Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Трещёв, Расщепление сепаратрис с точки зрения симплектической геометрии, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 890–906

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1573>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:41:00

УДК 514.154

РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИС С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Д. В. Трещёв

Как известно, инвариантные лагранжевы многообразия, асимптотические к гиперболическому тору гамильтоновой системы (устойчивая и неустойчивая сепаратрисы), вообще говоря, не совпадают. Это явление называется расщеплением сепаратрис. В настоящей заметке мы строим симплектический инвариант, количественно описывающий величину расщепления сепаратрис гиперболических торов максимальной размерности, т.е. размерности, на единицу меньшей числа степеней свободы. Конструкция напоминает гомоклинический инвариант, построенный Лазуткиным в случае двумерных симплектических отображений, а также инвариант, описывающий расщепление асимптотических многообразий неподвижной точки симплектического диффеоморфизма, указанный Болотиным.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В вопросах качественного анализа динамики гамильтоновых систем важную роль играют инвариантные торы. К инвариантным торам можно отнести положения равновесия и периодические траектории, которые являются соответственно нульмерными и одномерными торами. Гиперболические инвариантные торы обладают асимптотическими лагранжевыми многообразиями (сепаратрисами). В интегрируемых системах устойчивые и неустойчивые сепаратрисы обычно сведены. В неинтегрируемых системах они расщепляются и пересекаются по двоякоасимптотическим траекториям.

Эффект расщепления сепаратрис при возмущении интегрируемых гамильтоновых систем обнаружил Пуанкаре [1]. С тех пор задача о расщеплении сепаратрис интенсивно исследовалась. Следует заметить, что в большинстве рассмотренных систем изучался случай, так или иначе сводящийся к сепаратрисам периодического решения в системе с полутора или двумя степенями свободы, а также его дискретный аналог. Многомерные сепаратрисы рассмотрены, например, в работах [2]–[5].

Расщепление сепаратрис в гамильтоновой механике естественно характеризовать симплектическим инвариантом. Требования, предъявляемые к нему, следующие. Инвариант

- сопоставляет устойчивой и неустойчивой сепаратрисам двух (возможно, совпадающих) гиперболических торов и двоякоасимптотической траектории γ , лежащей на обеих сепаратрисах, вещественное (или комплексное) число;

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00747, и фонда INTAS, грант № 93–339.

- непрерывно зависит от системы, отличен от нуля, если пересечение сепаратрис имеет общий характер (например, трансверсально вдоль γ на уровне энергии), и равен нулю в противном случае.

Для сепаратрис периодического решения в системе с двумя степенями свободы такой инвариант известен. Приведем его описание (в случаях полутора степеней свободы и двумерного симплектического каскада построения аналогичны и проще). Зафиксируем трехмерный уровень энергии, на котором лежат периодическое решение и сепаратрисы. Выберем на этом уровне двумерную площадку S , трансверсальную к гамильтонову потоку. На рис. 1 кривые Γ^+ и Γ^- обозначают соответственно пересечение устойчивой и неустойчивой сепаратрисы с поверхностью S . Точки p_1 и p_2 лежат на двоякоасимптотических траекториях. Симплектическим инвариантом, характеризующим расщепление сепаратрис, можно считать площадь области D , ограниченной кривыми $\Gamma^\pm$, точнее, величину $A = \int_D \omega$, где 2-форма ω – симплектическая структура. Используя свойство лагранжовости асимптотических поверхностей и формулу Стокса, несложно показать, что инвариант A не меняется при непрерывном изменении поверхности S .

Рис. 1

Рис. 2

К сожалению, многомерное обобщение инварианта A выглядит не очень привлекательным. Например, в случае трех степеней свободы площадка S четырехмерна, а $\Gamma^\pm$ – двумерные поверхности. В качестве D естественно брать, по-прежнему, двумерную поверхность, ограниченную кривыми $c^+ \subset \Gamma^+$, $c^- \subset \Gamma^-$. При этом, хотя величина A не меняется при непрерывной деформации D , невозможно избежать зависимости A от гомотопического класса кривых $c^\pm$.

В настоящей заметке мы строим симплектический инвариант для сепаратрис гиперболических торов максимальной размерности. Конструкция напоминает гомоклинический инвариант Лазуткина [6]. Аналогичный инвариант был указан Болотиным [4] для асимптотических поверхностей неподвижной точки симплектического отображения или периодически зависящей от времени гамильтоновой системы при дополнительном условии вещественности характеристических показателей.

Основная идея состоит в следующем. Пусть Γ^+ и Γ^- – устойчивая и неустойчивая сепаратрисы гиперболического тора в гамильтоновой системе с m степенями свободы. Предположим, что $\Gamma^\pm$ пересекаются вдоль двоякоасимптотической траектории γ (см. рис. 2). Пусть $p \in \gamma$ и χ – вектор, касательный к γ в точке p . Инвариант будем искать в виде

$$I = \Lambda^{m-1} \omega(w_1^+, \dots, w_{m-1}^+, w_1^-, \dots, w_{m-1}^-), \quad (1)$$

где $\Lambda^{m-1} \omega$ – внешняя $(m-1)$ -я степень симплектической структуры, а

$$(w_1^\pm, \dots, w_{m-1}^\pm, \chi)$$

– специальным образом выбранные базисы в касательных пространствах $T_p\Gamma^\pm$. Указанные базисы строятся ниже. Их выбор неоднозначен, однако, величина I оказывается независимой от произвола в выборе базисов.

В процессе реализации предлагаемой идеи мы доказываем лемму о классификации канонических координат приводимого гиперболического тора (лемма 2.1). На наш взгляд это утверждение представляет самостоятельный интерес.

2. Гиперболические торы. В дальнейшем скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означают стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^s$, где $s \in \mathbb{N}$ зависит от контекста, т.е. для любой пары векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^s$ имеем

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^s \xi_j \eta_j.$$

Символ T в выражениях типа U^T , где U – матрица, означает операцию транспонирования. Символом $O_j(z)$ будем обозначать члены не ниже j -го порядка по переменным z . Все объекты, встречающиеся в дальнейшем, считаются аналитическими; однако, основные конструкции, несомненно, переносятся и на гладкий случай.

Пусть имеется гамильтонова система (M, ω, H) , где $(M, \omega) - (2m)$ -мерное симплектическое многообразие и $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ – вещественно-аналитическая функция Гамильтона. Символом χ будем обозначать соответствующее гамильтоново векторное поле на M . Пусть $N \subset M$ – подмногообразие, диффеоморфное n -мерному тору ($n < m$) и инвариантное относительно потока системы. Назовем инвариантный тор N *приводимым гиперболическим*, если в его окрестности на M существуют координаты

$$u = (u_1, \dots, u_l), \quad v = (v_1, \dots, v_l), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \bmod 2\pi, \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

$l + n = m$, $l > 0$, такие, что выполнены следующие условия:

$$\omega = dv \wedge du + dy \wedge dx, \quad (2)$$

$$N = \{u, v, x, y : u = v = 0, y = 0\}, \quad H = \langle \nu, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle + \langle \Lambda u, v \rangle + O_3(u, v, y),$$

где вектор частот $\nu \in \mathbb{R}^n$ нерезонансен, т.е. для любого ненулевого $k \in \mathbb{Z}^n$ имеем $\langle \nu, k \rangle \neq 0$, $A = A^T$ – постоянная матрица размера $n \times n$ и вещественные части собственных значений матрицы Λ положительны (эквивалентное условие – матрица $\Lambda + \Lambda^T$ положительно определена). Переменные u, v, x, y , а также величины ν, A, Λ , считаем вещественными.

Координаты u, v, x, y , определенные таким образом, назовем *каноническими* для N .

В общем случае матрица Λ может зависеть от переменных x (см. [7], [8]). Если матрицу Λ нельзя сделать постоянной с помощью симплектической замены координат, то гиперболический тор естественно назвать *неприводимым*.

Отметим, что при $n = 0$ гиперболический тор является положением равновесия и приводим по определению. При $n = 1$ имеем гиперболическое периодическое решение. Приводимость в этом случае следует из теории Ляпунова–Флоке. При $n = m - 1$ приводимость также имеет место всегда. Это легко устанавливается.

Из теорем типа КАМ следует, что гиперболический тор приводим, если матрица $\Lambda = \Lambda(x)$ имеет вид $\Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1(x, \varepsilon)$, где собственные значения постоянной матрицы Λ_0 положительны и различны, ε – малый параметр, матрица Λ_1 аналитична по x , а частоты ν сильно нерезонансны [9]. Если допустить существование невещественных собственных значений у матрицы Λ_0 , то приводимость удастся установить не для всех малых $\varepsilon > 0$, а лишь для некоторого канторова подмножества интервала $(0, \varepsilon_0)$ [10]. Следует, однако, заметить, что лебегова мера этого подмножества быстро стремится к полной мере интервала $(0, \varepsilon_0)$ при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ [11].

Канонические координаты гиперболического тора определены неоднозначно. Однако, произвол в выборе таких координат невелик. Связь между различными системами координат, каноническими для гиперболического тора, устанавливает следующая лемма.

ЛЕММА 2.1. Пусть u, v, x, y и u', v', x', y' – две системы канонических координат для приводимого гиперболического тора N и собственные значения матрицы Λ различны. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u' &= Pu + O_2(u, v, y), & v' &= (P^{-1})^T v + O_2(u, v, y), \\ y' &= By + O_2(u, v, y), & x' &= b + (B^{-1})^T x + O(u, v, y), \end{aligned}$$

где $b \in \mathbb{T}^n$ и невырожденная целочисленная матрица B размера $n \times n$ постоянны, $|\det B| = 1$.

2) Верно равенство $\langle \nu, \partial/\partial x \rangle P + P\Lambda - \Lambda'P = 0$, где матрица Λ' имеет тот же смысл, что и Λ , но соответствует новым координатам.

3) Матрица P представляется в виде

$$P = \sum_{j, s \in E_*} \mu_{js} b'_j a_s e^{i(k_{js}, x)}, \quad E_* \subset \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, l\}, \quad k_{js} \in \mathbb{Z}^l,$$

где $\mu_{js} \neq 0$ – постоянные, вектор-столбцы b'_j и вектор-строки a_s – собственные векторы матриц Λ' и Λ соответственно,

$$a_s \Lambda_j = \lambda_s a_s, \quad \Lambda'_j b'_j = \lambda'_j b'_j.$$

Множество E_* таково, что для любой пары $(j, s) \in E_*$ выполняется равенство $\lambda'_j - \lambda_s = i\langle \nu, k_{js} \rangle$. Проекция E_* на первый, а также на второй, сомножитель совпадает со всем множеством $\{1, \dots, l\}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если собственные значения матрицы Λ вещественны и различны, то матрица P постоянна и $\Lambda' = PAP^{-1}$.

Доказательство леммы 2.1 содержится в п. 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Матрицы Λ и Λ' по определению вещественны и невырождены, следовательно, P также вещественна и невырождена. В силу утверждения 3) леммы 2.1, если $(j, s) \in E_*$, то $\operatorname{Re} \lambda'_j = \operatorname{Re} \lambda_s = \lambda_s$. Так как для любого $s \in \{1, \dots, l\}$ найдется индекс $j \in \{1, \dots, l\}$ такой, что $(j, s) \in E_*$ (ибо проекция E_*

на второй сомножитель равна $\{1, \dots, l\}$), то собственные значения λ'_j можно перенумеровать так, что $\operatorname{Re} \lambda'_s = \lambda_s$. Пусть они уже перенумерованы таким образом. Так как P и все величины λ_s вещественны, величины λ'_s также вещественны. Следовательно, $E_* \subset \{(s, s), s = 1, \dots, l\}$, $k_{ss} = 0$ и матрица P постоянна. Равенство $\Lambda' = P\Lambda P^{-1}$ следует из утверждения 2) леммы 2.1.

Граффом доказано [7], что всякий гиперболический тор обладает парой лагранжевых асимптотических многообразий $\Gamma^\pm$ (устойчивой и неустойчивой сепаратрисой). В канонических координатах для N сепаратрисы параметризуются следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \{u, v, x, y : u = f^+(v, x), y = g^+(v, x)\}, \\ \Gamma^- &= \{u, v, x, y : v = f^-(u, x), y = g^-(u, x)\}, \\ f^+ &= O(v^2), \quad g^+ = O(v^2), \quad f^- = O(u^2), \quad g^- = O(u^2).\end{aligned}\tag{3}$$

3. Симплектический инвариант. В этом пункте мы будем считать, что размерность гиперболического тора N максимальна, т.е. $n = m - 1$ и $l = 1$. Пусть χ -гамильтоново векторное поле на M , соответствующее гамильтониану H , т.е. $\omega(\cdot, \chi) = dH$. Предположим, что фиксирована некоторая система координат, каноническая для N . Так как в окрестности тора N на сепаратрисе Γ^- (Γ^+) в качестве локальных координат можно выбрать переменные u, x (v, x), в дальнейшем мы будем считать, что на Γ^- (Γ^+) переменные v, y (u, y) выражены через u, x (v, x).

ЛЕММА 3.1. 1) Для любого постоянного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ существует единственное векторное поле w_a^- на Γ^- (и w_a^+ на Γ^+), коммутирующее с χ и такое, что

$$w_a^- = \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + O(u^2), \quad w_a^+ = \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + O(v^2).$$

2) Отображения $a \rightarrow w_a^\pm$ линейны по a . Для любых точек $p^\pm \in \Gamma^\pm \setminus N$ ядра отображений $a \rightarrow w_a^\pm(p^\pm)$ нулевые, а образы не содержат $\chi(p^\pm)$.

3) Для любых $a', a'' \in \mathbb{R}^n$ векторные поля $w_{a'}^\pm$ и $w_{a''}^\pm$ коммутируют. (То же самое верно для $w_{a'}^+$ и $w_{a''}^+$.)

СЛЕДСТВИЕ. Отображения $a \rightarrow w_a^\pm$ устанавливают гомоморфизмы коммутативной алгебры Ли векторных полей вида $\langle a, \partial/\partial x \rangle$ в алгебры Ли векторных полей на $\Gamma^\pm$.

Доказательство леммы 3.1 приведено в п. 6.

Пусть $a_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, где единица находится на j -м месте. Положим $w_j^\pm = w_{a_j}^\pm$, $j = 1, \dots, n$. Теперь определим величину I по формуле (1).

ТЕОРЕМА 3.1. 1) I не зависит от точки p на двоякоасимптотической траектории $\gamma \subset \Gamma^+ \cap \Gamma^-$.

2) Векторы $w_1^+, \dots, w_n^+, w_1^-, \dots, w_n^-$ линейно независимы (пересечение сепаратрис трансверсально на уровне энергии) тогда и только тогда, когда $I \neq 0$.

3) I не зависит от выбора системы канонических координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложенная конструкция без труда обобщается на гетероклинический случай, т.е. на описание пересечения сепаратрис, асимптотических к различным гиперболическим $(m-1)$ -мерным торам. Отличие от гомоклинического случая состоит лишь в том, что при изменении системы координат, канонических для одного из тором, величина I может поменять знак, поэтому в гетероклинической ситуации инвариантом является $|I|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Инвариант I может быть аналогично определен для сепаратрис гиперболических тором неавтономных гамильтоновых систем, а также симплектических отображений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фазовые потоки векторных полей $w_1^\pm, \dots, w_n^\pm$ порождают на поверхностях $\Gamma^\pm$ действие n -мерного тора. Инвариант I может быть получен как следствие наличия такого действия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Утверждение 1) теоремы следует из инвариантности относительно гамильтонова потока формы $\wedge^n \omega$ и векторных полей $w_j^\pm$.

Заметим, что так как векторы $w_1^-, \dots, w_n^-$ касательны к лагранжеву многообразию Γ^- , то

$$\omega(w_i^-, w_j^-) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Аналогичные равенства выполняются для векторов $w_1^+, \dots, w_n^+$. Таким образом, из определения внешнего произведения дифференциальных форм имеем

$$I = (-1)^{n(n-1)/2} \det(\omega(w_i^+, w_j^-)), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Из равенств (4) и $m = n + 1$ сразу следует утверждение 2) теоремы 3.1. Действительно, если Γ^+ и Γ^- пересекаются на уровне энергии нетрансверсально, то существует ненулевой вектор $q = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ такой, что вектор

$$Q = \sum_{j=1}^n q_j w_j^- \quad (5)$$

касается Γ^+ . Но тогда q – правый собственный вектор матрицы $(\omega(w_i^+, w_j^-))$ с нулевым собственным значением. В силу (4) получаем $I = 0$.

Обратно, пусть матрица $(\omega(w_i^+, w_j^-))$ вырождена и $q \neq 0$ – ее правый собственный вектор с нулевым собственным значением. Вектор (5) косоортогонален всем векторам $w_1^+, \dots, w_n^+$ и, следовательно, касается сепаратрисы Γ^+ . (Здесь мы использовали свойство лагранжевости многообразия Γ^+ .) Так как, кроме того, Q линейно независим с χ (см. утверждение 2) леммы 3.1), пересечение $T_p \Gamma^+ \cap T_p \Gamma^-$, по крайней мере, двумерно.

Наконец, докажем утверждение 3) теоремы 3.1. Пусть u', v', x', y' – другая система координат, каноническая для N . В силу леммы 2.1 имеем $x' = b + Cx + O(u, v, y)$, где матрица $C = (C_{ij})$ постоянна, целочисленна и $|\det C| = 1$. В силу леммы 3.1 векторные поля $(w'_1)^\pm, \dots, (w'_n)^\pm$, соответствующие новой системе координат, связаны с векторными полями $w_1^\pm, \dots, w_n^\pm$ равенством

$$(w'_i)^\pm = \sum_{j=1}^n C_{ij} w_j^\pm, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\omega((w'_i)^+, (w'_j)^-) = \sum_{r,s=1}^n C_{ir} \omega(w_r^+, w_s^-) C_{js}.$$

Таким образом,

$$\det(\omega((w'_i)^+, (w'_j)^-)) = \det C \det(\omega(w_i^+, w_j^-)) \det C = \det(\omega(w_i^+, w_j^-)).$$

Остается воспользоваться равенством (4). Теорема доказана.

4. Инвариант I и теория возмущений. В этом пункте мы покажем как вычислить асимптотику инварианта I при возмущении интегрируемой системы. Указанная асимптотика выражается через интегралы типа интегралов Пуанкаре–Мельникова.

Предположим, что гамильтониан H имеет вид

$$H = \tilde{H}_0(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{y}) + \tilde{H}_1(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}) + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \bmod 2\pi, \quad \tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n),$$

где $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}$ – координаты на M , ε – малый параметр, $\omega = d\tilde{v} \wedge d\tilde{u} + d\tilde{y} \wedge d\tilde{x}$, переменные $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ предполагаются скалярными. При $\varepsilon = 0$ система называется *невозмущенной*. Она интегрируема по Лиувиллю: функции $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \tilde{H}_0$ являются для нее первыми интегралами в инволюции.

Пусть система с одной степенью свободы и гамильтонианом $\tilde{H}_0(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{y}^0)$, где $\tilde{y}^0 \in \mathbb{R}^n$ фиксировано, имеет петлю сепаратрис, выходящую из гиперболической особой точки. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tilde{y}^0 = 0$, а гиперболическая точка имеет вид $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$. Функция $\tilde{H}_0$ (возможно, после линейной канонической замены в плоскости $\tilde{u}, \tilde{v}$) имеет вид

$$\tilde{H}_0 = \langle \nu, \tilde{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{A} \tilde{y}, \tilde{y} \rangle + \tilde{u} \langle b, \tilde{y} \rangle + \tilde{v} \langle c, \tilde{y} \rangle + \lambda \tilde{u} \tilde{v} + O_3(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{y}),$$

где $\nu, b, c \in \mathbb{R}^n$ – постоянные векторы, $\tilde{A} = \tilde{A}^T$ – постоянная матрица размера $n \times n$, а λ – вещественное положительное число.

В результате канонической замены переменных

$$\tilde{x} = x + \frac{ub}{\lambda} - \frac{vc}{\lambda} - \frac{\langle c, y \rangle b}{\lambda^2}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{u} = u - \frac{\langle c, y \rangle}{\lambda}, \quad \tilde{v} = v - \frac{\langle b, y \rangle}{\lambda}$$

гамильтониан H становится следующим:

$$\begin{aligned} H &= H_0(u, v, y) + \varepsilon H_1(u, v, x, y) + O(\varepsilon^2), \\ H_0 &= \langle \nu, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle + \lambda uv + O_3(u, v, y), \\ A &= \tilde{A} - \frac{bc^T + cb^T}{2\lambda^2}, \quad H_1(u, v, x, y) = \tilde{H}_1(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned} \tag{6}$$

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ координаты u, v, x, y канонические для невозмущенного гиперболического тора $N_0 = \{u = v = 0, y = 0\}$, если вектор ν нерезонансен.

В дальнейшем в этом пункте мы будем предполагать выполненными следующие условия:

- а) частоты ν сильно нерезонансны, т.е. существуют положительные постоянные α и ρ такие, что для любого ненулевого вектора $k \in \mathbb{Z}^n$ имеем оценку $|\langle k, \nu \rangle| \geq \alpha |k|^{-\rho}$;
- б) $\det A \neq 0$;
- в) функция H аналитична.

Теорема Граффа [7] утверждает, что если условия а)–в) действительно выполнены, то при малых ε система с гамильтонианом (6) имеет гиперболический тор N_ε , близкий к невозмущенному. Сепаратрисы $\Gamma_\varepsilon^\pm$ тора N_ε , как правило, расщепляются.

Чтобы вычислить инвариант I , достаточно научиться вычислять величины $\omega(w_i^+, w_j^-)$ (см. (4)) на гомоклинической траектории $\gamma_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon^+ \cap \Gamma_\varepsilon^-$. Будем обозначать символом γ траекторию невозмущенной системы, лежащую на сепаратрисе $\Gamma_0^+ = \Gamma_0^-$. Соответствующее решение уравнений Гамильтона обозначим $\gamma(t)$. Рассмотрим следующие выражения:

$$P_j(\gamma) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{-T}^T \{y_j, H_1\} \circ \gamma(t) dt - \{y_j, \kappa\} \circ \gamma(-T) + \{y_j, \kappa\} \circ \gamma(T) \right),$$

$$P_{ij}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{-T}^T \{y_i \{y_j, H_1\}\} \circ \gamma(t) dt - \{y_i \{y_j, \kappa\}\} \circ \gamma(-T) + \{y_i \{y_j, \kappa\}\} \circ \gamma(T) \right),$$

где функция κ , определенная в окрестности тора N_0 , зависит только от переменных x и удовлетворяет уравнению

$$\left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \kappa + H_1(0, 0, x, 0) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} H_1(0, 0, x, 0) dx.$$

Благодаря сильной нерезонансности частот ν и аналитичности функции H_1 решение такого уравнения существует в классе аналитических функций и единственно с точностью до аддитивной постоянной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Траектория γ_ε находится в окрестности порядка ε траектории $\gamma_0 \subset \Gamma_0^+ = \Gamma_0^-$, удовлетворяющей уравнениям $P_j(\gamma_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Инвариант $I = I(\gamma_\varepsilon)$ вычисляется по формуле (4), где*

$$\omega(w_i^+, w_j^-) = -\varepsilon P_{ij}(\gamma_0) + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем задавать многообразия $\Gamma_\varepsilon^\pm$ системами уравнений

$$H = h, \quad Y_j^\pm = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $Y_j^\pm = y_j + \varepsilon f_j^\pm + O(\varepsilon^2)$ – первые интегралы возмущенной системы. Имеем равенства

$$0 = \{H, Y_j^\pm\} = \varepsilon \dot{f}_j^\pm + \varepsilon \{H_1, y_j\} + O(\varepsilon^2),$$

где $\dot{f}_j^\pm = \{H_0, f_j^\pm\}$ – производная функции $f_j^\pm$ вдоль невозмущенной системы. Поделив на ε и приравняв ε к нулю, получаем

$$\dot{f}_j^\pm = \{y_j, H_1\}. \quad (8)$$

Ограничение уравнения (8) на невозмущенный тор N_0 имеет вид

$$\left\langle \nu, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle f_j^\pm(0, 0, x, 0) = \frac{\partial}{\partial x_j} H_1(0, 0, x, 0),$$

откуда получаем равенства

$$f_j^\pm(0, 0, x, 0) = c_j - \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $c_1, \dots, c_n$ – постоянные.

Для любых $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ и решения $\gamma(t)$ невозмущенной системы, лежащего на многообразии $\Gamma_0^+ = \Gamma_0^-$, из уравнения (8) получаем

$$\begin{aligned} f_j^-(\gamma(t_2)) &= \int_{t_1}^{t_2} \{y_j, H_1\} \circ \gamma(t) dt + f_j^-(\gamma(t_1)), \\ f_j^+(\gamma(t_2)) &= - \int_{t_2}^{t_3} \{y_j, H_1\} \circ \gamma(t) dt + f_j^+(\gamma(t_3)). \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно,

$$f_j^-(\gamma(t_2)) - f_j^+(\gamma(t_2)) = \int_{t_1}^{t_3} \{y_j, H_1\} \circ \gamma(t) dt + f_j^-(\gamma(t_1)) - f_j^+(\gamma(t_3)).$$

Теперь перейдем к пределу $t_3 \rightarrow +\infty, t_1 \rightarrow -\infty$ и воспользуемся соотношениями

$$f_j^-(\gamma(t_1)) \rightarrow c_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \kappa(\gamma(t_1)), \quad f_j^+(\gamma(t_3)) \rightarrow c_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \kappa(\gamma(t_3)).$$

В результате получаем равенство

$$f_j^-(\gamma(t)) - f_j^+(\gamma(t)) = P_j(\gamma).$$

Уравнение траектории γ_ε имеет вид $Y_j^+ = Y_j^- = H - h = 0$. В первом приближении по ε , в частности, получаем $f_j^+ - f_j^- = 0$. Следовательно,

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma_0(t) + O(\varepsilon), \quad (10)$$

где $P_j(\gamma_0) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Заметим, что равенства $P_j(\gamma_0) = 0$ являются необходимыми условиями существования двоякоасимптотической кривой вида (10). Из теоремы о неявной функции легко вывести, что если $\det(P_{ij}) \neq 0$, то кривая γ_ε действительно существует.

Теперь проверим формулу (7). Будем искать векторные поля $w_j^\pm$ в виде ограничений на $\Gamma_\varepsilon^\pm$ некоторых гамильтоновых векторных полей. При $\varepsilon = 0$ соответствующие гамильтонианы равны y_j . Кроме того, из условия коммутирования $w_j^\pm$ с полем χ вытекает, что гамильтонианы полей $w_j^\pm$ – первые интегралы рассматриваемой системы. Таким образом, можно считать, что эти гамильтонианы совпадают с функциями $Y_j^\pm$

в том смысле, что пока еще неоднозначно определенные функции $Y_j^\pm$ можно построить так, чтобы они определили поля $w_j^\pm$. Итак, имеем равенство

$$\omega(w_i^+, w_j^-) = -\{Y_i^+, Y_j^-\} = \varepsilon(-\{y_i, f_j^-\} + \{y_j, f_i^+\}) + O(\varepsilon^2). \quad (11)$$

Из соотношений (9) получаем

$$\begin{aligned} \{y_i, f_j^-\} \circ \gamma_0(t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \{y_i\{y_j, H_1\}\} \circ \gamma_0(t) dt + \{y_i, f_j^-\} \circ \gamma_0(t_1), \\ \{y_j, f_i^+\} \circ \gamma_0(t_2) &= - \int_{t_2}^{t_3} \{y_i\{y_j, H_1\}\} \circ \gamma_0(t) dt + \{y_j, f_i^+\} \circ \gamma_0(t_3). \end{aligned}$$

Вычтем первое равенство из второго и перейдем к пределу $t_3 \rightarrow +\infty, t_1 \rightarrow -\infty$. Получаем

$$(-\{y_i, f_j^-\} + \{y_j, f_i^+\}) \circ \gamma_0(t) = P_{ij}(\gamma_0).$$

Теперь предложение 4.1 следует из (11).

5. Доказательство леммы 2.1. Положим $(u', v', x', y') = F(u, v, x, y)$. В силу условия (2) имеем

$$F(0, 0, x, 0) = (0, 0, \varphi(x), 0),$$

где $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ — диффеоморфизм. Следовательно,

$$\begin{aligned} u' &= O(u, v, y), & v' &= O(u, v, y), \\ y' &= \alpha u + \beta v + By + O_2(u, v, y), & x' &= \varphi(x) + O(u, v, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь функции α, β, B имеют область определения $\mathbb{T}^n = \{x\}$ и области значений в пространствах матриц размера $n \times l, n \times l$ и $n \times n$ соответственно.

Положим $\partial_\nu = \langle \nu, \partial/\partial x \rangle$ и

$$H'(u', v', x', y') = H(u, v, x, y) = \langle \nu', y' \rangle + \frac{1}{2} \langle A' y', y' \rangle + \langle \Lambda' u', v' \rangle + O_3(u', v', y').$$

Вычислим скобку Пуассона $\{y', H'\}$ двумя способами. С одной стороны, в силу (12)

$$\{y', H'\} = \frac{\partial H'}{\partial x'} = O_3(u', v', y') = O_3(u, v, y). \quad (13)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \{y', H'\} &= \{\alpha u + \beta v + By + O_2(u, v, y), H\} \\ &= (-\partial_\nu \alpha - \alpha \Lambda)u + (-\partial_\nu \beta + \beta \Lambda^T)v - \partial_\nu By + O_2(u, v, y). \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенств (13), (14) получаем условия

$$\partial_\nu \alpha + \alpha \Lambda = 0, \quad \partial_\nu \beta - \beta \Lambda^T = 0, \quad \partial_\nu B = 0. \quad (15)$$

Разложим функции α, β, B в ряд Фурье по переменным x :

$$\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \alpha_k e^{i\langle k, x \rangle}, \quad \beta = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \beta_k e^{i\langle k, x \rangle}, \quad B = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} B_k e^{i\langle k, x \rangle}.$$

Равенства (15) принимают вид

$$\alpha_k (i\langle \nu, k \rangle + \Lambda) = 0, \quad \beta_k (i\langle \nu, k \rangle - \Lambda^T) = 0, \quad i\langle \nu, k \rangle B = 0.$$

Так как собственные значения матрицы Λ не лежат на мнимой оси, получаем

$$\alpha = \beta = 0, \quad B = \text{const}. \quad (16)$$

Диффеоморфизм φ поднимается до накрывающего диффеоморфизма $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сохраняющего решетку $2\pi\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Покажем, что $\tilde{\varphi}$ представляется в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi) = b + C\xi + \tilde{f}(\xi),$$

где $b \in \mathbb{R}^n$ и $C \in \text{GL}(n, \mathbb{Z})$ постоянны, $|\det C| = 1$, функция $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 2π -периодична по каждому аргументу и

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\xi) d\xi = 0. \quad (17)$$

Действительно, так как для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ разность $\tilde{\varphi}(\xi + m) - \tilde{\varphi}(\xi)$ лежит в $\mathbb{Z}^n$ и не зависит от $\xi \in \mathbb{R}^n$, определено отображение $\psi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ по формуле $\psi(m) = \tilde{\varphi}(\xi + m) - \tilde{\varphi}(\xi)$. Отображение ψ , очевидно, линейно и изоморфно автоморфизму гомотопической группы π_1 тора $\mathbb{T}^n$, порожденному диффеоморфизмом φ . В частности, линейное отображение ψ невырождено и, следовательно, задается некоторой целочисленной невырожденной матрицей C с определителем ± 1 . Легко проверить, что функция $\tilde{\varphi}(\xi) - C\xi$ периодична по ξ . Остается положить

$$b = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} (\tilde{\varphi}(\xi) - C\xi) d\xi, \quad \tilde{f}(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi) - C\xi - b.$$

Функция $\tilde{f}$ опускается до функции $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Из условия (2) следует равенство

$$dv \wedge du + dy \wedge dx = dv' \wedge du' + dy' \wedge dx'. \quad (18)$$

Пользуясь соотношениями (12), (16), (18), получаем

$$B dy \wedge d\varphi(x) = dy \wedge dx. \quad (19)$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = b + Cx + f(x). \quad (20)$$

Из формул (19), (20) получаем

$$B dy \wedge \left(C + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) dx = dy \wedge dx. \quad (21)$$

Так как матрица B постоянна и невырождена, матрица $\partial f/\partial x$ также постоянна. Среднее от $\partial f/\partial x$ равно нулю, следовательно, $\partial f/\partial x = 0$ и функция f постоянна. В силу (17) $f = 0$. Более того, из равенства (21) вытекает, что BC^T – единичная матрица.

Из доказанного выше следует, что замену (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u' &= Pu + Qv + Ry + O_2(u, v, y), & v' &= \tilde{P}u + \tilde{Q}v + \tilde{R}y + O_2(u, v, y), \\ y' &= By + O_2(u, v, y), & x' &= b + (B^{-1})^T x + O(u, v, y), \end{aligned} \quad (22)$$

где $P, Q, R, \tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ – матричнозначные функции переменных x .

Ограничим первое равенство в (22) на устойчивую сепаратрису. На Γ^+ имеем

$$u = O_2(v), \quad y = O_2(v), \quad u' = O_2(v'), \quad y' = O_2(v'),$$

следовательно, $O_2(v') = O_2(v) + Qv$. Так как на устойчивой сепаратрисе $O_2(v) = O_2(v')$, матрица $Q = Q(x)$ тождественно равна нулю. Аналогично, $\tilde{P} \equiv 0$.

Вычислим скобку Пуассона $\{u', H'\}$ двумя способами. Во-первых,

$$\{u', H'\} = \Lambda' u' + O_2(u', v', y') = \Lambda' Pu + Ry + O_2(u, v, y).$$

Во-вторых,

$$\{u', H'\} = \{Pu + Ry + O_2(u, v, y), H\} = -\partial_\nu Pu - P\Lambda u + O_2(u, v, y).$$

Таким образом, $R = 0$ и выполняется равенство

$$\partial_\nu P + P\Lambda - \Lambda' P = 0. \quad (23)$$

Аналогично, $\tilde{R} = 0$. Так как замена переменных (22) невырождена, $\det P \neq 0$.

Раскладывая матрицу P в ряд Фурье

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}^l} P_k e^{\langle k, x \rangle},$$

уравнение (23) можно преобразовать следующим образом:

$$i\langle \nu, k \rangle P_k + P_k \Lambda - \Lambda' P_k = 0.$$

Таким образом, матрица P_k является собственным вектором оператора $P_k \rightarrow \Lambda' P_k - P_k \Lambda$ с собственным значением $i\langle \nu, k \rangle$. Как известно, собственные векторы такого оператора имеют вид $p_{js} = b'_j a_s$, где столбцы b'_j (строки a_s) – правые (левые) собственные векторы оператора $\Lambda' (\Lambda)$: $\Lambda' b'_j = \lambda'_j b'_j$, $a_s \Lambda = \lambda_s a_s$. Таким образом,

$$\Lambda' p_{js} - p_{js} \Lambda = (\lambda'_j - \lambda_s) p_{js}, \quad 1 \leq j, s \leq l.$$

Рассмотрим подмножество E множества упорядоченных пар (j, s) , $1 \leq j, s \leq l$, такое, что $(j, s) \in E$ в том и только том случае, когда существует вектор $k_{js} \in \mathbb{Z}^l$ такой, что $\lambda'_j - \lambda_s = i\langle \nu, k_{js} \rangle$. Тогда имеет место равенство

$$P = \sum_{(j,s) \in E} e^{i\langle k_{js}, x \rangle} \mu_{js} p_{js}, \quad (24)$$

где μ_{js} – некоторые постоянные. Исключим из множества E элементы, соответствующие нулевым μ_{js} . Обозначим получившееся множество символом E_* . Для любой пары (j, s) положим $\text{pr}_1(j, s) = j$, $\text{pr}_2(j, s) = s$. Так как матрица P невырождена, имеем $\text{pr}_1 E = \text{pr}_2 E = \{1, \dots, l\}$. Действительно, пусть, например, $\text{pr}_1 E \neq \{1, \dots, l\}$. Тогда из (24) следует, что столбцы матрицы P линейно зависимы.

Равенство $\tilde{Q} = (P^{-1})^T$ следует из каноничности замены (22).

Лемма 2.1 доказана.

6. Доказательство леммы 3.1. 1) Зафиксируем вектор $a \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, векторное поле w_a^- достаточно построить лишь в малой окрестности V тора N на Γ^- , так как затем w_a^- может быть разнесено на всю сепаратрису Γ^- с помощью фазового потока поля χ . Метод построения w_a^- в окрестности V достаточно стандартен. Он основан на том, что $w_a^-|_V$ – неподвижная точка некоторого сжимающего оператора в специально выбранном пространстве векторных полей на V .

Вблизи тора N многообразие Γ^- имеет вид (3). Поэтому переменные u, x являются координатами на ней, а переменные v, y выражаются через u, x и в этом пункте несущественны.

В дальнейшем мы будем считать окрестность V комплексной. Чтобы определить ее, рассмотрим следующие комплексные окрестности тора N на комплексифицированной сепаратрисе Γ^- :

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(u, x \bmod 2\pi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n : |u| < \alpha, |\operatorname{Im} x| < \beta\}, \\ V_2 &= \{(u, x \bmod 2\pi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n : |u| < \alpha, |\operatorname{Im} x| < 2\beta\}, \end{aligned}$$

где α и β – достаточно малые положительные постоянные, а $|\cdot|$ – стандартная евклидова норма.

Из определения гиперболического тора следует, что ограничение χ^- векторного поля χ на V_2 удовлетворяет соотношению

$$\chi^- = (\lambda u + u^2 f) \frac{\partial}{\partial u} + \left\langle \nu + u^2 g, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

где функции $f: V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ и $g: V_2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ аналитичны. Положим

$$F = \max_{V_2} |f|, \quad G = \max_{V_2} |g_j|.$$

Пусть Q_t^- – ограничение на V_2 фазового потока поля χ .

ЛЕММА 6.1. *Предположим, что α достаточно мало. Точнее,*

$$\frac{\alpha G}{\lambda} < \frac{1}{4}, \quad 25F\alpha^2 < 32\lambda\beta.$$

Тогда верны следующие утверждения.

1) *Для любой точки $(u_0, x_0) \in V_2$ и $-\infty \leq t < \infty$ таких, что при всех $s \in (0, t)$ траектория $Q_s^-(u_0, x_0)$ лежит в V_2 , выполняются оценки*

$$\frac{3}{4} \leq \left| \frac{u(t)}{u_0 e^{\lambda t}} \right| < \frac{5}{4}, \tag{25}$$

$$|x(t) - x_0 - \nu t| < \beta. \tag{26}$$

2) *Если*

$$V = \bigcup_{t \leq 0} Q_t^-(W_R), \tag{27}$$

то $V_1 \subset V \subset V_2$.

Доказательство леммы 6.1 приведено ниже. В дальнейшем мы будем считать, что окрестность V определена с помощью равенства (27).

Пусть Π – линейное пространство аналитических векторных полей на V класса $O(u^2)$. Определим на Π норму $\|\cdot\|$ следующим образом. Для любого

$$\xi = \varphi(u, x) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^n \psi_j(u, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Pi$$

положим

$$\|\xi\| = \max \left\{ \sup_V |u^{-2} \varphi(u, x)|, \sup_V |u^{-2} \psi(u, x)| \right\}.$$

Пространство $(\Pi, \|\cdot\|)$ банахово. Зафиксируем достаточно большое $T > 0$. Для любого $\xi \in \Pi$ положим

$$J_{a,T}(\xi) = (Q_T^-)_* \left(\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \xi \right) - \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

где $(Q_T^-)_*$ – дифференциал отображения Q_T^- .

ЛЕММА 6.2. 1) Образ отображения $J_{a,T}$ лежит в Π .

2) Если $N > 0$ достаточно велико, отображение $J_{a,T}$ сжимающее.

Мы докажем лемму 6.2 ниже, а сейчас вернемся к доказательству леммы 3.1. В силу леммы 6.2 при больших T оператор $J_{a,T}$ имеет единственную неподвижную точку ξ_a на Π . Покажем, что векторное поле

$$w_a^- = \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \xi_a$$

искомое.

Равенство

$$w_a^- = \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + O(u^2) \quad (28)$$

очевидно. Условие коммутирования векторных полей w_a^- и χ эквивалентно уравнению $w_a^- = (Q_T^-)_*(w_a^-)$, где $T > 0$ произвольно. Это уравнение может быть записано в виде $J_{a,T}(\xi) = \xi$. Следовательно, векторное поле (28) действительно коммутирует с χ . Единственность w_a^- следует из единственности неподвижной точки сжимающего оператора.

2) Линейность отображения $a \rightarrow w_a^-$ проверяется непосредственно. Действительно, пусть $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$(Q_T^-)_* \left(\left\langle a_j, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \xi_{a_j} \right) - \left\langle a_j, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \xi_{a_j}, \quad j = 1, 2.$$

Складывая эти два равенства и пользуясь линейностью отображения $(Q_T^-)_*$, получаем

$$(Q_T^-)_* \left(\left\langle a_1 + a_2, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \xi_{a_1} + \xi_{a_2} \right) - \left\langle a_1 + a_2, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \xi_{a_1} + \xi_{a_2},$$

следовательно, $\xi_{a_1} + \xi_{a_2} = \xi_{a_1+a_2}$. Равенство $\xi_{\lambda a} = \lambda \xi_a$, $\lambda \in \mathbb{R}$, проверяется аналогично.

Если точка $p^- \in \Gamma^- \setminus N$ лежит достаточно близко к тору N , то тривиальность ядра отображения

$$a \rightarrow w_a^-(p^-) \quad (29)$$

следует из соотношения (28). Так как любая точка $p^- \in \Gamma^-$ является образом при отображении Q_T^- некоторой точки, лежащей вблизи N ($T > 0$ велико), тривиальность ядра отображения (29) при произвольном p^- следует из инвариантности векторного поля w_a^- относительно диффеоморфизма Q_T^- . Аналогично доказывается, что образ отображения (29) не содержит $\chi(p^-)$.

3) Покажем, что w_a^- и $w_{a''}^-$ коммутируют. Действительно, коммутатор $w = [w_{a'}^-, w_{a''}^-]$ коммутирует с χ (в силу тождества Якоби) и имеет порядок $O(u^2)$, следовательно, $w = w_0^- = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1. Отображение Q_t^- является сдвигом на время t вдоль траекторий системы

$$\dot{x} = \nu + u^2 f, \quad \dot{u} = \lambda u + u^2 g. \quad (30)$$

Будем считать, что $t > 0$ и $u_0 > 0$. (При $t \leq 0$ и (или) $u_0 \leq 0$ рассуждения аналогичны.) В силу неравенства $-G \leq g|_{V_2} \leq G$ функция $u(t)$ оценивается следующим образом:

$$u_-(t) \leq u(t) \leq u_+(t), \quad (31)$$

где $u_{\pm}(t)$ – решения уравнений

$$\dot{u}_{\pm} = \lambda u_{\pm} \pm u_{\pm}^2 G, \quad u_{\pm}(0) = u_0. \quad (32)$$

Уравнения (32) решаются явно:

$$u_{\pm}(t) = \frac{u_0 e^{\lambda t}}{1 \pm u_0 G \lambda^{-1} (1 - e^{\lambda t})}. \quad (33)$$

Из соотношений (31), (33) получаем

$$\frac{1}{1 + u_0 G \lambda^{-1} e^{\lambda t}} \leq \left| \frac{u(t)}{u_0 e^{\lambda t}} \right| \leq \frac{1}{1 - u_0 G \lambda^{-1} e^{\lambda t}}.$$

Используя оценку $u_0 G \lambda^{-1} e^{\lambda t} \leq \alpha G \lambda^{-1} \leq 1/4$, получаем неравенство (25). Из первого уравнения системы (30) и неравенства (25) следует, что

$$|x(t) - x_0 - \nu t| \leq F \int_0^t \frac{25}{16} u_0^2 e^{2\lambda s} ds \leq \frac{25 F \alpha^2}{32 \lambda} \leq \beta.$$

Утверждение 1) леммы 6.1 доказано, докажем утверждение 2). Пусть $(u_0, x_0) \in V_1$ и $-\infty \leq t' < 0$ – минимальное время такое, что траектория системы (30) с начальными условиями (u_0, x_0) находится в области V_2 на промежутке времени $(t', 0]$.

Из оценок (25), (26) следует, что $t' = -\infty$. Лемма 6.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2. Утверждение 1) леммы 6.2 следует из соотношений

$$Q_{-T}^-(V) \subset V, \quad (Q_T^-)_* \left(\left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + u^2 \xi \right) - \left\langle a, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = O(u^2).$$

Проверим, что $J_{a,T}$ – сжимающее отображение. Для любых $\xi', \xi'' \in \Pi$ имеем

$$J_{a,T}(\xi') - J_{a,T}(\xi'') = (Q_T^-)_*(\xi' - \xi'').$$

Следовательно, достаточно проверить, что для любого $\xi \in \Pi$

$$\|(Q_T^-)_*\xi\| < q\|\xi\|, \quad q < 1.$$

Из уравнений (30) получаем следующее выражение для Q_T^- :

$$Q_T^-(u, x) = (e^{\lambda T}u + u^2\Phi(u, x), x + \nu t + u^2\Psi(u, x)), \quad (34)$$

где функции Φ и Ψ аналитические. Заметим, что Φ и Ψ зависят от параметра T . Представим вектор ξ в виде $\xi = (\xi_u, \xi_x)$, где компонента ξ_u соответствует координате u , а компонента ξ_x – координатам x . В силу (34) имеем

$$(Q_T^-)_*(\xi_u, \xi_x) = (e^{\lambda T}\xi_u + u\varphi_1(u, x)\xi_u + u^2\langle\varphi_2(u, x), \xi_x\rangle, \xi_x + u\psi_1(u, x)\xi_u + u^2\psi_2(u, x)\xi_x), \quad (35)$$

где функции $\varphi_1: V_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2: V_2 \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi_1: V_2 \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi_2: V_2 \rightarrow L(n, \mathbb{C})$ вещественно-аналитичны. Заметим, что векторное поле (35) записано в точке $(U, X) = Q_T^-(u, x)$. По определению,

$$\|\xi\| = \max\left\{\sup_V |u^{-2}\xi_u(u, x)|, \sup_V |u^{-2}\xi_x(u, x)|\right\}. \quad (36)$$

Используя (35), получаем

$$\|(Q_T^-)_*\xi\| = \max\left\{\sup_{Q_{-T}^-(V)} \left| \frac{e^{\lambda T}\xi_u(u, x) + u\varphi_1(u, x)\xi_u + u^2\varphi_2(u, x)\xi_x}{U^2} \right|, \sup_{Q_{-T}^-(V)} \left| \frac{\xi_x + u\psi_1(u, x)\xi_u + u^2\psi_2(u, x)\xi_x}{U^2} \right| \right\}. \quad (37)$$

В силу (34) имеем $U = e^{\lambda T}u + u^2\Phi(u, x)$. Пусть постоянная C такова, что

$$\begin{aligned} \sup_{V_2} |\varphi_1| &\leq C, & \sup_{V_2} |\psi_1| &\leq C, & \sup_{V_2} |\Phi| &\leq C, \\ \sup_{V_2, v \in \mathbb{C}^n} |\langle \varphi_2, v \rangle| &\leq C|v|, & \sup_{V_2, v \in \mathbb{C}^n} |\psi_2 v| &\leq C|v|. \end{aligned}$$

Выберем α и T такими, что

$$16e^{\lambda T} < 1, \quad 0 < 2\alpha \leq \min\left\{1, \frac{e^{\lambda T}}{C}\right\}. \quad (38)$$

Величина U^{-2} оценивается следующим образом:

$$|U|^{-2} \leq |u|^{-2} e^{-2\lambda T} (1 + |u| e^{-\lambda T} C)^2 \leq 4|u|^{-2} e^{-2\lambda T}. \quad (39)$$

(При получении последнего неравенства мы воспользовались соотношениями $|u| \leq \alpha$ и (38).) С помощью соотношений (39) и равенств (36), (37) получаем

$$\|(Q_T^-)_* \xi\| \leq 4e^{-\lambda T} \|\xi\| (1 + C\alpha e^{-\lambda T} + C\alpha^2 e^{-\lambda T}).$$

В силу неравенств (38) последнее выражение не превосходит

$$4e^{-\lambda T} \|\xi\| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \|\xi\|.$$

Лемма 6.2 доказана.

Автор выражает благодарность С. В. Болотину за полезные обсуждения и ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

Поступило
27.06.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 1–3 // Избр. труды. Т. 1–2. М.: Наука, 1971, 1972.
- [2] Holmes P. J., Marsden J. E. Melnikov's method and Arnold diffusion of perturbations of integrable systems // J. Math. Phys. 1982. V. 23. № 4. P. 669–675.
- [3] Wiggins S. Global bifurcations and chaos. Analytical methods. Appl. Math. Sci. Berlin–New York: Springer Verlag, 1988.
- [4] Болотин С. В. Условие интегрируемости по Лиувиллю гамильтоновых систем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1986. № 3. С. 58–64.
- [5] Treshev D. Hyperbolic tori and asymptotic surfaces in Hamiltonian systems // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 1. P. 93–110.
- [6] Lazutkin V., Svanidze N. V., Gelfreich V. G. Refined formula to separatrix splitting for the standard map // Phys. Rev. D. 1994. V. 71. № 2. P. 101–131.
- [7] Graff S. M. On the conservation of hyperbolic tori for Hamiltonian systems // J. Differential Equations. 1974. V. 15. № 1. P. 1–69.
- [8] Zehnder E. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. I // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. № 1. P. 91–140; II // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29. № 1. P. 49–111.
- [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [10] Jorba A., Simo C. On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients // J. Differential Equations. 1992. V. 98. P. 111–124.
- [11] Jorba A., Simo C. On quasiperiodic perturbations of elliptic equilibrium points // CIAM J. Math. Anal. (to appear).