Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, О примитивных элементах свободных групп многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_n$, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 884–889

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:35:19

УДК 512.54

О ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ СВОБОДНЫХ ГРУПП МНОГООБРАЗИЙ $\mathfrak{M}_n$

Е. И. Тимошенко

Для групп вида F/N' находятся необходимые и достаточные условия, чтобы элемент $g \in N/N'$ принадлежал нормальному замыканию элемента $h \in F/N'$. Доказывается, что в отличие от свободной метабелевой группы для свободной группы многообразия $\mathfrak{M}_2$ существует элемент h , нормальное замыкание которого содержит примитивный элемент g , но элементы h и $g^{\pm 1}$ не сопряжены. В группе $F(\mathfrak{M}_2)$ выбраны два несопряженных элемента, имеющих одинаковые нормальные замыкания.

Библиография: 13 названий.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие групп и $F_r(\mathfrak{M})$ – свободная группа многообразия ранга r . Иногда мы будем опускать индекс и обозначать эту группу $F(\mathfrak{M})$. Через $\langle x, y, \dots, z \rangle$ будем обозначать подгруппу, порожденную элементами $x, y, \dots, z$, а через $\langle x, y, \dots, z \rangle^G$ – нормальную подгруппу группы G , порожденную этими элементами.

Элемент g из $F(\mathfrak{M})$ называется *примитивным*, если его можно включить в систему свободных образующих группы $F(\mathfrak{M})$. Система элементов $g_1, \dots, g_m$ ($m \leq r$) называется *примитивной системой* группы $F_r(\mathfrak{M})$, если ее можно дополнить до базиса группы $F_r(\mathfrak{M})$.

Что можно сказать об элементе g из $F(\mathfrak{M})$, если группа $\langle g \rangle^{F(\mathfrak{M})}$ содержит примитивный элемент h ? Если $\mathfrak{M}$ – многообразие всех групп, то хорошо известно, что элемент g сопряжен с одним из элементов $h^{\pm 1}$. Аналогичный элемент g сопряжен с одним из элементов $h^{\pm 1}$. Такой же результат для свободных метабелевых групп получил недавно М. Эванс [1]. Возникает вопрос, верна ли подобная теорема для свободных групп многообразий, близких к многообразию метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$.

Будем рассматривать свободные группы конечного ранга многообразия $\mathfrak{M}_n$, где $\mathfrak{M}_n$ – многообразие нильпотентных групп степени $\leq n$. Заметим, что $F(\mathfrak{M}_n) = F/[\gamma_{n+1}(F), \gamma_{n+1}(F)]$, где F – свободная группа с базисом $x_1, \dots, x_r$, $\gamma_1(F) = F$, $\gamma_{n+1}(F) = [\gamma_n(F), F]$. Эти группы, как известно, имеют ряд свойств, близких к свойствам метабелевых групп. Так, например, они финитно аппроксимируемы и удовлетворяют условию максимальности для нормальных подгрупп.

Вместе с тем, они имеют ряд отличий, которые проявляются в вопросах, близких к рассматриваемым в данной заметке, уже при $n = 2$. Так К. Гупта, Н. Гупта, Г. А. Носков в [2] доказали, что для любого эпиморфизма $\varphi: F_r(\mathfrak{A}^2) \rightarrow F_m(\mathfrak{A}^2)$, $r \geq m$, существуют автоморфизмы $\alpha \in \text{Aut}(F_r(\mathfrak{A}^2))$ и $\beta \in \text{Aut}(F_m(\mathfrak{A}^2))$ такие, что $\alpha\varphi\beta$ – стандартный эпиморфизм $\pi: F_r(\mathfrak{A}^2) \rightarrow F_m(\mathfrak{A}^2)$. Однако, как показал Эванс, для свободных групп

многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ аналогичный результат неверен. Он указал для любого $r \geq 2$ эпиморфизм $\psi_r: F_{r+1}(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2) \rightarrow F_r(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$ такой, что $\ker \psi_r$ не является нормальным замыканием одного элемента.

Мы говорим, что в многообразии групп $\mathfrak{M}$ имеет место обобщенная теорема о свободе, если для любой конечно-определенной в этом многообразии группы $G = \langle x_1, \dots, x_r; f_1 = 1, \dots, f_m = 1; \mathfrak{M} \rangle$ с условием $r > m$, можно выбрать $r - m$ элементов из множества $\{x_1, \dots, x_r\}$, которые свободно порождают в G подгруппу $F_{r-m}(\mathfrak{M})$. Известно, что обобщенная теорема о свободе верна в многообразии всех групп [3], разрешимых групп степени $\leq l$ [3], нильпотентных групп $\mathfrak{N}_n$ [4], центрально метабелевых групп [5], а также для многообразий $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ [6], $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2 \wedge \mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ [7].

Следующее предложение показывает, что если в многообразии имеет место обобщенная теорема о свободе, то в свободных группах этого многообразия примитивные системы обладают в некотором смысле свойствами максимальности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в многообразии $\mathfrak{M}$ имеет место обобщенная теорема о свободе и $h_1, \dots, h_m$ – примитивная система группы $F_r(\mathfrak{M})$, $r \geq m$. Если

$$h_1, \dots, h_m \in \langle g_1, \dots, g_m \rangle^{F_r(\mathfrak{M})},$$

то

$$\langle h_1, \dots, h_m \rangle^{F_r(\mathfrak{M})} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle^{F_r(\mathfrak{M})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что h_i есть образ элемента x_i из F . Предположим, что нормальное замыкание элементов $g_1, \dots, g_m$ строго содержит $\langle h_1, \dots, h_m \rangle^{F(\mathfrak{M})}$. Тогда найдется $\omega(x_{m+1}, \dots, x_r) \in F$, образ которого неединичный элемент из $\langle g_1, \dots, g_m \rangle^{F(\mathfrak{M})}$. С другой стороны, в группе $F_r(\mathfrak{M})$ можно выбрать $r - m$ элементов из базиса, индуцированного базисом $x_1, \dots, x_r$ группы F так, что подгруппа, порожденная ими, не пересекается с $\langle g_1, \dots, g_m \rangle^{F(\mathfrak{M})}$. Противоречие доказывает предложение.

Из предложения 1, используя результат А. Л. Шмелькина о сопряженности элементов определенного вида, порождающих одну и ту же нормальную подгруппу, легко получается упомянутый выше результат Эванса.

ТЕОРЕМА (М. Эванс). Пусть g, h – элементы свободной метабелевой группы S_r , причем g – примитивный элемент. Если $g \in \langle h \rangle^{S_r}$, то элемент g сопряжен с одним из элементов $h^{\pm 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1, \dots, s_r$ – базис группы S_r . Не уменьшая общности, можно считать, что $g = s_1$, $h = s_1 c$, $c \in S'_r$. Так как обобщенная теорема о свободе верна для многообразия $\mathfrak{A}^2$, то $\langle g \rangle^{S_r} = \langle h \rangle^{S_r}$. Но тогда по теореме 2 из [8] элементы g и h сопряжены. Теорема доказана.

Через $\partial_i g$ будем обозначать i -ю левую производную Фокса от элемента $g \in F$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\bar{}: \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}\bar{F}$, где $\bar{F} = F/N$. Образ производной $\partial_i g$ в кольце $\mathbb{Z}\bar{F}$ будем называть ее значением в кольце $\mathbb{Z}\bar{F}$.

Для свободной метабелевой группы имеет место следующий критерий примитивности элемента [2], [9]–[11]. Образ элемента $g \in F$ в группе F/F'' примитивен тогда и

только тогда, когда вектор $(\partial_1 g, \dots, \partial_r g)$ со значениями производных в кольце $\mathbb{Z}(F/F')$ унимодулярен.

Следующее утверждение следует из теоремы Эванса. Однако, его доказательство может быть использовано и для других случаев, когда критерий примитивности имеет место. Так, например, К. Гупта и автор доказали, что критерий примитивности справедлив для свободных групп многообразий $\mathfrak{A}_m \mathfrak{A}_n$, где $\mathfrak{A}_m$ – многообразие абелевых групп экспоненты, делящей m . Случай $m = 0, n = 0$ будет рассмотрен в одной из следующих работ. Поэтому предложение 1 справедливо для свободных групп этих многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть g, h – элементы из F_r , причем для их образов g' и h' в группе $F_r(\mathfrak{A}_n \mathfrak{A})$ имеет место включение

$$h' \in \langle g' \rangle^{F(\mathfrak{A}_n \mathfrak{A})}.$$

Если h' – примитивный элемент, то g' также примитивный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что если элементы $g_1, \dots, g_r$ порождают группу G по модулю нильпотентной нормальной подгруппы, то они порождают группу G . Поэтому достаточно доказать, что gF'' – примитивный элемент. Из включения

$$h \in \langle g \rangle^F \pmod{F''}$$

получаем, что производные $\overline{\partial_i h}$ принадлежат идеалу, порожденному элементами $\overline{\partial_1 g}, \dots, \overline{\partial_r g}$ и элементом $\overline{g} - 1$. Черта сверху означает, что элемент из $\mathbb{Z}(F/F')$. Но

$$\sum_{i=1}^r \overline{\partial_i g}(\overline{x_i} - 1) = \overline{g} - 1,$$

поэтому идеал, порожденный элементами $\overline{\partial_1 g}, \dots, \overline{\partial_r g}$, содержит координаты $\overline{\partial_i h}$ унимодулярного вектора. Значит, gF'' – примитивный элемент. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из того, что нормальное замыкание элементов $g_1, \dots, g_m$ свободной метабелевой группы S_r , $r \geq m$, содержит примитивную систему $h_1, \dots, h_m$, вообще говоря, не следует, что $g_1, \dots, g_m$ – примитивная система, если $m > 1$. Рассмотрим для примера свободную метабелевую группу S_2 с базисом s_1, s_2 . Пусть $a_1 = s_1 S'_2$, $a_2 = s_2 S'_2$ – базис группы S_2/S'_2 . Выберем $c \in S'_2$ так, чтобы элемент $(a_2 - 1)\overline{\partial_2 c} + 1$ кольца $\mathbb{Z}(S_2/S'_2)$ был необратим. Элементы $g_1 = s_1, g_2 = s_2^c$ обладают тем свойством, что $s_1, s_2 \in \langle g_1, g_2 \rangle^{S_2}$. Однако, система g_1, g_2 непримитивная, так как матрица, составленная из производных $\overline{\partial_i g_j}, i, j = 1, 2$, необратима.

Рассмотрим отображение β свободной группы F в группу матриц $M(F/N)$ вида

$$\begin{pmatrix} \overline{g} & \overline{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\overline{g}$ – образ элемента g из F в группе $\overline{F} = F/N$, $\overline{\alpha}$ – элемент свободного кольца $\mathbb{Z}\overline{F}$ модуля T с базой $t_1, \dots, t_r$. На образующих $x_1, \dots, x_r$ отображение β задано правилом

$$\beta: x_i \mapsto \begin{pmatrix} \overline{x_i} & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $i = 1, \dots, r$. Это отображение является хорошо известным вложением Магнуса группы $F/[N, N]$ в группу матриц $M(\overline{F})$, т.е. $\ker \beta = N'$. Пусть g – элемент из F . Его образом является матрица (1) и $\overline{\alpha} = \overline{\alpha_1} t_1 + \dots + \overline{\alpha_r} t_r, \overline{\alpha_i} \in \mathbb{Z}\overline{F}$. Обозначим через I_g идеал, порожденный элементом $\overline{g} - 1$ в кольце $\mathbb{Z}\overline{F}$. Известно, что $\overline{\alpha_i} = \overline{\partial_i g}$.

ЛЕММА. Если $h \in N$ и $G = \langle g \rangle^F$, то $hN' \in GN'$ тогда и только тогда, когда найдутся элементы $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\bar{F}$ и $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_r \in I_g$ такие, что

$$\overline{\partial_i h} = \bar{\gamma} \bar{\alpha}_i + \bar{\gamma}_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественный гомоморфизм групп $\bar{F} \rightarrow \bar{F}/\langle gN \rangle^{\bar{F}}$ расширим до гомоморфизма τ группы $M(\bar{F})$ на группу $M(\hat{F})$, где $\hat{F} = \bar{F}/\langle gN \rangle^{\bar{F}}$. Группы $M(\bar{F})$ и $M(\hat{F})$ изоморфны соответственно сплетениям свободной абелевой группы A ранга r с группами $\bar{F}$ и $\hat{F}$. Известно (см., например, [12]), что $\ker \tau$ совпадает с группой $[B_1, \bar{A}]B_1$, где B_1 – подгруппа группы $M(\bar{F})$, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \langle \bar{g} \rangle^{\bar{F}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\bar{A}$ – группа всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{a} \in T$. Таким образом, $R = \ker \tau$ лежит в нормальном замыкании матрицы

$$M_g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в группе $M(\bar{F})$. С другой стороны, образ матрицы M_g под действием гомоморфизма τ равен единице. Поэтому R совпадает с нормальным замыканием матрицы M_g в группе $M(\bar{F})$.

Проверим, что для элемента f из F условия $fN' \in GN'$ и $(fN')^\tau \in (GN')^\tau$ равносильны. Действительно, пусть $f^{\beta\tau} \in G^{\beta\tau}$. Тогда f^β – элемент из $G^\beta R$. Значит, найдутся $z \in G^\beta$ и $r \in R$ такие, что $f^\beta = zr$. Но тогда $r = z^{-1}f^\beta$ – элементы из $R \cap F^\beta$. Тем более, элемент r лежит в пересечении $R_1 \cap F^\beta$, где R_1 – нормальная подгруппа группы $M(\bar{F})$, порожденная матрицами M_g и

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Н. С. Романовский [13] доказал, что $R_1 \cap F^\beta = G^\beta$, поэтому $r \in G^\beta$. Значит, $f^\beta \in G^\beta$.

Рассмотрим теперь элемент $h \in N$ и найдем необходимые и достаточные условия того, что $h^{\beta\tau} \in G^{\beta\tau}$. Так как при гомоморфизме τ матрица M_g переходит в единичную матрицу, то $G^{\beta\tau}$ порождается как нормальная подгруппа в $F^{\beta\tau}$ единственной матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Нормальное замыкание матриц такого вида в группах $F^{\beta\tau}$ и $M(\hat{F})$ совпадают. Пусть

$$M_{\hat{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– образ матрицы M_α в группе $M(\hat{F})$, где $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1 t_1 + \dots + \hat{\alpha}_r t_r$, $\hat{\alpha}_i$ – образ элемента α_i в кольце $\mathbb{Z}\hat{F}$. Нормальное замыкание матрицы $M_{\hat{\alpha}}$ в группе $M(\hat{F})$ состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\gamma}\hat{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\hat{\gamma}$ – любой элемент из $\mathbb{Z}\hat{F}$. Образом элемента h в группе $M(\hat{F})$ является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \widehat{\partial_1 h t_1} + \widehat{\partial_2 h t_2} + \cdots + \widehat{\partial_r h t_r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $h^{\beta\tau} \in G^{\beta\tau}$ тогда и только тогда, когда найдется $\hat{\gamma} \in \mathbb{Z}\hat{F}$, для которого

$$\widehat{\partial_i h} = \hat{\gamma} \hat{\alpha}_i \quad (2)$$

при любом $i = 1, \dots, r$. Ядро естественного гомоморфизма $\hat{\cdot} : \mathbb{Z}\bar{F} \rightarrow \mathbb{Z}\hat{F}$ есть I_g , следовательно, система (2) разрешима в $\mathbb{Z}\hat{F}$ относительно $\hat{\gamma}$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\partial_i h} = \bar{\gamma} \bar{\alpha}_i + \bar{\gamma}_i.$$

Лемма доказана.

Теперь можно доказать, что на многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ теорема Эванса не распространяется.

ТЕОРЕМА. *Найдется элемент g из F_r , образ которого в группе $F_r(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$ порождает нормальную подгруппу, содержащую образ элемента x_1 , но элементы g и x_1 , а также g и x_1^{-1} , не сопряжены по модулю $[\gamma_3(F), \gamma_3(F)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве g возьмем элемент $g = x_1[x_1, x_2, x_2, x_1, x_2]$. Заметим, что $c = [x_1, x_2, x_2, x_1, x_2]$ – элемент из $\gamma_3(F)$. Поэтому, чтобы убедиться в выполнении включения $x_1 \in \langle g \rangle^F$ по модулю $[\gamma_3(F), \gamma_3(F)]$ достаточно установить, что

$$\overline{\partial_1 c} = \bar{\gamma}(1 + \bar{x}_1 \overline{\partial_1 c}) + \bar{\gamma}_1, \quad \overline{\partial_2 c} = \bar{\gamma} \bar{x}_1 \overline{\partial_2 c} + \bar{\gamma}_2, \quad \dots, \quad \overline{\partial_r c} = \bar{\gamma} \bar{x}_1 \overline{\partial_r c} + \bar{\gamma}_r \quad (3)$$

для некоторых $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_r$ из $\mathbb{Z}(F/\gamma_3(F))$, причем $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_r \in I_{x_1}$. Но

$$\overline{\partial_i c} = (\bar{x}_2^{-1} - 1)(\bar{x}_1^{-1} - 1) \overline{\partial_i [x_1, x_2, x_2]},$$

т.е. $\overline{\partial_i c} \in I_{x_1}$. Поэтому в (3) можно положить $\bar{\gamma} = 0$.

Проверим теперь, что элемент c нельзя записать в виде $[x_1, u]$ в группе $F_r(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$. Достаточно рассмотреть группу ранга $r = 2$, а элемент u из $\gamma_3(F_2)$.

Вычислим значения производной ∂_1 от элементов $[x_1, u]$ и c в кольце $\mathbb{Z}(F/\gamma_3(F))$.

Имеем

$$\overline{\partial_1 [x_1, u]} = (1 - \bar{x}_1^{-1}) \overline{\partial_1 u}, \quad \overline{\partial_1 c} = y^{-1}(\bar{x}_2^{-1} - 1)(\bar{x}_1^{-1} - 1)(\bar{x}_2^{-1} - 1) \bar{x}_1^{-1}(\bar{x}_2^{-1} - 1),$$

где $y = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$.

Каждый элемент кольца $\mathbb{Z}(F/\gamma_3(F))$ можно однозначно записать в виде

$$\sum g_j x_2^j, \quad (4)$$

где j принимает конечное множество целых значений, $g_j = g_j(y, \bar{x}_1)$ – многочлен над кольцом $\mathbb{Z}$ от коммутирующих переменных y и $\bar{x}_1$. Найдём коэффициент g_{-3} в записи (4) для $\overline{\partial_1 c}$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$g_{-3} = \bar{x}_1^{-2} y^{-3} (y^{-1} - \bar{x}_1).$$

Записав элемент $(1 - \bar{x}_1^{-1})\overline{\partial_1 u}$ в виде (4), приходим к выводу, что в групповом кольце свободной абелевой группы с базисом $y, \bar{x}_1$ выполняется равенство

$$y^{-1} - \bar{x}_1 = (1 - \bar{x}_1^{-1})g(\bar{x}_1, y) \quad (5)$$

для некоторого $g(\bar{x}_1, y) \in \mathbb{Z}[\bar{x}_1^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Но любой элемент кольца $\mathbb{Z}[\bar{x}_1^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ однозначно записывается в виде $\sum f_j y^j$, где $f_j \in \mathbb{Z}[\bar{x}_1^{\pm 1}]$. Представив в таком виде элемент $g(\bar{x}_1, y)$, убеждаемся, что (5) невозможно. Противоречие доказывает теорему.

Из предложения 1 и теоремы получаем

СЛЕДСТВИЕ. В группе $F_r(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$ можно выбрать два несопряженных элемента, имеющих одинаковые нормальные замыкания.

Аналогичная теорема для групп $F_r(\mathfrak{A}^2)$ была доказана Шмелькиным в [8].

Новосибирская государственная академия строительства

Поступило

19.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Evans M. J. Presentations of the free metabelian group of rank 2 // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37. № 4. P. 468–472.
- [2] Gupta C. K., Gupta N. D., Noskov G. A. Some applications of Artamonov–Quillen–Suslin theorems to metabelian inner rank and primitivity // Canad. J. Math. 1994. V. 46. № 2. P. 298–307.
- [3] Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно-определенных группах // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 1. С. 88–97.
- [4] Романовский Н. С. Обобщенная теорема о свободе для про- p -групп // Сиб. матем. ж. 1986. Т. 27. С. 154–170.
- [5] Gupta C. K., Romanovskii N. S. A generalized Freiheitssatz for centre-by-metabelian groups // Bull. London Math. Soc. 1992. V. 24. P. 71–75.
- [6] Ябанжи Г. Г. О группах, конечно-определенных в многообразиях $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ // Алгебра и логика. 1981. Т. 20. № 1. С. 109–120.
- [7] Gupta C. K., Romanovskii N. S. A generalized Freiheitssatz for the variety $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2 \wedge \mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ // Algebra Colloq. 1994. V. 1. P. 193–200.
- [8] Шмелькин А. Л. Два замечания о свободных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6. № 2. С. 95–109.
- [9] Тимошенко Е. И. О включении данных элементов в базис свободной метабелевой группы // Деп. ВИНТИ. № 2699–В88.
- [10] Романьков В. А. Критерии для примитивных систем элементов свободной метабелевой группы // Укр. матем. ж. 1990. Т. 43. № 7–8. С. 996–1002.
- [11] Тимошенко Е. И. Об алгоритмической разрешимости проблемы включения в базис свободной метабелевой группы // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 3. С. 117–121.
- [12] Романовский Н. С. Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением // Матем. сб. 1972. Т. 89. № 1. С. 93–99.
- [13] Романовский Н. С. О некоторых алгоритмических проблемах для разрешимых групп // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 1. С. 26–34.