем:

- а) если $x_1(\cdot) \leq x_2(\cdot)$ почти всюду, то $\mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}(x_1(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T, \mu, f)}(x_2(\cdot))$;
- б) если $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f), \dots, (T_n, \mu_n, f)}(x(\cdot)) &= \mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f), \dots, (T_{i_n}, \mu_{i_n}, f)}(x(\cdot)) \\ &= \mathfrak{M}_{(T, f)}(x(\cdot)), \end{aligned}$$

где $\{i_1, \dots, i_n\}$ – любая перестановка $(1, 2, \dots, n)$ и $T = T_1 \times \dots \times T_n$ (это свойство следует из теоремы Фубини).

Доказаны общие теоремы для таких смешанных средних, из которых выводятся аналогии или обобщения некоторых классических неравенств [1]–[7]. Результаты обобщают исследования автора [8]–[12].

При выводе частных случаев общих результатов будут использованы теоремы Иессена [1, с. 96], Шиша и Карго [13], Купера [14].

ТЕОРЕМА (Иессен). Пусть (T, Σ, μ) – пространство с неотрицательной конечной мерой μ , f_1, f_2 – непрерывные строго монотонные функции, f_2 возрастает (т.е. f_2^{-1} возрастает), $f_2 \circ f_1^{-1}$ выпукла. Тогда для функции $x(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$f_1^{-1} \left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f_1(x(t)) d\mu(t) \right) \leq f_2^{-1} \left(\frac{1}{\mu(T)} \int_T f_2(x(t)) d\mu(t) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выпуклость $f_2 \circ f_1^{-1}$ гарантирует, например, следующее предположение о функциях f_1, f_2 : функция $x(\cdot) \mapsto f_2'(x(\cdot))/f_1'(x(\cdot))$, $f_1'(x(\cdot)) \neq 0 \forall x(\cdot) \in T$

- 1) не убывает при одинаковой монотонности f_1, f_2 , или
- 2) не возрастает при различной монотонности f_1, f_2 .

При этом предположении неравенство Иессена доказано Шиша и Карго [13].

ТЕОРЕМА (Купер). Пусть f_1, f_2 – строго монотонные непрерывные функции и выполняется одно из условий:

- 1) f_1 убывает, f_2 возрастает, или
- 2) обе функции f_1, f_2 убывают либо возрастают, при этом функция $(f_1/f_2)(x)$ возрастает, $f_2(x) \neq 0$.

Тогда для любых $x_1, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$f_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_1(x_i) \right) \leq f_2^{-1} \left(\sum_{i=1}^n f_2(x_i) \right).$$

Равенство имеет место в случае 1) и, если f_1/f_2 строго возрастает, в случае 2), только тогда, когда $x_i \in \mathbb{R}_+$ для некоторого i .

Общие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) , $i = 1, 2$, – пространства с положительными мерами; f_j , $j = 1, 2, 3, 4$, – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, при этом

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1), \quad (1)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_4)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_2). \quad (2)$$

Тогда для любого $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1 \times T_2)$ имеют место неравенства

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), (T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_4), (T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot)), \quad (3)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2), (T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3), (T_2, \mu_2, f_4)}(x(\cdot)). \quad (4)$$

В теореме 1 функции f_1, f_2 зависимы. Докажем теорему, в которой функции f_1, f_2 независимы, что позволяет расширить область применимости общих результатов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) , $i = 1, 2$, – пространства с положительными мерами μ_i ; f_j , $j = 1, 2, 3, 4$, – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, при этом

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_4)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1), \quad (5)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_2). \quad (6)$$

Тогда для любого $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1 \times T_2)$ имеют место неравенства

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), (T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3), (T_1, \mu_1, f_4)}(x(\cdot)), \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2), (T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_4), (T_2, \mu_2, f_3)}(x(\cdot)). \quad (8)$$

Путем повторного применения результатов (3), (4), (7), (8) можем получить сравнения обобщенных средних для многомерного случая.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (T_i, Σ_i, μ_i) , $i = 1, \dots, n$, – пространства с положительными мерами μ_i ; f_i , f'_i , $i = 1, \dots, n$, и φ – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, φ возрастающая, $I(u) = u$, при этом

$$\mathfrak{M}_{(T_i, \mu_i, f_i)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_i, \mu_i, \varphi)}(x(\cdot)), \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_i), \quad (9)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_i, \mu_i, I)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_i, \mu_i, f'_i)}(x(\cdot)), \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_i). \quad (10)$$

Тогда для всякого $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1 \times \dots \times T_n)$ имеет место неравенство

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), \dots, (T_n, \mu_n, f_n)}(x(\cdot)) \leq \varphi^{-1}(\mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f'_{i_1}), \dots, (T_{i_n}, \mu_{i_n}, f'_{i_n})}(\varphi(x(\cdot)))),$$

где $(i_1, \dots, i_n)$ – любая перестановка $(1, \dots, n)$, а также справедливо неравенство

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), \dots, (T_n, \mu_n, f_n)}(x(\cdot)) \geq \varphi^{-1}(\mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f'_{i_1}), \dots, (T_{i_n}, \mu_{i_n}, f'_{i_n})}(\varphi(x(\cdot))))$$

в случае, если условия (9), (10) противоположного смысла.

Общие теоремы 1–3 и их следствия могут быть применены к доказательству новых неравенств.

ЛЕММА (следствие из теоремы 1). Пусть (T_1, Σ_1, μ_1) – пространство с вероятностной мерой, (T_2, Σ_2, μ_2) – пространство с положительной мерой, f_1, f_2 – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, f_1 вогнута, f_2 выпукла, $I(u) = u$, при этом

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, I)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1).$$

Тогда для любого $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1 \times T_2)$ имеют место неравенства

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, I)}(x(\cdot))) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, I)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot))), \quad (11)$$

$$\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, I)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, I)}(x(\cdot))). \quad (12)$$

Сформулированная лемма используется при выводе обобщений неравенств Пирсона–Стеффенсена и при доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (T_1, Σ_1, μ_1) – пространство с вероятностной мерой, (T_1, Σ_1, ν_1) , (T_2, Σ_2, μ_2) – пространства с положительными мерами и выполнены условия леммы (т.е. f_1 – вогнутая, f_2 – выпуклая строго монотонные непрерывные функции). Пусть, далее, $K(\cdot, \cdot): T_1 \times T_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ – измеримая функция, $K(\cdot, \cdot) \in L_1(T_1 \times T_2, \nu_1 \times \mu_2)$, $K(t_1, \cdot) \in L_1(T_2, \mu_2) \quad \forall t_1 \in T_1$, а функция $x(\cdot)$ допускает представление

$$x(t_1) = \int_{T_2} K(t_1, t_2) d\mu_2(t_2) \quad \forall t_1 \in T_1.$$

Если $\forall t_2 \in T_2$ имеют место соотношения

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(K(\cdot, t_2)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \nu_1, I)}(K(\cdot, t_2)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, t_1)}(K(\cdot, t_2)), \quad (13)$$

то для $x(\cdot) \in \mathfrak{G}(T_1)$ справедливы неравенства

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \nu_1, I)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot)). \quad (14)$$

Равенство в (14) достигается только при $x(\cdot) = \text{const.}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем неравенства (3), а неравенства (4) доказываются аналогично. Последовательно применяя свойства а), б) и неравенства (1), (2), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), (T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) &= \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))) \\ &\leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot))) = \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot))) \\ &\leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot))) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_4)}(x(\cdot))) \\ &= \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_4), (T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot)), \end{aligned}$$

что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем неравенства (7), а неравенства (8) доказываются аналогично. Исходя из свойств а), б) и неравенств (5), (6), имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), (T_2, \mu_2, f_2)}(x(\cdot)) &= \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))) \\ &\leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_2)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot))) \leq \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3)}(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(x(\cdot))) \\ &= \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_3)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3)}(x(\cdot))) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_4)}(\mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3)}(x(\cdot))) \\ &= \mathfrak{M}_{(T_2, \mu_2, f_3), (T_1, \mu_1, f_4)}(x(\cdot)), \end{aligned}$$

что доказывает (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу обозначений, свойств а), б) и неравенств (9), (10), имеем

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1), \dots, (T_n, \mu_n, f_n)}(x(\cdot)) \\
 &= \mathfrak{M}_{(T_n, \mu_n, f_n)}\left(\mathfrak{M}_{(T_{n-1}, \mu_{n-1}, f_{n-1})}\left(\dots \left(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))\right) \dots\right)\right) \\
 &\leq \mathfrak{M}_{(T_n, \mu_n, \varphi)}\left(\mathfrak{M}_{(T_{n-1}, \mu_{n-1}, f_{n-1})}\left(\dots \left(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))\right) \dots\right)\right) \\
 &\leq \mathfrak{M}_{(T_n, \mu_n, \varphi)}\left(\mathfrak{M}_{(T_{n-1}, \mu_{n-1}, \varphi)}\left(\dots \left(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot))\right) \dots\right)\right) \leq \dots \\
 &\leq \mathfrak{M}_{(T_n, \mu_n, \varphi)}\left(\mathfrak{M}_{(T_{n-1}, \mu_{n-1}, \varphi)}\left(\dots \left(\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, \varphi)}(x(\cdot))\right) \dots\right)\right) = \mathfrak{M}_{(T, \varphi)}(x(\cdot)) \\
 &= \mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, \varphi), \dots, (T_{i_n}, \mu_{i_n}, \varphi)}(x(\cdot)) = \varphi^{-1}\left(\int_{T_{i_1}} \dots \int_{T_{i_n}} \varphi(x(t_1, \dots, t_n)) d\mu_{i_n} \dots d\mu_{i_1}\right) \\
 &\leq \varphi^{-1}\left(\mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f'_{i_1})}\left(\int_{T_{i_2}} \dots \int_{T_{i_n}} \varphi(x(t_1, \dots, t_n)) d\mu_{i_n} \dots d\mu_{i_1}\right)\right) \leq \dots \\
 &\leq \varphi^{-1}\left(\mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f'_{i_1})}\left(\mathfrak{M}_{(T_{i_2}, \mu_{i_2}, f'_{i_2})}\left(\dots \left(\mathfrak{M}_{(T_{i_n}, \mu_{i_n}, f'_{i_n})}(\varphi(x(\cdot)))\right) \dots\right)\right)\right) \\
 &= \varphi^{-1}\left(\mathfrak{M}_{(T_{i_1}, \mu_{i_1}, f'_{i_1}), \dots, (T_{i_n}, \mu_{i_n}, f'_{i_n})}(\varphi(x(\cdot)))\right),
 \end{aligned}$$

что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть в теореме 2 (T_1, Σ_1, μ_1) – пространство с вероятностной мерой, $f_2(u) = f_3(u) = u = I(u)$, при этом условие (5) обращается в равенство, а условие (6) выполняется согласно неравенству Иессена (т.е. f_1 вогнута, $f_4 = f_2$ выпукла, заменяем функцию f_4 на f_2). Из общих результатов (7), (8) соответственно следуют неравенства (11), (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Все части двойного неравенства (13) проинтегрируем по множеству T_2 с мерой μ_2 :

$$\begin{aligned}
 \int_{T_2} f_2^{-1}\left(\int_{T_1} (K(t_1, t_2)) d\mu_1(t_1)\right) d\mu_2(t_2) &\leq \int_{T_2} \left(\int_{T_1} K(t_1, t_2) d\nu_1(t_1)\right) d\mu_2(t_2) \\
 &\leq \int_{T_2} f_1^{-1}\left(\int_{T_1} f_1(K(t_1, t_2)) d\mu_1(t_1)\right) d\mu_2(t_2).
 \end{aligned}$$

В средней части неравенства поменяем порядок интегрирования (условия теоремы Фубини, очевидно, выполнены), к правой и левой частям применим соответственно доказанные в лемме оценки (12) и (11). Получим

$$\begin{aligned}
 f_1^{-1}\left(\int_{T_1} f_1\left(\int_{T_2} K(t_1, t_2) d\mu_2(t_2)\right) d\mu_1(t_1)\right) &\leq \int_{T_1} \left(\int_{T_2} K(t_1, t_2) d\mu_2(t_2)\right) d\nu_1(t_1) \\
 &\leq f_2^{-1}\left(\int_{T_1} f_2\left(\int_{T_2} K(t_1, t_2) d\mu_2(t_2)\right) d\mu_1(t_1)\right).
 \end{aligned}$$

В силу представления для функции $x(t_1)$ имеем

$$f_1^{-1}\left(\int_{T_1} f_1(x(t_1)) d\mu_1(t_1)\right) \leq \int_{T_1} x(t_1) d\nu_1(t_1) \leq f_2^{-1}\left(\int_{T_1} f_2(x(t_1)) d\mu_1(t_1)\right),$$

откуда следует

$$\mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_1)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \nu_1, I)}(x(\cdot)) \leq \mathfrak{M}_{(T_1, \mu_1, f_2)}(x(\cdot)).$$

Общий результат (14) является неравенством той же природы, что и неравенство Стеффенсена [6], а также включает в себя известную лемму Пирсона [2, с. 170]. Убедимся в этом. Рассмотрим следствия из теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в теореме 4 ядро функции $x(t_1)$ представимо в виде

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_2 \in T_\alpha, \quad T_\alpha \subset T_2, \\ 0, & t_2 \notin T_\alpha. \end{cases}$$

Тогда

$$x(t_1) = \int_{T_\alpha} 1 \cdot d\mu_2(t_2) \quad \forall t_1 \in T_1.$$

Правая часть условия (13) при таком предположении преобразуется следующим образом:

$$\int_{T_1} 1 \cdot d\nu_1(t_1) \leq f_2^{-1} \left(\int_{T_1} f_1(1) d\mu_1(t_1) \right),$$

т.е. $\nu_1(T_1) \leq \mu_1(T_1)$, или можем положить $\nu_1(T_1) = \mu_1(T'_1)$, $T'_1 \subset T_1$.

При перечисленных условиях правая часть общего неравенства (14) примет вид

$$\int_{T_1} x(t) d\nu_1(t) = \int_{T'_1} x(t) d\mu_1(t) \leq f_2^{-1} \left(\int_{T'_1} f_2(x(t)) d\mu_1(t) \right), \quad T'_1 \subset T_1,$$

или при $d\nu_1(t) = y(t) d\mu_1(t)$, $0 \leq y(t) \leq 1 \quad \forall t \in T_1$, имеет место неравенство

$$\int_{T_1} x(t)y(t) d\mu_1(t) \leq f_2^{-1} \left(\int_{T'_1} f_2(x(t)) d\mu_1(t) \right), \quad T'_1 \subset T_1.$$

Итак, неравенство справедливо для функций $x(\cdot)$, представимых в виде

$$x(t) = \int_{T_\alpha} d\mu_2(t_2), \quad T_\alpha \subset T_2 \quad \forall t \in T_1,$$

при выполнении условия $\mu_1(T'_1) = \nu_1(T_1) = a$, иными словами,

$$\int_{T_1} d\nu_1(t) = \int_{T'_1} y(t) d\mu_1(t) = a, \quad 0 \leq y(t) \leq 1,$$

для выпуклой функции f_2 и $(f_2 \circ x)(\cdot) \in L_1(T'_1, \mu_1)$.

Из неравенства (14) при $f_2(u) = u$ следует лемма Пирсона. Приведем ее.

ЛЕММА (Пирсон [2, с. 170]). Пусть (T, Σ, μ) – пространство с положительной мерой μ , $x(\cdot) \geq 0$, $x(\cdot) \in L_1(T, \mu)$, $T_\alpha \subset T$, $T_\alpha = \{t \mid x(t) \geq \alpha\}$, $\mu(T_\alpha) = a$, $0 \leq y(t) \leq 1 \quad \forall t \in T$,

$$\int_T y(t) d\mu(t) = a.$$

Тогда

$$\int_T x(t)y(t) d\mu(t) \leq \int_{T_\alpha} x(t) d\mu(t).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в теореме 4 $T_1 = T_2 = [0; a]$, ядро в представлении $x(\cdot)$ равно

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_2 \leq t_1, \\ 0, & t_2 > t_1 \end{cases} \quad \forall t_1 \in [0; a],$$

т.е.

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} 1 \cdot d\mu_2(t).$$

Пусть $d\mu_1(t) = dt$, $d\mu_2(t) = y(t) dt$, $0 \leq y(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0; a]$. Тогда из условия (13) $\forall t \in [0; a]$ имеем

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \leq f_1^{-1} \left(\int_0^t f_1(\tau) d\tau \right),$$

откуда

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \leq \int_0^t d\tau.$$

При $t = a$ получаем

$$\int_0^a y(\tau) d\tau \leq a,$$

а из общего неравенства (14) (правая часть) следует

$$\int_0^a x(t)y(t) dt \leq f_2^{-1} \left(\int_0^c f_2(x(t)) dt \right), \quad \text{где } c = \int_0^a y(t) dt,$$

или

$$\int_0^a x(t)Y'(t) dt \leq f_2^{-1} \left(\int_0^{Y(a)} f_2(x(t)) dt \right), \quad Y(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Последняя оценка включает в себя неравенства Стеффенсена ($f_2(u) = u$) [6], Беллмана ($f_2(u) = u^p$, $p \geq 1$) [2, с. 75], Годуновой ($f_2(u) = u^p$, $p \geq 1$) [3], Пекарича ($f_2(u) = u^p$, $p \geq 1$) [5] для более широкого, чем у названных авторов, класса функций $x(\cdot)$:

$$x(\cdot) = \int_0^t d\mu_2(t) \quad \forall t \in [0; a],$$

где μ_2 – положительная мера, $x(\cdot) \in L_p([0; a], \mu_2)$ и

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \leq t \quad \forall t \in [0; a],$$

вместо того, что $x(\cdot)$ убывающая и $0 \leq y(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0; a]$.

ТЕОРЕМА (Пекарич). Пусть $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – невозрастающая функция, $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $0 \leq g(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0; 1]$. Если $p \geq 1$, $\lambda = (\int_0^1 g(t) dt)^p$, то

$$\left(\int_0^1 g(t) f(t) dt \right)^p \leq \int_0^\lambda (f(t))^p dt$$

и

$$\left(\int_0^1 g(t) f(t) dt \right)^p / \int_0^1 g(t) dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda f(t) dt.$$

Некоторые частные случаи общих неравенств. Покажем, что общие результаты включают классические неравенства и другие известные оценки. Применим теорему 1. Пусть (T_2, Σ_2, μ_2) – пространство с конечной положительной мерой, а пространство (T_1, Σ_1, μ_1) состоит из конечного числа точек с мерами $\mu_1 \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. Тогда при $f_2(u) = f_3(u) = f_4(u) = u$, вогнутой f_1 (условие (1) выполняется по теореме Иессена, а условие (2) обращается в равенство) из общего неравенства (3) следуют

- 1) неравенство Гёльдера, если положить $f_1(u) = \ln u$, $x_i(t) = |y_i(t)| / \|y_i(t)\|_{L_1(T, \mu)}$;
- 2) неравенство Минковского, если положить $f_1(u) = u^{1/p}$, $p > 1$,

$$\mu_i = \frac{\|y_i(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}}{\sum_{i=1}^n \|y_i(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}}, \quad x_i(t) = \frac{|y_i(t)|^p}{\|y_i(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}^p};$$

- 3) неравенство Годуновой, если положить $|x_i(t)| = |y_i(t)| / \|y_i(\cdot)\|_{L_p(T, \mu)}$.

Как частный случай теоремы 1 выведем аналог неравенства Минковского для $x(\cdot) \in L_{pp}(T_1 \times T_2, \mu_1 \times \mu_2)$:

$$\left\| \int_{T_1} |x(\cdot)| d\mu_1(t_1) \right\|_{L_p(T_2, \mu_2)}^p \leq \int_{T_1} \|x(\cdot)\|_{L_p(T_2, \mu_2)}^p d\mu_1(t_1). \quad (15)$$

Он получается, если (T_1, Σ_1, μ_1) – пространство с вероятностной мерой, (T_2, Σ_2, μ_2) – пространство с конечной положительной мерой μ_2 и $f_1(u) = u$, $f_2(u) = f_3(u) = f_4(u) = u^p$, $p > 1$. При тех же предположениях условие (1) теоремы 1 справедливо по теореме Иессена, а условие (2) обращается в равенство, поэтому из общего неравенства (4) имеем (15).

Пусть в теореме 1 (T_1, Σ_1, μ_1) – вероятностное пространство, а (T_2, Σ_2, μ_2) – пространство с конечной положительной мерой, тогда при $f_2(u) = f_3(u) = f_4(u) = u$, $f_1(u) = \ln u$ получаем из (3) обобщенное неравенство Гёльдера, приведенное в монографии А. Маршалла и И. Олкина [7, с. 464–465].

Автор благодарен профессору В. М. Тихомирову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [2] Беллман Р., Бекенбах Э. Неравенства. М.: Мир, 1965.
- [3] Годунова Е.К. Неравенства с выпуклыми функциями. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГПИ, 1965.
- [4] Годунова Е.К., Левин В.И. Общий класс неравенств, содержащий неравенство Стеффенсена // Матем. заметки. 1968. Т. 3. №3. С. 339–344.
- [5] Pecaric J. On the Bellman generalization of Steffensen's inequality // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 88. №2. P. 505–507.
- [6] Steffensen J. Bounds of certain trigonometric integrals // 10th Scandinavian Math. Congress. 1945. P. 181–186.
- [7] Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажорации и ее приложения. М.: Мир, 1983.
- [8] Садикова Р.Х. Общий класс неравенств, содержащий неравенство Стеффенсена и его обобщения // Изв. вузов. Матем. 1980. №4. С. 79–80.
- [9] Садикова Р.Х. Неравенства с обобщенными средними // Деп. Изв. вузов. Матем. 1981. №1456.
- [10] Садикова Р.Х. Общий класс неравенств с обобщенными средними // Деп. Изв. вузов. Матем. 1983. №2631-84.
- [11] Садикова Р.Х. Общий класс неравенств с точными константами. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: Университет дружбы народов, 1990.
- [12] Садикова Р.Х. Сравнение смешанных обобщенных средних // Деп. Изв. вузов. Матем. 1975. №3439.
- [13] Shisha O., Cargo G. On comparable means // Pacif. J. Math. 1964. V. 4. №3. P. 1053–1059.
- [14] Cooper R. Notes on certain inequalities. I // J. London Math. Soc. 1927. №2. P. 17–21; II // J. London Math. Soc. 1927. №2. P. 156–163.