Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, Оценки числа независимости гиперграфа и гипотеза Райзера, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 873–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:03:26

УДК 519.17

ОЦЕНКИ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ ГИПЕРГРАФА И ГИПОТЕЗА РАЙЗЕРА

В. Е. Тараканов

Пусть H – гиперграф с n вершинами, m ребрами, числом вершин в ребре не больше $r \geq 2$ и степенью вершины $\delta \geq 2$; $\tau(H)$ – его трансверсальное число, $\mu(H)$ – число независимости (максимальное число попарно не пересекающихся ребер с r вершинами в ребре). Известная оценка $\mu \geq (\delta n - (r-1)m)/(\delta r - r + 1)$ усиливается в случае, когда H – псевдограф с максимальной степенью вершины Δ при $2\delta - 2 \geq \Delta$ (аналог соответствующего результата для графов), и применяется для доказательства известной гипотезы Райзера для r -дольных r -равномерных гиперграфов H : $\tau(H) \leq (r-1)\mu(H)$, а именно, устанавливается справедливость этого неравенства в случае, когда H δ -регулярен, $2 \leq \delta \leq r-1$.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть V – конечное множество с n элементами и E – система из m его подмножеств. В этом случае говорим о *гиперграфе* $H = (V, E)$ с n вершинами (элементами из V) и m ребрами (подмножествами из E). Обозначим через $r = r(H)$ максимальное число вершин в ребре гиперграфа H . Через $\delta = \delta(H)$ обозначим число ребер, которым может принадлежать вершина гиперграфа H (т.е. минимальную степень вершины в H). *Числом независимости* гиперграфа H называется наибольшее возможное число $\mu(H)$ попарно не пересекающихся ребер с r вершинами. (Совокупность попарно не пересекающихся ребер мощности r называется *паросочетанием* (matching) в H , а $\mu(H)$ иногда называют *числом паросочетания*.) Это число является существенной характеристикой гиперграфа и играет значительную роль в экстремальной теории гиперграфов. Поэтому представляют интерес нижние границы этого числа для классов гиперграфов, выделяемых тем или иным условием относительно его параметров. Другие структурные константы, интенсивно исследуемые в экстремальной теории гиперграфов, – это

- 1) *реберное число покрытия* $\varepsilon(H)$ – минимальное число ребер, объединение которых совпадает с V , и
- 2) *трансверсальное число* $\tau(H)$ – минимальное число вершин в таком подмножестве $T \subseteq V$, что любое число ребер содержит вершину из T (такое множество T называют *трансверсалью*).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00531.

С гиперграфом $H = (V, E)$ связывается $(0, 1)$ -матрица $A(H)$ – его матрица инцидентности. Пусть элементы множества V и подмножества системы E как-либо перенумерованы:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \quad E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}.$$

Тогда $A(H) = (a_{ij})$ есть матрица размера $m \times n$, т.е. с m строками и n столбцами, такая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_j \in E_i, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

имеем также $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq r$, $i = 1, 2, \dots, m$. Матрица инцидентности определяется гиперграфом с точностью до перестановочной эквивалентности, т.е. каждому гиперграфу H соответствует класс $(0, 1)$ -матриц, каждая из которых получается из другой перестановками строк и столбцов; любую из этих матриц можно рассматривать как матрицу инцидентности $A(H)$ гиперграфа H . Структурным константам гиперграфа H соответствуют инварианты матрицы $A(H)$ относительно перестановочной эквивалентности. Так $\varepsilon(H)$ есть не что иное, как глубина ε_A матрицы $A = A(H)$, т.е. наименьшее возможное число строк в $A(H)$ таких, что сумма элементов в каждом столбце образованной ими подматрицы положительна. Число $\tau(H)$ есть ширина A , т.е. наименьшее число столбцов в A таких, что сумма элементов в каждой строке образованной ими подматрицы положительна.

Определим *строчный i -ранг*, или просто *i -ранг*, $(0, 1)$ -матрицы A с максимальным числом r единиц в строке как наибольшее возможное число попарно ортогональных строк с r единицами (строки при этом понимаются как n -мерные действительные векторы, n – число столбцов в A). Число независимости $\mu(H)$ гиперграфа H равно величине строчного i -ранга его матрицы инцидентности $A(H)$, и всякая оценка снизу i -ранга $A(H)$ есть оценка для $\mu(H)$.

В работах [1], [2] нами фактически была получена следующая оценка снизу числа независимости $\mu(H)$ гиперграфа H .

ТЕОРЕМА А. Пусть $H = (V, E)$ – гиперграф на множестве V из n элементов, m – число его ребер, r – наибольшее число вершин в ребре. Тогда

$$\mu(H) \geq \frac{\delta n - (r-1)m}{\delta r - r + 1}, \quad (1)$$

где $\delta \geq 2$ – наименьшая степень вершины в H .

Ясно, что оценка (1) справедлива для *r -равномерных* гиперграфов, т.е. таких, у которых все ребра состоят из одинакового числа r вершин (их называют также *r -графами*). Оценка (1) была получена в матричных терминах. Она позволила развить метод изучения глубины $(0, 1)$ -матриц (т.е. реберного числа покрытия гиперграфа) и дать для нее точные и асимптотические оценки [1], [2].

Различные применения в экстремальной теории гиперграфов делают актуальной задачу уточнения оценки (1) в тех или иных частных случаях. В п. 2 мы получим такую улучшенную оценку для случая, когда H – псевдограф при заданной наименьшей δ и наибольшей Δ степени его вершины. Такого рода оценки числа независимости изучались для графов (см. [3, гл. 2]). Полученные нами границы – это обобщение некоторых из этих границ.

Гиперграф H называется δ -регулярным, если всякая его вершина принадлежит в точности δ ребрам. Пусть $|X|$ обозначает число элементов в множестве X . Если в r -графе $H = (V, E)$ (т.е. в r -равномерном гиперграфе) множество вершин может быть разбито на r равномошных подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_r$ таким образом, что $|e \cap V_i| = 1$ для любого ребра $e \in E, i = 1, \dots, r$, то H называется r -дольным r -графом. Гипотеза Райзера для r -дольных r -графов заключается в предположении, что для таких графов справедливо следующее неравенство:

$$\tau(H) \leq (r-1)\mu(H). \quad (2)$$

Этой гипотезе посвящен ряд работ (см., например, [4], [5]). Она доказана лишь для небольших значений $\mu(H)$; известны [5] также некоторые оценки вида $\tau(H) \leq \alpha\mu(H)$, $2 < \alpha < 3$, при $r = 3$. Мы используем для рассмотрения гипотезы Райзера оценку (1) и в п. 3 с ее помощью покажем справедливость этой гипотезы в классе δ -регулярных r -графов при $2 \leq \delta \leq r-1$. Мы получим также оценку

$$\tau(H) \leq \left(r-1 + \frac{1}{r}\right)\mu(H)$$

(r произвольно) для r -дольных r -графов с $\Delta \leq r$ и числом ребер, равным числу вершин.

2. i -каноническая форма матрицы инцидентности псевдографа и оценки его числа независимости. Псевдограф определяется аналогично графу, с той разницей, что в нем допускаются петли и кратные ребра. Мы получим в этом пункте оценки снизу числа независимости для псевдографа H с $\delta \geq 2$. Эти оценки, в отличие от общей оценки (1) для гиперграфов, учитывают не только минимальную величину δ , но также максимальную величину Δ степени вершины. При $\Delta = \delta$ они улучшают (1). При выводе оценок мы используем матрицу инцидентности псевдографа, оценивая фактически ее строчный i -ранг. Если H – псевдограф с n вершинами, m ребрами, то его матрица инцидентности $A(H)$ – это $(0, 1)$ -матрица размера $m \times n$, все ее строчные суммы не превосходят 2. Пусть r, δ – натуральные числа. Класс всех $(0, 1)$ -матриц размера $m \times n$ со строчными суммами, не превосходящими r , и столбцовыми суммами, не меньшими δ , обозначим $\mathfrak{A}^{m,n} (\leq r, \geq \delta)$.

Введем еще несколько определений. Пусть A – действительная неотрицательная матрица размера $m \times n$ и r – максимальное число положительных элементов в ее строке, $0 \leq r \leq n$. Вектор-строки $l_1, l_2, \dots, l_k$ матрицы A называются *независимыми*, если скалярные произведения $(l_i, l_j) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$. Если A – матрица инцидентности гиперграфа H , то совокупности ее независимых строк отвечает совокупность независимых ребер в H . *Строчным i -базисом* ненулевой неотрицательной матрицы A назовем всякое максимальное по мощности множество ее независимых строк, каждая из которых имеет наибольшее возможное число положительных элементов. *Строчный i -ранг* $\mu(A)$ матрицы A определяется как число строк в ее строчном i -базисе (см. п. 1). Пусть $\mu(A) = 0$ для нулевой матрицы A . Очевидно, что $\mu(A)$ не превосходит граничного ранга $\rho(A)$ неотрицательной матрицы A (определяется аналогично граничному рангу $(0, 1)$ -матрицы, см. [6]), а также ее ранга как матрицы над полем.

Рассмотрим теперь некоторое стандартное представление матрицы инцидентности $A(H)$ псевдографа H с n вершинами и m ребрами (см. [2]), которое назовем ее i -канонической формой. Матрица $A(H)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, \geq \delta)$, если δ – минимальная степень вершины в псевдографе. Представление, о котором идет речь, достигается перестановками строк и столбцов, приводящими к разбиению $A(H) = A$ на три горизонтальные полосы $(A)_1, (A)_2, (A)_3$. Пусть в псевдографе H имеется ребро, не являющееся петлей. Возьмем в A какой-либо i -базис $\mathcal{L}$, состоящий из μ строк с суммой 2, где μ – (строчный) i -ранг A . В $(0, 1)$ -матрице $A = (a_{ij})$ считаем, что строка i покрывает столбец j , если $a_{ij} = 1$. Переместим строки из $\mathcal{L}$ и покрытые ими столбцы на первые места. Образованную этими строками подматрицу размера $\mu \times n$ обозначим через $(A)_1$. Так как $\mathcal{L}$ – i -базис, то подматрица, образованная теперь последними $n - \mu$ строками и последними $n - 2\mu$ столбцами, имеет в каждой строке не более одной единицы. Рассмотрим далее все строки матрицы, покрывающие столбцы с номерами $n - 2\mu + 1, n - 2\mu + 2, \dots, n$. Для каждого из этих столбцов берем по порядку все покрывающие его строки и располагаем их подряд. Образованную таким способом подматрицу обозначим через $(A)_2$. Пусть m_2 – число строк в $(A)_2$. Если степень вершины в H есть число из отрезка $[\delta, \Delta]$, то, очевидно, $\delta(n - 2\mu) \leq m_2 \leq \Delta(n - 2\mu)$. Пусть последние $m_3 = m - (\mu + m_2)$ строки образуют подматрицу $(A)_3$. Из построения ясно, что $(A)_1$ соответствуют ребра некоторого максимального паросочетания $\mathcal{L}$ псевдографа, $(A)_2$ – все ребра, проходящие через вершины, не принадлежащие ребрам из $\mathcal{L}$, и $(A)_3$ – ребра, не входящие в $\mathcal{L}$, но соединяющие вершины, принадлежащие ребрам из $\mathcal{L}$. Подматрицу $(A)_2$ мы далее подразделяем на горизонтальные отсеки $(A)_2^j$, каждый из которых состоит из строк, покрывающих один и тот же из последних $n - 2\mu$ столбцов, $j = n - 2\mu + 1, \dots, n$. Подматрица $(A)_2$ пуста, если $\mu = n/2$. Описанное представление матрицы инцидентности $A(H)$ псевдографа H называется ее (строчной) i -канонической формой.

В этом пункте мы рассматриваем псевдографы $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, с фиксированными минимальными δ и максимальными Δ степенями вершин. Соответствующий подкласс $(0, 1)$ -матриц, которому принадлежат матрицы инцидентности таких псевдографов, состоит из матриц размера $m \times n$, у которых строчные суммы не превосходят 2, а все столбцовые суммы принадлежат фиксированному отрезку $[\delta, \Delta]$. Такой подкласс обозначим через $\mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$. Мы фактически оценим снизу строчный i -ранг матрицы из $\mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$. Будем рассматривать матрицы из этого класса в i -канонической форме. Найдем сначала некоторые свойства таких матриц.

Предполагаем в дальнейшем, что A – матрица из $\mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$ в i -канонической форме при заданном i -базисе $\mathcal{L}$. Если l – строка в A с двумя единицами, то покрытые ею столбцы обозначаем $c^1(l), c^2(l)$; строку l из $\mathcal{L}$ назовем *строкой типа T_γ* , если в $(A)_3$ имеется в точности γ единиц, принадлежащих столбцам $c^1(l), c^2(l)$. Существуют две возможности:

- 1) оба столбца имеют единицы в $(A)_2$;
- 2) по крайней мере, один из них не имеет единиц в $(A)_2$.

В соответствии с этим строку l из $\mathcal{L}$ типа T_γ будем называть *строкой типа $T_\gamma^{(1)}$ и $T_\gamma^{(2)}$* (или просто *типа $T^{(1)}$ и типа $T^{(2)}$* , если значение γ для нас несущественно). В этом же смысле будем говорить о T_γ -строке, $T_\gamma^{(1)}$ - или $T_\gamma^{(2)}$ -строке, $T^{(1)}$ - или $T^{(2)}$ -строке. Столбец, покрытый строкой $l \in (A)_1$, назовем *длинным*, если он не имеет единиц в $(A)_2$,

и коротким – в противном случае. Ясно, что у $T^{(1)}$ -строки оба столбца короткие, а у $T^{(2)}$ -строки хотя бы один столбец длинный.

ЛЕММА 1. Пусть $l \in \mathcal{L}$ – $T^{(1)}$ -строка. Тогда все единицы столбцов $c^1(l)$ и $c^2(l)$, расположенные в $(A)_2$, сосредоточены в каком-либо одном отсеке этой подматрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда по определению $T^{(1)}$ -строки в $(A)_2$ найдутся две строки t_1 и t_2 такие, что t_1 покрывает $c^1(l)$, t_2 покрывает $c^2(l)$ и $(t_1, t_2) = 0$. Таким образом, строки в множестве $(\mathcal{L} - \{l\}) \cup \{t_1, t_2\}$ независимы. Это противоречит тому, что $\mathcal{L}$ – i -базис.

ЛЕММА 2. Каждая строка l i -базиса $\mathcal{L}$ имеет тип T_γ , где $2\Delta - 2 \geq \gamma \geq \max\{0, 2\delta - \Delta - 2\}$. Если $\gamma = 2\delta - \Delta - 2 > 0$ и l – T_γ -строка, то она $T^{(1)}$ -строка и столбцы $c^1(l)$, $c^2(l)$ имеют в $(A)_2$ в общей сложности Δ единиц, которые все сосредоточены в одном отсеке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $A \in \mathfrak{A}(\leq 2, [\delta, \Delta])$, имеем $\gamma + 2 \leq 2\Delta$ и $\gamma \leq 2\Delta - 2$. С другой стороны, $c^1(l)$ и $c^2(l)$ вместе имеют не менее 2δ единиц, из которых в $(A)_2$ расположены $2\delta - 2 - \gamma$ единиц. Наибольшее число единиц этих столбцов, которые могут “уместиться” в одном отсеке, равно Δ . Если бы выполнялось $2\delta - 2 - \gamma > \Delta$, то какая-либо пара единиц, одна из которых принадлежит $c^1(l)$, а другая – $c^2(l)$, находились бы в разных отсеках подматрицы $(A)_2$. Тогда, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1, мы пришли бы к противоречию с тем, что $\mathcal{L}$ – i -базис. Итак, $2\delta - \gamma - 2 \leq \Delta$ и $\gamma \geq 2\delta - \Delta - 2$. Пусть теперь $2\delta - \Delta - 2 > 0$ и $\gamma = 2\delta - \Delta - 2$. Если бы один из покрытых строкой l типа T_γ столбцов был длинным, т.е. все его единицы принадлежали бы $(A)_3$, то мы имели бы $\delta - 1 \leq \gamma = 2\delta - \Delta - 2$, т.е. $\delta \geq \Delta + 1$, что невозможно. Таким образом, l – $T^{(1)}$ -строка, и по лемме 1 все $2\delta - 2 - \gamma = \Delta$ единиц столбцов $c^1(l)$, $c^2(l)$, находящихся в $(A)_2$, сосредоточены в одном отсеке.

Для натурального числа v назовем строки l и l' i -базиса $\mathcal{L}$ v -связанными, если в $(A)_3$ существует в точности v строк t со свойством $(l, t) = (l', t) = 1$.

ЛЕММА 3. Пусть l, l_1 – две строки i -базиса $\mathcal{L}$. Положим $\gamma = 2\delta - \Delta - 2$ и предположим, что $\gamma > 0$ и l – T_γ -строка, l_1 – T_{γ_1} -строка, где $\gamma_1 \leq 2\delta - 3$. Если строки l и l_1 v -связаны, то l_1 – $T^{(2)}$ -строка и все v строк, связывающих l и l_1 , покрывают короткий столбец строки l_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\gamma_1 < 2\delta - 2$, то хотя бы один из столбцов $c^1(l_1)$, $c^2(l_1)$ короткий, скажем, столбец $c^1(l_1)$. Допустим, что существует связующая строка t , которая покрывает $c^2(l)$ и $c^2(l_1)$. По лемме 2 l – $T^{(1)}$ -строка, и все Δ принадлежащих $(A)_2$ единиц обоих столбцов, покрытых строкой l , лежат в одном отсеке $(A)_2^j$ подматрицы $(A)_2$. Пусть единица короткого столбца $c^1(l_1)$ лежит в отсеке $(A)_2^j$. Имеем $j_1 \neq j$. Тогда, очевидно, в $(A)_2$ найдутся такие две ортогональные строки u , u_1 , что u принадлежит $(A)_2^j$ и покрывает $c^1(l)$, u_1 лежит в $(A)_2^{j_1}$ и покрывает $c^1(l_1)$. Следовательно, множество $(\mathcal{L} - \{l, l_1\}) \cup \{t, u, u_1\}$ состоит из попарно ортогональных строк. Но $\mathcal{L}$ – это i -базис, и мы приходим к противоречию.

ЛЕММА 4. Пусть $\gamma = 2\delta - \Delta - 2 > 0$ и l – T_γ -строка, v -связанная с T_{γ_1} -строкой l_1 . Тогда $\gamma_1 \geq v + \delta - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_1 \leq 2\delta - 3$. Тогда по лемме 3 $l_1 - T^{(2)}$ -строка, и ее короткий столбец содержит не менее v единиц в $(A)_3$. Поэтому $\gamma \geq v + \delta - 1$.

Пусть $\gamma_1 \geq 2\delta - 2$. Тогда в $(A)_3$ находится, помимо v , еще не меньше $2\delta - 2 - v$ единиц столбцов, покрываемых l_1 . Но $v \leq \gamma \leq 2\delta - \Delta - 2$ и $2\delta - 2 - v \geq \Delta > \delta - 1$, т.е. $\gamma_1 \geq 2\delta - 2 > v + \delta - 1$.

Полученные результаты дают возможность оценить снизу число единиц в подматрице $(A)_3$ матрицы $A \in \mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$, заданной в i -канонической форме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n, \delta, \Delta, 2 \leq \delta \leq \Delta$, — натуральные числа, H — псевдограф с n вершинами, m ребрами, у которого степень $d(x)$ — число из отрезка $[\delta, \Delta]$ для всякой вершины x . Пусть, далее, $A(H)$ — матрица инцидентности H , μ — его число независимости. Тогда $A(H)$ эквивалентна матрице A в i -канонической форме, у которой

1) при любом Δ

$$\sigma_1((A)_3) \geq \mu(2\delta - \Delta - 2), \quad (3)$$

2) при нечетном Δ

$$\sigma_1((A)_3) \geq \mu(2\delta - \Delta - 1), \quad (4)$$

где $\sigma_1(X)$ — число единиц в матрице X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $A(H) \in \mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$ и μ — строчный i -ранг любой матрицы, эквивалентной $A(H)$. Если $2\delta - \Delta - 2 \leq 0$, то (3) и (4) выполняются тривиальным образом. Поэтому далее предполагаем, что $2\delta - \Delta - 2 > 0$. Возьмем сначала произвольный строчный i -базис $\mathcal{L}$ в $A(H)$ и указанным выше способом перейдем от $A(H)$ к эквивалентной ей матрице A в i -канонической форме относительно $\mathcal{L}$. Неравенство (3) следует непосредственно из леммы 2. Предполагаем далее, что Δ нечетно. Обозначим $2\delta - \Delta - 2$ через γ . Если $\mathcal{L}$ не содержит T_γ -строки, то (4) следует из леммы 2. Поэтому предполагаем, что $\mathcal{L}$ содержит T_γ -строку l . По лемме 2 столбцы $c^1(l), c^2(l)$ имеют в $(A)_2$ в общей сложности Δ единиц, которые находятся в одном отсеке $(A_2)^j, n - 2\mu + 1 \leq j \leq n$. Обозначим через s столбец с номером j . Не уменьшая общности, можем предположить, что покрывающие s строки $t_1, t_2, \dots, t_\Delta$ расположены так, что $c^1(l)$ имеет единицы в строках $t_1, t_2, \dots, t_h$, а $c^2(l)$ — в строках $t_{h+1}, \dots, t_\Delta$ отсека $(A)_2^j$, при этом $h \geq (\Delta + 1)/2$.

Строки в $(A)_3$, покрывающие $c^2(l)$, обозначим $t'_1, t'_2, \dots, t'_{h'}$. Так как число единиц в столбце не меньше δ , имеем $h' \geq \delta - 1 - (\Delta - h) = h + \delta - \Delta - 1$. Покажем теперь, что

$$0 < h' < h. \quad (5)$$

Пусть от противного $h' \leq 0$. Тогда имеем

$$h \leq \Delta + 1 - \delta \implies \frac{\Delta + 1}{2} \leq \Delta + 1 - \delta \implies 2\delta - \Delta - 1 \leq 0.$$

Но по предположению $0 < 2\delta - \Delta - 2$, т.е. $2\delta - \Delta - 1 > 1$. Мы приходим к противоречию. Итак, $0 < h' \leq \gamma = 2\delta - \Delta - 2$. Далее, $h' + 1 + \Delta - h \geq \delta$, следовательно, $h' \leq h + \delta - \Delta - 1 < h$. Оба неравенства в (5) доказаны.

Для иллюстрации наших обозначений и построений можно, например, рассмотреть следующий чертеж, относящийся к случаю $\delta = \Delta = 5, \gamma = 3, h = 3, h' = 2$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & c^1(l) & c^2(l) & c & \\
 & l & 1 & 1 & \\
 (A)_2^j \left\{ \begin{array}{l} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{array} \right. & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \\ \end{array} & & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & . \\
 & t'_1 & 1 & 1 & \\
 & t'_2 & & 1 &
 \end{array}$$

Проведем следующие преобразования в A :

- 1) поменяем местами столбцы c и $c^2(l)$;
- 2) поменяем местами строки l и t_h ;
- 3) поменяем местами строки $t_1, t_2, \dots, t_{h'}$ и $t'_1, t'_2, \dots, t'_{h'}$ (напомним, что $h' < h$, см. (5));
- 4) если $h' + 1 < h$, то строки $t_{h'+1}, t_{h'+2}, \dots, t_{h-1}$ переставим на места ниже строк, входящих в $(A)_2$.

В результате получим матрицу, у которой

- а) на месте строки l вновь будет строка с двумя единицами на тех же местах;
- б) на месте столбца c будет столбец с идущими подряд $\Delta - (h - h' - 1)$ единицами;
- в) покрытые новой строкой l столбцы имеют в $(A)_3$ не менее

$$2h' \geq 2(h + \delta - \Delta - 1) \geq 2 \frac{\Delta + 1}{2} + 2\delta - 2\Delta - 2 = 2\delta - \Delta - 1$$

единиц, т.е. строка l теперь имеет тип T_{γ_1} с $\gamma_1 \geq 2\delta - \Delta - 1$.

Покажем, что проведенные преобразования не могут привести к появлению новой T_γ -строки. Действительно, помимо $c^1(l)$, $c^2(l)$ и c преобразования затрагивают лишь столбцы, покрытые строками, связанными со строкой l . Пусть l' была v -связана с l . Тогда по лемме 4 l' есть $T_{\gamma'}$ -строка с $\gamma' \geq v + \delta - 1$. В результате преобразований из $(A)_3$ в $(A)_2$ могут переместиться не более v единиц столбцов $c^1(l')$, $c^2(l')$. Поэтому l' становится строкой типа $T_{\gamma'_1}$ с $\gamma'_1 \geq \gamma - v \geq \delta - 1 \geq 2\delta - \Delta - 1$. Таким образом, новой T_γ -строки не появляется, и мы пришли к новому i -базису, для которого число T_γ -строк на одну меньше, чем в прежнем. Поступая так же поочередно с каждой из оставшихся T_γ -строк, мы придем, наконец, к i -базису без T_γ -строк. Для этого i -базиса $\sigma_1((A)_3) \geq \mu(2\delta - \Delta - 1)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H – псевдограф с матрицей инцидентности $A = A(H) \in \mathfrak{A}^{m,n}$ ($\leq 2, [\delta, \Delta]$) и числом независимости μ . Тогда в i -канонической форме A число строк m_3 в подматрице $(A)_3$ не меньше, чем $\mu(2\delta - \Delta - 2)/2$, а если Δ нечетно, то существует такой i -базис (т.е. такое паросочетание в псевдографе), что в i -канонической форме относительно этого базиса $m_3 \geq (2\delta - \Delta - 1)/2$.

Теперь мы можем получить нижнюю границу числа независимости псевдографа.

ТЕОРЕМА 2. Пусть H – псевдограф с n вершинами, m ребрами, максимальной степени вершины Δ и минимальной степени вершины δ , μ – его (реберное) число независимости. Предположим, что $\delta \geq (\Delta + 2)/2$. Тогда если Δ нечетно, то

$$\mu(H) \geq \frac{2}{2\delta + \Delta - 1}(\delta n - m); \quad (6)$$

при четном Δ справедливо неравенство

$$\mu(H) \geq \frac{2}{2\delta + \Delta}(\delta n - m). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A(H)$ – матрица инцидентности псевдографа H . Тогда $A(H) \in \mathfrak{A}^{m,n} (\leq 2, [\delta, \Delta])$ и ее i -ранг равен μ . Пусть A – i -каноническая форма $A(H)$ относительно i -базиса $\mathcal{L}$. При нечетном Δ предположим, что $\mathcal{L}$ взят таким образом, чтобы для числа единиц в подматрице $(A)_3$ матрицы A выполнялось неравенство (4). По построению i -канонической формы число строк в $(A)_3$ не может быть больше, чем $m - \mu - \delta(n - 2\mu)$. Поэтому

$$\sigma_1((A)_3) \leq 2[\mu(2\delta - 1) - (\delta n - m)]. \quad (8)$$

Пусть Δ нечетно. Предположим от противного, что

$$\mu < \frac{2}{2\delta + \Delta - 1}(\delta n - m),$$

следовательно,

$$\delta n - m > \frac{2\delta - \Delta - 1}{2}\mu. \quad (9)$$

Оценивая $\delta n - m$ согласно (9), из (8) получаем, что

$$\sigma_1((A)_3) < (2\delta - \Delta - 1)\mu,$$

что противоречит неравенству (4) теоремы 1.

Совершенно аналогично, при Δ четном предположение о том, что

$$\mu < \frac{2(\delta n - m)}{2\delta + \Delta}$$

приводит к противоречию с неравенством (3). Теорема доказана.

Заметим, что если $\delta > (\Delta + 2)/2$, то неравенство (7) при $\delta > 2$ и неравенство (6) дают лучшие нижние границы числа независимости псевдографа, чем общая оценка (1) в теореме А. Эти границы могут быть использованы при изучении числа реберного покрытия гиперграфов при ограничениях на степени его вершин.

3. Гипотеза Райзера. В этом пункте мы применим оценку (1) числа независимости гиперграфа к изучению гипотезы Райзера для r -дольных r -графов (неравенство (2)). При $r = 2$ (т.е. для графов) это неравенство справедливо в силу классического комбинаторного результата – теоремы Кёнига–Эгервари, и гипотезу можно рассматривать как обобщение этого неравенства на r -дольные r -графы при произвольном $r \geq 2$. Неравенство (2) доказано лишь в следующих частных случаях:

- 1) $r = 3$ и $\mu(H) \leq 4$;
- 2) $r = 4$ и $\mu(H) \leq 2$;
- 3) $r = 5$ и $\mu(H) = 1$

(см. [4]). Наиболее часто рассматривался случай $r = 3$. Были получены оценки вида $\tau(H) \leq \alpha \mu(H)$, $2 < \alpha < 3$, усиливающие очевидную оценку $\tau(H) \leq 3\mu(H)$, наилучшая среди них:

$$\tau(H) \leq 2.5\mu(H) \quad (10)$$

для любого 3-дольного 3-графа H [5].

Ясно, что во всяком r -дольном r -графе с n вершинами имеются трансверсали T , состоящие из n/r вершин. Поэтому имеем неравенство

$$\tau(H) \leq \frac{n}{r} \quad (11)$$

для любого r -дольного r -графа с n вершинами. Мы будем использовать лишь эту простую оценку (11) для $\tau(H)$.

Фиксируем натуральные числа r и δ , m и n . Рассмотрим гиперграфы H с m ребрами, n вершинами, для которых $r(H) \leq r$, $\delta(H) \geq \delta$. Оценивая число единиц в матрице инцидентности такого гиперграфа, нетрудно убедиться в том, что

$$\delta n \leq rm. \quad (12)$$

Если при этом каждое ребро H состоит из r вершин и каждая вершина принадлежит в точности δ ребрам (т.е. H – δ -регулярный r -граф), то неравенство (12) обращается в равенство

$$\delta n = rm. \quad (13)$$

Матрица инцидентности δ -регулярного r -графа есть $(0, 1)$ -матрица класса $\mathfrak{A}^{m,n}(r, \delta)$, состоящего из всех $(0, 1)$ -матриц размера $m \times n$ со строчными суммами r и столбцовыми суммами δ ; нетрудно показать, что этот класс непуст при любых m, n, r, δ , для которых выполняется равенство (13). Класс δ -регулярных r -графов обозначим через $\mathcal{U}(r, \delta)$. Нетрудно убедиться, рассматривая соответствующие матрицы инцидентности, что при $r \mid n$ в $\mathcal{U}(r, \delta)$ всегда найдутся r -дольные гиперграфы. Класс r -дольных δ -регулярных r -графов обозначим через $\mathcal{PU}(r, \delta)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r \geq 3$, $\delta \geq 2$ – натуральные числа, H – гиперграф из $\mathcal{PU}(r, \delta)$, $\tau(H)$, $\mu(H)$ – соответственно трансверсальное число и число независимости гиперграфа H . Для H справедлива гипотеза Райзера

$$\tau(H) \leq (r - 1)\mu(H),$$

если только $\delta \leq r - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть гиперграф H имеет n вершин и m ребер. Тогда выполнено (13). Применяя к H теорему А, оценим снизу число независимости $\mu(H) = \mu$:

$$\mu \geq \frac{\delta n - (r-1)m}{\delta r - r + 1} = \frac{\delta n}{r(\delta r - r + 1)}. \quad (14)$$

Имеем, очевидно, $\delta r - r + 1 > 0$. Поэтому из (11) и (14) следует, что

$$\tau(H) = \tau \leq \frac{n}{r} \leq \frac{\delta r - r + 1}{\delta} \mu.$$

По условию $\delta \leq r - 1$, поэтому $\delta r - \delta \geq \delta r - r + 1$ и $(\delta r - r + 1)/\delta \leq r - 1$. Таким образом, находим, что $\tau \leq (r - 1)\mu$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть H — r -дольный r -граф с n вершинами и m ребрами и $m = n$. Предположим также, что максимальная степень Δ вершины гиперграфа H не превосходит r . Тогда для любого $r \geq 2$ справедлива оценка

$$\tau(H) \leq (r - 1)\mu(H) + \frac{\mu(H)}{r}, \quad (15)$$

где $\tau(H) = \tau$, $\mu(H) = \mu$ — соответственно трансверсальное число и число независимости гиперграфа H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ — минимальная степень вершины в H . Тогда выполнено (12). Рассмотрим матрицу инцидентности $A(H)$ гиперграфа H . Число единиц в ней равно rm , т.е. rn по условию. Отсюда следует, что $\delta \leq r$. Однако, если степень хотя бы одной вершины будет меньше, чем r , то ввиду условия $\Delta \leq r$ число единиц в матрице не может достигнуть rn . Это показывает, что $\delta = \Delta = r$ и H r -регулярен. Таким образом, оценка (1) в применении к H дает

$$\mu \geq \frac{n}{r^2 - r + 1}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{n}{r} \leq \frac{r^2 - r + 1}{r} \mu$$

и ввиду (11)

$$\tau \leq (r - 1)\mu + \frac{\mu}{r},$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Для r -дольного r -регулярного r -графа справедливо

$$\tau(H) = (r - 1)\mu(H),$$

если $n < r^2$, где n — число вершин в H .

Действительно, в этом случае $\mu < r$, $\mu/r < 1$.

Заметим, что при $r = 3$ из (15) получается оценка $\tau(H) \leq (2 + 1/3)\mu(H)$, улучшающая для гиперграфов из $\mathcal{P}\mathcal{U}(3, 3)$ общую оценку (10) для произвольного 3-регулярного 3-графа.

В заключение сделаем еще два замечания, касающиеся общего случая.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно заметить, что для нерегулярных r -дольных r -графов H с n вершинами и m ребрами, у которых отношение m/n достаточно близко к $\delta(H)/r(H)$, с помощью (1) также получаются оценки вида $\tau \leq \alpha \mu$ с $r - 1 < \alpha < r$. Так, например, для 3-дольных 3-графов при $\delta = 2$ и $2/3 < m/n < 11/15$ находим, что $\tau \leq \alpha \mu$ с $\alpha < 2.5$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При рассмотрении r -дольных r -графов $H = (V, E)$ с $|V| = n$ мы использовали лишь наиболее простые, заведомо существующие в каждом таком гиперграфе трансверсали T с $|T| = n/r$. Существование трансверсали T с $|T| = \beta n$, $\beta < 1/r$, дает возможность с помощью (1) получать более точные оценки трансверсального числа через число независимости.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
19.09.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тараканов В. Е. О максимальной глубине одного класса $(0, 1)$ -матриц // Матем. сб. 1968. Т. 75(117). С. 4–14.
- [2] Тараканов В. Е. Максимальная глубина произвольных классов $(0, 1)$ -матриц и некоторые ее применения // Матем. сб. 1973. Т. 92(134). С. 472–490.
- [3] Bollobás B. Extremal graph theory. London: Acad. Press, 1978.
- [4] Tuza Zs. Ryser's conjecture for transversals of r -partite hypergraphs // Ars Combin. 1983. V. 16 (B). P. 201–209.
- [5] Haxell P. E. A note on a conjecture of Ryser // Period. Math. Hungar. 1995. V. 30. № 1. P. 73–79.
- [6] Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.