Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Тужилин, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 907–921

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 04:27:38

УДК 514.112.4+519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ БИНАРНЫЕ ДЕРЕВЬЯ С ПРАВИЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ: СЛУЧАЙ СКЕЛЕТОВ С ПЯТЬЮ КОНЦАМИ

А. А. Тужилин

В работе изучаются локально минимальные бинарные деревья, затягивающие вершины правильных многоугольников. Описание дается на двойственном языке – языке диагональных триангуляций многоугольников. Рассматриваются диагональные триангуляции специального вида, называемые скелетами. Показывается, что плоские бинарные деревья, двойственные к скелетам с пятью концами, не встречаются среди локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных многоугольников.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В настоящей статье мы продолжаем исследование локально минимальных плоских сетей, затягивающих вершины правильных многоугольников, начатое в [1] и [2]. Напомним, что локально минимальные сети являются обобщением абсолютно минимальных деревьев, возникающих при решении знаменитой проблемы Ферма–Ярника–Кесслера.

ЗАДАЧА. Среди всех сетей (одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество точек плоскости, называемое граничным множеством, найти сеть наименьшей длины.

Эта задача обычно называется *проблемой Штейнера*, в честь швейцарского ученого Якоба Штейнера (1796–1863). Однако, как было отмечено в [3], простейший вариант этой проблемы для случая, когда граничное множество состоит из трех точек, возник еще в работах Ферма (1601–1665). В современном виде проблема была сформулирована Ярником и Кесслером в 1934 году [4]. Само же название – проблема Штейнера – укоренилось благодаря популярности замечательной книги Куранта и Роббинса “Что такое математика”, в которой случай Ферма был назван проблемой Штейнера, а проблема Ярника и Кесслера формулировалась как обобщение проблемы Штейнера. Из-за возникшей путаницы сегодня подавляющее большинство специалистов пользуется терминологией, связанной с именем Штейнера.

Работа выполнена при частичной поддержке Национального Центра научных исследований Франции, Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Комитета по развитию науки, технологии и экономики (FAPESP) штата Сан Пауло (Бразилия), грант № 93/0248–7. Работа в рамках последнего гранта проходила в Математическом институте (IMECC) университета штата Сан Пауло в Кампинасе (UNICAMP).

Хорошо известна локальная структура локально минимальных сетей, в частности, абсолютно минимальных деревьев. Напомним, что каждая такая сеть составлена из отрезков – ребер сети, стыкующихся в вершинах сети под углами не меньше, чем 120° . В частности, в одной вершине не может встречаться более трех отрезков (степень каждой вершины не превосходит 3). Кроме того, в случае локально минимальных бинарных деревьев известен знаменитый алгоритм Мелзака [5], позволяющий определить: можно ли данное граничное множество затянуть локально минимальной сетью данной топологии; и если да, то построить эту сеть.

Учитывая тот факт, что сеть наименьшей длины является деревом и каждое плоское дерево, степени вершин которого не превосходят 3, может быть представлено в виде объединения бинарных деревьев (называемых невырожденными компонентами), стыкующихся в вершинах степени 2 исходного дерева, можно (перебирая всевозможные топологии таких деревьев, запуская для каждой невырожденной компоненты выбранного дерева алгоритм Мелзака, вычисляя, в случае удачи, длину полученной сети и выбирая из построенных сетей дерево наименьшей длины) построить, в конце концов, абсолютно минимальное дерево. И только что описанный грубый алгоритм, и более тонкие алгоритмы оказываются NP-полными [6], [7]. Значит, скорее всего, не существует полиномиального алгоритма, решающего проблему Ферма–Ярника–Кесслера. Отметим, что современные компьютеры могут эффективно строить абсолютно минимальные деревья, лишь когда граничное множество содержит не более 30 точек, что достаточно мало для практически значимых задач [7]. Поэтому возникает потребность в поиске геометрических свойств граничных множеств, которые позволяли бы а priori отсеять большее количество возможных топологий сетей.

В предыдущих статьях [1], [2], [8]–[11] А. О. Иванов и А. А. Тужилин построили полное описание локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей и применили созданную теорию к случаю, когда граница – множество вершин правильного многоугольника (в дальнейшем называемая правильной границей). Чтобы сформулировать основной результат данной работы, дадим следующие определения.

Сетью мы называем связанное подмножество евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, представимое в виде плоского графа, ребра которого – гладкие регулярные кривые. *Длиной сети* называется сумма длин всех ребер этой сети. Ясно, что длина сети не зависит от ее представления плоским графом. В дальнейшем, формулируя различные результаты, касающиеся сетей, будем предполагать, не оговаривая каждый раз, что эти результаты имеют место для некоторого представления сети в виде плоского графа.

Фиксируем некоторое конечное множество M точек плоскости $\mathbb{R}^2$. Мы говорим, что сеть Γ *затягивает* M , или M является *границей сети* Γ , если M – подмножество множества вершин из Γ . Сеть, имеющая наименьшую длину среди всех сетей, затягивающих множество M , называется *абсолютно минимальной сетью с границей* M . Сеть Γ называется *локально минимальной сетью с границей* $\partial\Gamma$, если каждая точка P из Γ обладает такой замкнутой окрестностью U , что пересечение $U \cap \Gamma$ является абсолютно минимальной сетью с границей $(U \cap \partial\Gamma) \cup (\partial U \cap \Gamma)$. Как отмечалось выше, абсолютно минимальные сети являются также и локально минимальными. Так как мы собираемся изучать только локально минимальные сети, то в дальнейшем, для краткости, будем, как правило, называть локально минимальные сети просто минимальными.

Следующее предложение полностью описывает локальную структуру минимальных сетей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Сеть Γ с границей M минимальна, если и только если для одного из ее представлений имеют место следующие свойства:*

- 1) *все ребра сети – прямолинейные отрезки;*
- 2) *угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше 120° ;*
- 3) *все вершины степени 1 и 2 являются граничными, т.е. принадлежат M .*

В настоящей работе рассматриваются только минимальные сети, являющиеся деревьями и не имеющие вершин степени 2. Из предложения 1.1 следует, что степени вершин таких сетей равны 1 или 3, т.е. эти сети являются бинарными деревьями (или, иначе, 2-деревьями). Более того, все ребра таких сетей – прямолинейные отрезки, встречающиеся в вершинах степени 3 под равными углами величины 120° .

Кроме того, нас будут особенно интересовать минимальные 2-деревья, имеющие выпуклую и, в частности, правильную границу. Напомним, что граничное множество M сети Γ называется *выпуклым (правильным)*, если M – множество вершин выпуклого (правильного) многоугольника. Легко показать, что вершины степени 3 минимального дерева с выпуклой границей не являются граничными. В частности, у минимального бинарного дерева, затягивающего вершины выпуклого многоугольника, граница состоит в точности из всех вершин степени 1.

В соответствии со сделанными замечаниями для любого 2-дерева Γ (плоского или минимального) вершины степени 1 будем называть *граничными*, а вершины степени 3 – *внутренними*. Ребро из Γ , инцидентное граничной вершине, будем также называть *граничным*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, – *внутренним*.

Пусть Γ – произвольная сеть. Мы говорим, что Γ имеет *минимальную реализацию*, если существует минимальная сеть Γ_m , планарно эквивалентная Γ . Если при этом можно найти минимальную сеть Γ_m с выпуклой (соответственно правильной) границей, то будем говорить, что Γ имеет *выпуклую минимальную реализацию (правильную минимальную реализацию)*, или *СМ-реализацию (RM-реализацию)*.

Оказывается, исследование локально минимальных бинарных деревьев, особенно в случае выпуклых границ, чрезвычайно удобно проводить на двойственном языке, объектами которого являются диагональные триангуляции многоугольников. Напомним, что по каждому плоскому бинарному дереву можно построить естественным образом триангуляцию диагоналями некоторого (например, выпуклого или правильного) многоугольника. Такие триангуляции мы называем *диагональными*. Обратно, двойственный граф произвольной диагональной триангуляции является плоским бинарным деревом. Треугольники таких триангуляций будем называть *ячейками*. (Точные определения см., например, в [12].)

Пусть T – произвольная диагональная триангуляция многоугольника W и Δ – любая ее ячейка. Ячейку Δ назовем *крайней*, если, по меньшей мере, две ее стороны являются сторонами из W . Ячейка Δ называется *внутренней*, если ни одна из ее сторон не является стороной из W . Если две ячейки пересекаются по стороне, то мы называем их *смежными* и говорим, что одна из них *примыкает* к другой. Крайняя ячейка, примыкающая к внутренней, называется *наростом*, а триангуляция T без наростов – *скелетом*. Каждую триангуляцию T можно разложить на скелет и наросты с помощью следующего правила: для каждой внутренней ячейки триангуляции T из всех примыкающих к ней наростов, если они есть, надо выбросить ровно один. Легко проверить, что полученная триангуляция T' уже не будет содержать наростов, т.е. T' является ске-

летом, который называется скелетом триангуляции T . Отметим, что построенное разложение, вообще говоря, неоднозначно.

Мы говорим, что T имеет *выпуклую минимальную реализацию* (*правильную минимальную реализацию*), если ее двойственный граф обладает такой реализацией. В [1], [8]–[11] для триангуляций T , обладающих выпуклой минимальной реализацией, были описаны все скелеты (оказалось, что они устроены достаточно просто), а также способы крепления к ним наростов, при которых полученные триангуляции по-прежнему будут обладать выпуклой минимальной реализацией. Интересным следствием из [1], [8]–[11] является тот факт, что скелет, обладающий выпуклой минимальной реализацией, содержит не более шести крайних ячеек, и значит, не более четырех внутренних ячеек. Кроме того, в [1] как следствие общей теории были описаны все скелеты с не более чем тремя крайними ячейками, обладающие правильной минимальной реализацией. В [2] было показано, что скелеты с четырьмя крайними ячейками не имеют правильной минимальной реализации.

В настоящей работе воспользуемся техникой, разработанной в [1] и [2], для доказательства следующей теоремы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Скелеты с пятью крайними ячейками не имеют правильной минимальной реализации.*

Автор благодарен академику РАН профессору А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, а также к.ф.-м.н. А. О. Иванову за многолетнее плодотворное сотрудничество.

2. Предварительные результаты. Приведем основные результаты, полученные в [1], [2] и [8]–[11].

Для изучения минимальных 2-деревьев очень полезным оказалось понятие числа вращения, введенное А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [8]. Мы приведем наглядное неформальное определение числа вращения (формальное определение см. в [8]).

Рассмотрим произвольное плоское 2-дерево Γ , выберем некоторую пару (a, b) его ребер. Пусть γ – единственный путь в Γ , соединяющий эти ребра. При “движении” по пути γ от ребра a к ребру b в каждой внутренней вершине из γ мы “поворачиваем” или налево, или направо. Разность числа левых и правых поворотов во всех внутренних вершинах пути γ называется *числом вращения упорядоченной пары (a, b)* и обозначается $\text{tw}(a, b)$. *Числом вращения $\text{tw} \Gamma$ бинарного дерева Γ* называется максимум чисел вращения $\text{tw}(a, b)$, взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер из Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Плоское 2-дерево Γ имеет выпуклую минимальную реализацию тогда и только тогда, когда $\text{tw} \Gamma \leq 5$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат предложения 2.1 может быть обобщен как на случай минимальных 2-деревьев с произвольной границей, так и на случай взвешенных минимальных 2-деревьев (см. [13], [14]).

Мы уже говорили, что плоские 2-деревья могут быть описаны на двойственном языке, а именно, на языке диагональных триангуляций плоских многоугольников: по каждой диагональной триангуляции T многоугольника W можно построить двойственную сеть Γ_T , являющуюся плоским бинарным деревом, и обратно, по каждому плоскому бинарному дереву Γ можно построить диагональную триангуляцию некоторого плоского многоугольника W такую, что двойственная сеть Γ_T этой триангуляции планарно эквивалентна Γ (подробнее, см. в [12]).

Введем следующее соглашение: если двойственная сеть диагональной триангуляции T обладает некоторым свойством, то мы будем говорить, что сама триангуляция T обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из T называется *связной*, если пересечение двойственной сети Γ_T с этими ячейками связно. Будем говорить, что диагональная триангуляция T имеет *минимальную реализацию* (соответственно *выпуклую минимальную реализацию*, *правильную минимальную реализацию*), если такой реализацией обладает ее двойственная сеть.

Дадим теперь описание диагональных триангуляций многоугольников W , имеющих выпуклую минимальную реализацию. В соответствии с предложением 2.1 диагональная триангуляция T обладает выпуклой минимальной реализацией, если и только если число вращения двойственной сети Γ_T не превосходит 5. Класс таких диагональных триангуляций традиционно обозначаем через $\mathcal{WP}_5$. Для удобства изложения, ограничимся рассмотрением лишь тех многоугольников W , которые содержат не менее пяти вершин (случаи треугольника и четырехугольника очевидны). Таким образом, каждая изучаемая нами диагональная триангуляция содержит не менее трех ячеек.

Во введении описаны некоторые структурные элементы диагональных триангуляций, в частности, разложение диагональной триангуляции на скелет и наросты. Для формулировки основной классификационной теоремы, описывающей все диагональные триангуляции, имеющие выпуклую минимальную реализацию, понадобятся также следующие понятия.

Пусть T – произвольная диагональная триангуляция многоугольника W , $T = S \cup \{\Delta_i\}$ – разложение триангуляции T на скелет S и наросты Δ_i . Связные компоненты множества внутренних ячеек скелета S называются *узлами ветвления*, а связные компоненты скелета S , из которого выброшены все внутренние ячейки, называются *линейными участками*. Линейный участок, содержащий крайнюю ячейку, называется *концом*, а не содержащий – *перегородкой*. Итак, мы построили разложение произвольной диагональной триангуляции на узлы ветвления, линейные участки и наросты. Вновь отметим, что это разбиение, вообще говоря, неоднозначно.

Следующее предложение полностью описывает все возможные узлы ветвления скелетов, имеющих выпуклую минимальную реализацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Узлы ветвления скелетов, имеющих выпуклую минимальную реализацию, могут быть ровно пяти типов, приведенных на рис. 1.*

Рис. 1. Узлы ветвления скелетов, имеющих СМ-реализацию

Опишем теперь линейные участки таких скелетов. Чтобы описание было наглядным, полезно рассматривать диагональные триангуляции специального вида, а именно, так

называемые паркеты. Диагональная триангуляция, все ячейки которой – правильные (конгруэнтные) треугольники, называется *паркетом*. Следующее предложение показывает, что при изучении минимальных 2-деревьев с выпуклой границей можно ограничиться паркетами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Каждое плоское 2-дерево с числом вращения, не превосходящим 5, планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

Итак, в дальнейшем всегда будем предполагать, что рассматриваемые диагональные триангуляции являются паркетами.

Пусть S – скелет и L – его линейный участок. Проведем во всех некрайних ячейках скелета S их средние линии, соединяющие внутренние стороны этих ячеек. В крайних ячейках проведем средние линии, параллельные уже построенным в смежных ячейках. Все проведенные средние линии называются *позвонками*. На объединении всех позвонков введем структуру графа, объявив ребрами максимальные связные прямолинейные совокупности позвонков из не внутренних ячеек, а также все позвонки из внутренних ячеек. Полученный плоский граф называется *позвоночником скелета S* . Далее пересечение позвоночника скелета S с каждым его линейным участком L называется *позвоночником линейного участка L* .

Следующее предложение [8] описывает все линейные участки скелетов, обладающих СМ-реализацией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Позвоночник каждого линейного участка L скелета, обладающего СМ-реализацией, однозначно проектируется на прямую, параллельную некоторой стороне произвольной ячейки.*

Прямая из предложения 2.4 называется *направляющей линейного участка L* . Отметим, что с точностью до параллельности существует ровно три прямых, каждая из которых параллельна какой-нибудь стороне произвольной ячейки. В дальнейшем, говоря о направляющих, будем отождествлять параллельные прямые, поэтому имеет смысл говорить, что линейный участок обладает одной направляющей (т.е. все направляющие линейного участка параллельны). Принимая во внимание сделанные замечания и соглашение, отметим, что существует не более трех направляющих. Если линейный участок обладает тремя направляющими, то он называется *змеей*, если двумя – *лестницей*, если одной – *ломаной змеей* (см. рис. 2). Таким образом, описаны основные структурные элементы паркетов, обладающих СМ-реализацией: наросты, узлы ветвления и линейные участки.

Опишем, как эти элементы крепятся друг к другу. Оказывается, каждый скелет, обладающий СМ-реализацией, можно получить из скелетов специального канонического вида, выбрасывая из последних некоторое количество ячеек. Операция “выбрасывания” называется *редукцией*. Различаются редукции I-го и II-го типа.

Пусть D – некоторый паркет. Редукция I-го типа состоит в разрезании паркета D вдоль некоторой диагонали и отбрасывания одной из двух компонент. Чтобы описать редукцию II-го типа, отметим, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между внутренними ребрами двойственной сети и диагоналями паркета. Итак, редукция II-го типа состоит в следующем: выберем две диагонали паркета D такие, что число вращения между соответствующими им внутренними ребрами двойственной сети равно 0; разрежем паркет D вдоль этих диагоналей; выбросим ту из трех образованных компонент, которая пересекается с обеими оставшимися компонентами; с помо-

Рис. 2. Линейные участки скелетов, обладающих СМ-реализацией

пью параллельного переноса склеим оставшиеся две компоненты по диагоналям разреза. Можно показать, что обе эти операции не разрушают свойство скелета обладать СМ-реализацией.

Теперь мы можем сформулировать теорему из [8], классифицирующую скелеты, которые обладают СМ-реализацией.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Каждый скелет из $\mathcal{WP}_5$ может быть получен кратным применением редукции к скелету одного из трех канонических типов, схема которых приведена на рис. 3. Три параллельных черточка обозначают ломаную змею, единственная направляющая которой параллельна черточкам; две черточки, пересекающиеся под углом 60° , обозначают лестницу с направляющими, параллельными черточкам; одна черточка соответствует змее, позвоночник которой параллелен черточке; и, наконец, кружок соответствует узлу ветвления, состоящему из одной ячейки.*

Рис. 3. Схема классифицирующих скелетов

Из предложения 2.5 вытекает интересное следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Скелет из $\mathcal{WP}_5$ содержит не более шести концов, не более трех перегородок и не более четырех внутренних ячеек (а значит, не более четырех узлов ветвления).*

Ориентируем позвоночник каждого конца L скелета $S \in \mathcal{WP}_5$ в сторону крайней ячейки, принадлежащей этому концу (для S , не содержащего внутренних ячеек, существует две таких ориентации). Тогда направления ребер ориентированного таким образом позвоночника назовем *направлениями конца L* . Ясно, что всего существует не более шести различных направлений, образующих правильный шестиугольник, вписанный в единичную окружность направлений. Такой шестиугольник назовем *шестиугольником направлений*.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Каждый конец скелета S из $\mathcal{WP}_5$ имеет не более трех различных направлений, причем эти направления последовательные. Множества направлений, соответствующих любым двум различным концам из S , не пересекаются.*

Если ориентировать границу скелета S , скажем, против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве концов, а также ориентировать шестиугольник направлений против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на семействе множеств направлений концов, то оба возникших порядка будут согласованы: последовательные концы будут иметь последовательные множества направлений.

Так как мы в дальнейшем будем заниматься только скелетами, то теорему, описывающую возможные расположения наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{WP}_5$, приводить не будем, а заинтересованного читателя вновь отсылаем к [1], [8]–[12].

Приведем теперь результаты из [1] и [2], где изучались минимальные 2-деревья с правильной границей, или, иными словами, 2-деревья, обладающие RM-реализацией.

Скелет называется *линейным*, если он не содержит узлов ветвления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Линейный скелет из $\mathcal{WP}_5$ имеет RM-реализацию тогда и только тогда, когда он является змеей.*

Скелет с тремя концами имеет RM-реализацию на правильном n -угольнике тогда и только тогда, когда $n = 6k + 3$, все концы скелета – змеи, состоящие из одинакового числа ячеек, и скелет инвариантен относительно поворота на 120° вокруг центра единственной содержащейся в нем внутренней ячейки.

Скелеты с четырьмя концами не имеют RM-реализации.

Далее опишем некоторые общие свойства скелетов, допускающих RM-реализацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий RM-реализацию. Тогда все концы скелета S – змеи.*

Следующее предложение описывает перегородки специального вида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Пусть S – скелет из $\mathcal{WP}_5$, имеющий не менее четырех концов и обладающий RM-реализацией. Пусть Z_1 и Z_2 – два его конца-змеи, инцидентные внутренней ячейке Δ скелета S . Предположим, что направления концов Z_1 и Z_2 составляют угол 60° . Тогда скелет S не имеет инцидентной Δ*

перегородки. Иными словами, внутренняя ячейка Δ входит в состав некоторого узла ветвления, состоящего не менее, чем из двух ячеек.

Далее мы приведем результаты, описывающие возможные длины боковин скелетов, имеющих RM-реализацию. Первые результаты этого типа были получены в [1], а их усиленный вариант, приводимый ниже, – в [2].

Граничная сторона скелета называется *концевой*, если она пересекается с позвоночником. Замыкания связных компонент границы скелета, из которой выброшены все граничные ребра, называются *боковинами скелета*. Количество граничных ребер скелета, входящих в боковину, называется *длиной боковины*. Количество всех граничных ребер скелета называется *длиной границы скелета*.

Граничное ребро двойственной сети скелета, приходящее на концевую сторону, и соответствующее ребро произвольной минимальной реализации этого скелета также назовем *концевыми*. Остальные граничные ребра двойственной сети и соответствующей минимальной реализации назовем *отростками*.

Пусть S – произвольный скелет и Γ – некоторая его минимальная реализация, затягивающая множество M . Граничную вершину двойственной сети Γ_S , инцидентную концевому ребру, а также соответствующую вершину из M , назовем *концевыми*.

Везде ниже мы предполагаем, что все рассматриваемые скелеты не являются линейными, т.е. имеют, по крайней мере, одну внутреннюю ячейку, и значит, не менее трех концов.

Пусть S – скелет из $\mathcal{WP}_5$, обладающий RM-реализацией, и $\Gamma = \Gamma_S$ – его двойственная сеть. Обозначим через e и a концевое ребро и смежный с ним отросток 2-дерева Γ , соответствующие некоторому концу-змеи Z скелета S . Будем рассматривать e и a как векторы, выходящие из общей для них внутренней вершины сети Γ . Считая, что плоскость канонически ориентирована, дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индексом* $\text{ind}(Z)$ *конца* Z назовем число, равное 1, если репер (a, e) положительно ориентирован, и -1 – в противном случае.

Пусть Z и Z' – концы-змеи скелета S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индексом* $\text{ind}(Z, Z')$ *упорядоченной пары* (Z, Z') *концов* Z и Z' называется полуразность $\frac{1}{2}[\text{ind}(Z') - \text{ind}(Z)]$.

Ясно, что индекс пары концов может принимать лишь три значения: -1 , 0 и 1 . В первом случае говорят, что концы *смотрят наружу*, во втором – концы *смотрят в одну сторону*, в третьем – концы *смотрят внутрь*.

Пусть (Z, Z') – упорядоченная пара концов-змей скелета S . *Углом от* Z *к* Z' назовем величину дуги единичной окружности направлений, движение по которой от направления первого конца Z к направлению второго конца Z' происходит против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении.

Пусть B – произвольная боковина скелета S . Так как мы предполагаем, что скелет S не является линейным, то существует ровно два конца Z и Z' , пересекающихся с боковиной B . Более того, $B \cap Z$ и $B \cap Z'$ – связные фрагменты ломаной B , содержащие граничные для B ребра. Будем говорить, что боковина B *порождена концами* Z и Z' , а пересечения $B \cap Z$ и $B \cap Z'$ будем называть соответственно Z - и Z' -частями боковины B .

Пусть, для определенности, при движении по границе скелета S против часовой стрелки мы проходим боковину B , начиная с ее Z -части и заканчивая ее Z' -частью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В сделанных выше предположениях индекс $\text{ind}(Z, Z')$ называется *индексом боковины B* и обозначается через $\text{ind}(B)$. Угол от конца Z к концу Z' называется *раствором боковины B* и обозначается $\text{ang}(B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть S – произвольный скелет из $\mathcal{WP}_5$ и n – длина его границы. Предположим, что S обладает RM-реализацией. Пусть B – произвольная боковина скелета S , b – ее длина и $\text{ang}(B) = \pi l/3$ – ее раствор. Тогда

- 1) если $\text{ind}(B) = -1$, то nl не делится на 6 и $b = [nl/6] - 1$;
- 2) если $\text{ind}(B) = 0$, то остаток r от деления nl на 6 не равен 3 и
если $0 \leq r \leq 2$, то $b = [nl/6] - 1$;
если $4 \leq r \leq 5$, то $b = [nl/6]$;
- 3) если $\text{ind}(B) = 1$, то nl не делится на 6 и $b = [nl/6]$.

Иными словами, если $nl = 6p + r$, где $p = [nl/6]$, а $0 \leq r \leq 5$, то

- 1') при $r = 0$ индекс боковины B всегда равен 0, при $r = 3$ индекс боковины B никогда не равен 0, а при оставшихся r индекс боковины B может быть равен как 0, так и ± 1 ;
- 2') при любом $r > 0$
если $\text{ind}(B) = -1$, то $b = p - 1$;
если $\text{ind}(B) = 1$, то $b = p$;
- 3') если $\text{ind}(B) = 0$, то
при $0 \leq r \leq 2$ имеем $b = p - 1$;
при $4 \leq r \leq 5$ имеем $b = p$.

Пусть e и e' – два концевых ребра скелета S . Тогда ломаные, полученные при замыкании связных компонент, на которые распадается граница скелета S после выбрасывания этих концевых ребер, называются *супербоковинами*. Пусть Z и Z' – концы скелета S такие, что $e \subset Z$ и $e' \subset Z'$. Будем говорить, что супербоковина B порождена концами Z и Z' , а пересечения $B \cap Z$ и $B \cap Z'$ будем называть соответственно Z - и Z' -частями супербоковины B .

Пусть, для определенности, при движении по границе скелета S против часовой стрелки мы проходим супербоковину B , начиная с ее Z -части и заканчивая ее Z' -частью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В сделанных выше предположениях, индекс $\text{ind}(Z, Z')$ называется *индексом супербоковины B* и обозначается через $\text{ind}(B)$. Угол от конца Z к концу Z' называется *раствором супербоковины B* и обозначается $\text{ang}(B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Утверждения предложения 2.9 имеют место и для супербоковин.

3. Скелеты с пятью концами. В этом пункте мы докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Скелеты с пятью концами не имеют RM-реализации.

Начнем с описания некоторых элементарных свойств индексов боковин.

ЛЕММА 3.1. Сумма индексов всех боковин скелета S равна 0.

Две боковины B и B' называются *соседними*, если один из порождающих боковину B концов также является одним из концов, порождающих боковину B' .

ЛЕММА 3.2. Соседние боковины не могут одновременно иметь индекс 1.

ЛЕММА 3.3. *Соседние боковины не могут одновременно иметь индекс -1 .*

Пусть S – скелет с пятью концами, имеющий RM-реализацию.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *У скелета S имеется не более двух боковин индекса 1 .*

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *У скелета S имеется не более двух боковин индекса -1 .*

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Существует ровно три случая:*

- 1) *индексы всех боковин скелета S равны 0 ;*
- 2) *одна из боковин имеет индекс 1 , одна – индекс -1 , остальные три боковины имеют индекс 0 ;*
- 3) *две боковины имеют индекс 1 , две другие – индекс -1 и ровно одна боковина – индекс 0 .*

По-прежнему, S – скелет с пятью концами, обладающий RM-реализацией на правильном n -угольнике. Обозначим через Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 и Z_5 его последовательные концы и предположим, что Z_1 и Z_2 выходят из одной внутренней ячейки, Z_3 и Z_4 тоже выходят из одной внутренней ячейки. Существует два случая: углы между концами в каждой из пар (Z_1, Z_2) и (Z_3, Z_4) равны между собой и равны $\pi/3$; в одной из этих пар, скажем в (Z_1, Z_2) , угол между концами равен $2\pi/3$, в то время как в другой паре угол между концами равен $\pi/3$.

Рассмотрим первый случай. Предположим, для определенности, что единственный угол между последовательными концами, который может быть равен $2\pi/3$, – это угол между Z_5 и Z_1 . По предложению 2.8 скелет S не имеет перегородок, поэтому с точностью до симметрии он имеет вид, изображенный на рис. 4.

РИС. 4. Такие скелеты не имеют RM-реализации

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *В сделанных выше предположениях скелет S , в действительности, не может иметь RM-реализации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через b_i длину боковины, порожденной концами Z_i и Z_{i+1} (здесь и далее сложение в индексах циклическое, а именно, $i+j = 1+(i+j-1) \bmod 5$), и определим вектор $b = (b_1, \dots, b_5)$ длин боковин. Из предложения 2.9 вытекает, что при $i < 5$ $b_i = \lfloor n/6 \rfloor - a_i$, где a_i равно 0 или 1, а $b_5 = \lfloor n/3 \rfloor - a_5$, где a_5 также равно 0 или 1. Обозначим через a вектор $(a_1, \dots, a_5)$.

Далее, пусть z_i обозначает длину конца Z_i , т.е. количество ячеек, составляющих этот конец. Положим $w_i = \lfloor z_i/2 \rfloor + \lfloor z_{i+1}/2 \rfloor$. Пусть $w = (w_1, \dots, w_5)$. Обозначим через e_i

функцию четности конца Z_i , а именно: e_i равно 0, если z_i четно, и равно 1 в противном случае. Теперь все готово, чтобы записать соотношение между длинами концов и боковин скелета S . Непосредственные вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned} b_1 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_1 = \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_2}{2} \right\rfloor = w_1, \\ b_2 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_2 = \left\lfloor \frac{z_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_3}{2} \right\rfloor + e_2 + e_3 = w_2 + e_2 + e_3, \\ b_3 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_3 = \left\lfloor \frac{z_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_4}{2} \right\rfloor = w_3, \\ b_4 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_4 = \left\lfloor \frac{z_4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_5}{2} \right\rfloor + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - a_5 = \left\lfloor \frac{z_5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor + e_5 + e_1 = w_5 + e_5 + e_1. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая очевидное тождество $z_i = 2\lfloor z_i/2 \rfloor + e_i$, получаем

$$\begin{aligned} b \cdot (1, 1, -1, 1, -1) &= 2\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1) \\ &= w \cdot (1, 1, -1, 1, -1) + e_2 + e_3 + e_4 - e_1 - e_5 \\ &= z_2 + e_3 + e_4 - e_1 - e_5, \end{aligned}$$

где ' $\cdot$ ' обозначает стандартное скалярное произведение векторов. Итак, имеем

$$z_2 = e_1 + e_5 - e_3 - e_4 + \left(2\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) + a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1).$$

Положим для краткости $E = e_1 + e_5 - e_3 - e_4$, $N = 2\lfloor n/6 \rfloor - \lfloor n/3 \rfloor$ и $A = a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1)$. Таким образом, $z_2 = E + N + A$. Отметим, что $E \leq 2$, $A \leq 2$, и если $n = 6p + r$, где r – остаток от деления n на 6, то $N = 0$ при $0 \leq r \leq 2$ и $N = -1$ при $3 \leq r \leq 5$. Так как длина каждого конца не меньше 2, в частности, $z_2 \geq 2$, получаем, что при $0 \leq r \leq 2$ должно быть $A \geq 0$, а при $3 \leq r \leq 5$ должно быть $A \geq 1$.

Далее запишем условие того, что сумма длин всех боковин равна $n - 5$:

$$4\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \sum a_i = n - 5.$$

Подставляя в полученное равенство выражение $n = 6p + r$, найдем

$$\sum a_i = 5 - r \quad \text{при } 0 \leq r \leq 2, \quad \sum a_i = 6 - r \quad \text{при } 3 \leq r \leq 5.$$

Рассмотрим случаи разных остатков r .

Пусть $r = 0$. Тогда $\sum a_i = 5$, поэтому каждое a_i равно 1. Отсюда $A = -1$, противоречие.

Пусть $r = 1$. Тогда $\sum a_i = 4$, поэтому ровно одно из a_i равно 0, и $A \leq 0$. Из условия $z_2 \geq 2$ получаем $A = 0$ и $E = 2$, откуда, в частности, $e_3 = e_4 = 0$. Поэтому $\text{ind}(B_3) = 1$, и по предложению 2.9 $a_3 = 0$. Отсюда $A = -2$, противоречие.

Пусть $r = 2$. Тогда $\sum a_i = 3$, поэтому ровно два из a_i равны 0, и так как $A \geq 0$, имеем $A = 1$. Тогда $a_5 = 1$, значит, по предложению 2.10 $\text{ind}(B_5) = -1$. Отсюда вытекает, что $e_1 = e_5 = 0$, поэтому $E \leq 0$. Значит, $z_2 \leq 1$, противоречие.

Пусть $r = 3$. Тогда $\sum a_i = 3$, поэтому ровно два из a_i равны 0, следовательно, $A = 1$, $E = 2$, откуда $e_1 = e_5 = 1$ и $e_3 = e_4 = 0$. Таким образом, $\text{ind}(B_5) = 1$. Однако, по предложению 2.9 при любом $i < 5$ имеем $\text{ind}(B_i) = \pm 1$. Но в соответствии со следствием 3.3 индекс одной из боковин обязан равняться 0, противоречие.

Пусть $r = 4$. Тогда $\sum a_i = 2$ и ровно два из a_i равны 1. Учитывая, что $A \geq 1$, получаем $A = 2$. Последнее влечет, что $a_3 = 1$. Отсюда $\text{ind}(B_3) = -1$, поэтому $e_3 = e_4 = 1$. Значит, $E \leq 0$. Вспоминая, что $N = -1$, имеем $z_2 \leq 1$, противоречие.

Пусть $r = 5$. Тогда $\sum a_i = 1$ и ровно одно из a_i равно 1. Поэтому $A = 1$ и $E = 2$, откуда вытекает, что одно из a_3 и a_5 отлично от 0, $e_1 = e_5 = 1$ и $e_3 = e_4 = 0$. Последние два условия дают $\text{ind}(B_3) = \text{ind}(B_5) = 1$, поэтому $a_3 = a_5 = 0$, противоречие.

Предложение 3.1 доказано.

Перейдем к рассмотрению второго случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *В сделанных выше предположениях скелет S , в действительности, не может иметь RM-реализации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что теперь из внутренней ячейки, пересекающейся по сторонам с концами Z_1 и Z_2 , может выходить перегородка, которую мы обозначим через L . Обозначим через l_1 и l_2 ребра перегородки L , по которым L крепится к оставшейся части скелета S .

Возникает два случая: l_1, l_2 параллельны и l_1, l_2 непараллельны (рис. 5).

Рис. 5. Такие скелеты также не имеют RM-реализации

Пусть l_1 параллельно l_2 . Легко видеть, что в этом случае длины боковин перегородки L равны между собой независимо от формы перегородки. Добавив к введенным выше обозначениям величину x , равную длине боковины перегородки L , получаем

$$\begin{aligned} b_1 &= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - a_1 = \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_2}{2} \right\rfloor + e_1 = w_1 + e_1, \\ b_2 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_2 = \left\lfloor \frac{z_2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_3}{2} \right\rfloor + e_2 + e_3 + x = w_2 + e_2 + e_3 + x, \\ b_3 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_3 = \left\lfloor \frac{z_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_4}{2} \right\rfloor = w_3, \\ b_4 &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - a_4 = \left\lfloor \frac{z_4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_5}{2} \right\rfloor + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - a_5 = \left\lfloor \frac{z_5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{z_1}{2} \right\rfloor + e_5 + x = w_5 + e_5 + x. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} b \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) &= 2 \left[\frac{n}{6} \right] - \left[\frac{n}{3} \right] + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1) \\ &= w \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) + e_5 + e_2 + e_3 + e_4 + 2x - e_1 \\ &= z_5 + e_2 + e_3 + e_4 + 2x - e_1. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$z_5 = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - 2x + \left(2 \left[\frac{n}{6} \right] - \left[\frac{n}{3} \right] \right) + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1).$$

Положим для краткости $E = e_1 - e_2 - e_3 - e_4$, $N = 2[n/6] - [n/3]$ и $A = a \cdot (1, -1, 1, -1, -1)$. Таким образом, $z_5 = E - 2x + N + A$. Отметим, что $E \leq 1$, $A \leq 2$, и если $n = 6p + r$, то $N = 0$ при $0 \leq r \leq 2$ и $N = -1$ при $3 \leq r \leq 5$.

Легко видеть, что если $x > 0$, то, очевидно, $z_5 \leq 1$, противоречие. Поэтому $x = 0$.

Далее, если $r \geq 3$, то $N = -1$, и из условия $z_5 \geq 2$ вытекает, что $A = 2$, поэтому $e_1 = 1$, $e_2 = e_3 = e_4 = 0$. Тогда $\text{ind}(B_2) = -1$, поэтому $a_2 = 1$, значит $A \leq 1$, противоречие.

Итак, осталось рассмотреть случай $r < 3$. Тогда по предложению 2.9 при $i > 1$ имеем $a_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{ind}(B_i) = 1$. Ясно, что условие $z_5 \geq 2$ влечет $A \geq 1$, однако последнее неравенство выполняется, если только, по крайней мере, два из трех a_2 , a_4 и a_5 равны 0, т.е., по крайней мере, две из трех боковин B_2 , B_4 и B_5 имеют индекс 1. Из леммы 3.2 получаем, что $\text{ind}(B_2) = 1$, следовательно, $e_2 = e_3 = 1$, откуда $E \leq -1$, и значит, $z_5 \leq 1$, противоречие.

Случай параллельных l_1 и l_2 полностью разобран.

Пусть теперь l_1 непараллельно l_2 . Легко видеть, что при выбранных обозначениях длина той боковины перегородки L , которая содержится в B_5 , меньше на 1, чем длина боковины из L , содержащейся в B_2 . Обозначим через x длину боковины $L \cap B_5$, тогда длина боковины $L \cap B_2$ равна $x + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} b_1 &= \left[\frac{n}{3} \right] - a_1 = \left[\frac{z_1}{2} \right] + \left[\frac{z_2}{2} \right] + e_2 = w_1 + e_2, \\ b_2 &= \left[\frac{n}{6} \right] - a_2 = \left[\frac{z_2}{2} \right] + \left[\frac{z_3}{2} \right] + e_3 + x + 1 = w_2 + e_3 + x + 1, \\ b_3 &= \left[\frac{n}{6} \right] - a_3 = \left[\frac{z_3}{2} \right] + \left[\frac{z_4}{2} \right] = w_3, \\ b_4 &= \left[\frac{n}{6} \right] - a_4 = \left[\frac{z_4}{2} \right] + \left[\frac{z_5}{2} \right] + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= \left[\frac{n}{3} \right] - a_5 = \left[\frac{z_5}{2} \right] + \left[\frac{z_1}{2} \right] + e_5 + e_1 + x = w_5 + e_5 + e_1 + x. \end{aligned}$$

Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned} b \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) &= 2 \left[\frac{n}{6} \right] - \left[\frac{n}{3} \right] + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1) \\ &= w \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) + e_5 + e_1 + e_3 + e_4 + 2x + 1 - e_2 \\ &= z_5 + e_1 + e_3 + e_4 + 2x + 1 - e_2. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$z_5 = e_2 - e_1 - e_3 - e_4 - 2x - 1 + N + A,$$

где $N = 2[n/6] - [n/3]$ и $A = a \cdot (1, -1, 1, -1, -1)$. Отметим, что $A \leq 2$ и $N \leq 0$.

Из условия $z_5 \geq 2$ вытекает, что $A = 2$, однако, тогда $a_3 = 1$, поэтому $\text{ind}(B_3) \neq 1$, значит, одно из e_3 и e_4 равно 1, следовательно, $z_5 \leq 1$, противоречие.

Случай непараллельных l_1 и l_2 полностью разобран. Тем самым, предложение 3.2 полностью доказано.

Теперь доказательство теоремы 3.1 получается объединением доказательств предложений 3.1 и 3.2.

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tuz@difgeo.math.msu.su

Поступило

25.05.95

Исправленный вариант

03.03.97

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner problem for convex boundaries. II. The regular case // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 93–131.
- [2] Тужилин А. А. Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 4. С. 117–159.
- [3] Hwang F. K., Richards D., Winter P. The Steiner Tree Problem. Amsterdam: Elsevier Science Publ. (to appear).
- [4] Jarník V., Kössler M. O minimalních grafeth obeahujících n daných bodů // Čas. Pěst. Mat. Fys. 1934. V. 63. P. 223–235.
- [5] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. 1960. V. 4. P. 143–148.
- [6] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. Some NP-complete geometric problems // 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. New York: Assoc. Comput. Mach., 1976. P. 10–22.
- [7] Preparata F., Shamos M. Computational geometry. An introduction. New York: Springer Verlag, 1985.
- [8] Иванов А. О., Тужилин А. А. Решение задачи Штейнера для выпуклых границ // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 207–208.
- [9] Иванов А. О., Тужилин А. А. Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 12. С. 1813–1844.
- [10] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. № 2 (284). С. 53–115.
- [11] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner problem for convex boundaries. I. General case // Adv. Soviet Math. 1993. V. 15. P. 15–92.
- [12] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations. N. W., Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
- [13] Иванов А. О., Тужилин А. А. Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 191–192.
- [14] Иванов А. О., Тужилин А. А. Взвешенные минимальные 2-деревья // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 155–156.