Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Янкович, Необходимые условия экстремума в вариационном исчислении при отсутствии гладкости по фазовым переменным, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 922–930

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:48:10

УДК 517.5

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ГЛАДКОСТИ ПО ФАЗОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В. Янкович

В работе получены необходимые условия экстремума в общей изопериметрической задаче, где у интегрантов не предполагается существование частных производных по фазовой переменной.

Библиография: 2 названия.

§ 1. Постановка задач и формулировка теорем

1.1. Случай слабого экстремума. Пусть V – открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $[t_0, t_1]$ – отрезок действительной прямой, x_0 и x_1 – фиксированные точки в $\mathbb{R}^n$, $L_i(t, x, \dot{x})$, $i = 0, 1, \dots, m$, – непрерывные интегранты, определенные на V . На множестве

$$D := \{x(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \bar{\Gamma}(x(\cdot)) \subseteq V\},$$

где

$$\bar{\Gamma}(x(\cdot)) := \{(t, x(t), \dot{x}(t)) \mid t \in [t_0, t_1]\}$$

– так называемый *расширенный график функции* $x(\cdot)$, определяются интегральные функционалы

$$J_i(x(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Общей изопериметрической задачей называется следующая задача:

$$\begin{aligned} J_0(x(\cdot)) &\rightarrow \inf, \\ J_i(x(\cdot)) &\leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad J_i(x(\cdot)) = \alpha_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Допустимая функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (1), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot))$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть интегранты L_i , $i = 0, 1, \dots, m$, и их частные производные по t и $\dot{x}$ непрерывны. Если функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (1), то существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 \in \mathbb{R}$ и $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, не все равные 0 и такие, что

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i &\geq 0, & i = 0, 1, \dots, k, \\ \hat{\lambda}_i J_i(\hat{x}(\cdot)) &= 0, & i = 1, \dots, k, \\ \frac{d}{dt}[\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) - \hat{L}(t)] &= -\hat{L}_t(t), & t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$L(t, x, \dot{x}) := \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i L_i(t, x, \dot{x}).$$

В настоящей статье мы пользуемся следующими сокращениями:

$$\hat{L}(t) := L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad \hat{L}_t(t) := L_t(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), \quad \hat{L}_{\dot{x}}(t) := L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$$

и т.п.

1.2. Случай сильного экстремума. Пусть G – открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, K – конус в $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq K$, $[t_0, t_1]$ – отрезок действительной прямой, x_0 и x_1 – фиксированные точки в $\mathbb{R}^n$, $L_i(t, x, \dot{x})$, $i = 0, 1, \dots, m$, – непрерывные интегранты, определенные на $G \times K$. На множестве

$$\overline{D} := \{x(\cdot) \in KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \Gamma(x(\cdot)) \subseteq G, \forall t \in [t_0, t_1] \dot{x}_-(t), \dot{x}_+(t) \in K\}$$

(KC^1 – множество кусочно-дифференцируемых функций) определяются интегральные функционалы

$$J_i(x(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Будем рассматривать следующую изопериметрическую задачу:

$$\begin{aligned} J_0(x(\cdot)) &\rightarrow \inf, \\ J_i(x(\cdot)) &\leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad J_i(x(\cdot)) = \alpha_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t) \in U, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (3)$$

где $T \subseteq [t_0, t_1]$ – множество точек дифференцируемости функции $x(\cdot)$.

Допустимая функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (3), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой допустимой функции $x(\cdot)$, для которой $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть интегранты L_i , $i = 0, 1, \dots, m$, и их частные производные по t непрерывны. Если функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (3), то существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 \in \mathbb{R}$ и $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, не все равные 0, и кусочно-непрерывная функция $\hat{r}(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i &\geq 0, & i = 0, 1, \dots, k, \\ \hat{\lambda}_i J_i(\hat{x}(\cdot)) &= 0, & i = 1, \dots, k, \\ \hat{r}(t) &= \hat{L}_t(t), & t \in T, \end{aligned}$$

$$L\left(t, \hat{x}(t), \frac{\hat{x}(t)}{w}\right)w - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{r}(t)(w - 1) \geq 0, \quad t \in T, \quad w \in \overline{U}^*(t),$$

где $T \subseteq [t_0, t_1]$ – множество точек дифференцируемости функции $\hat{x}(\cdot)$,

$$L(t, x, \dot{x}) := \sum_{i=0}^m \hat{\lambda}_i L_i(t, x, \dot{x}),$$

$$U^*(t) = \left\{ \dot{z} > 0 \mid \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \in U \right\}, \quad \overline{U}^*(t) := \text{cl} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{t < s < t + \delta} U^*(s).$$

§ 2. Комментарии

2.1. Во многих книгах по вариационному исчислению доказывается, что уравнение (2) является необходимым условием для слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления, если $L \in C^2(V)$ и $\hat{x}(\cdot) \in C^2[t_0, t_1]$.

2.2. Функция Понтрягина $\mathcal{H}: V \times \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^{m*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задачи (1) задается формулой

$$\mathcal{H}(t, x, \dot{x}, p, \lambda, \lambda_0) := p\dot{x} - \sum_{i=0}^m \lambda_i L_i(t, x, \dot{x}).$$

Так как в этом случае $\hat{p}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)$, получаем, что

$$\widehat{\mathcal{H}}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) - \hat{L}(t), \quad \widehat{\mathcal{H}}_t(t) = -\hat{L}_t(t). \quad (4)$$

Поэтому уравнение (4) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt} \widehat{\mathcal{H}}(t) = \widehat{\mathcal{H}}_t(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5)$$

В работе [1] доказано, что к принципу Лагранжа для задачи Лагранжа [2, § 4.1] можно добавить уравнение (5), если предполагается гладкость всех функций, определяющих эту задачу.

2.3. Пусть в задаче (3) интегранты $L_i, i = 0, 1, \dots, m$, и их частные производные по t и $\dot{x}$ непрерывны. Если $\hat{x}(t) \in \text{int } \overline{U}^*(t), t \in T$, то в теореме 2

$$-\hat{r}(t) = \hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) - \hat{L}(t), \quad t \in T.$$

Следовательно, из уравнения

$$\dot{\hat{r}}(t) = \hat{L}_t(t), \quad t \in T,$$

получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} [\hat{L}_{\dot{x}}(t)\dot{\hat{x}}(t) - \hat{L}(t)] = -\hat{L}_t(t), \quad t \in T.$$

Если, кроме того, предполагается, что $n = 1$ и $K = U = (0, +\infty)$, то неравенство

$$L\left(t, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{w}\right)w - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{r}(t)(w - 1) \geq 0, \quad t \in T, \quad w \in \overline{U}^*(t),$$

эквивалентно неравенству Вейерштрасса

$$L(t, \hat{x}(t), u) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))(u - \dot{\hat{x}}(t)) \geq 0, \quad t \in T, \quad u > 0.$$

2.4. Отсутствие гладкости по x часто встречается в задачах математического анализа, теории аппроксимации и т.п. Рассмотрим, например, классическую изопериметрическую задачу (задачу Дидоны), которую запишем в виде

$$\int_0^1 |x(t)| dt \rightarrow \sup, \quad \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt \leq L, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Здесь отсутствует гладкость по x в функционале.

2.5. Первый шаг в доказательстве теоремы 1 – это редукция, в которой используется замена времени. (Замена времени как средство доказательства необходимых условий экстремума в задачах оптимального времени была многократно использована А. А. Милутиным и его соавторами.)

Второй шаг состоит в применении принципа Лагранжа [2, § 4.1] к задаче, полученной после этой редукции.

Первый шаг в доказательстве теоремы 2 состоит в той же самой редукции, что была сделана на первом шаге доказательства теоремы 1. Второй шаг заключается в применении принципа максимума к задаче, полученной после такой редукции. Для этой цели будет сформулирован принцип максимума для задачи оптимального управления с переменной областью управления.

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 1. Предположим, что функция $\hat{x}(\cdot)$ продолжена вне отрезка $[t_0, t_1]$ так, что гладкость сохранена. Вместе с задачей (1) будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned} J_0^*(z(\cdot)) &\rightarrow \inf, \\ J_i^*(z(\cdot)) &\leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad J_i^*(z(\cdot)) = \alpha_i, \quad i = k+1, \dots, m, \\ z(t_0) &= t_0, \quad z(t_1) = t_1, \end{aligned} \quad (6)$$

в которой интегральные функционалы определяются формулами

$$J_i^*(z(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} L_i\left(z(t), \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}(t)}\right) \dot{z}(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Интегранты в задаче (6)

$$L_i^*(t, z, \dot{z}) := L_i\left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}}\right) \dot{z}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

определены и непрерывны на открытом множестве

$$V^* := \left\{ (t, z, \dot{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right) \in V, \dot{z} > 0 \right\}.$$

ЛЕММА 1. Если функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (1), то функция $\hat{z}(\cdot)$, $\hat{z}(t) := t$, доставляет слабый локальный минимум в задаче (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что слабая ε -окрестность функции $\hat{x}(\cdot)$ принадлежит D и $\hat{x}(\cdot)$ доставляет глобальный минимум в задаче (1) в этой окрестности. Существует число δ такое, что выполнены неравенства

$$0 < \delta < 1, \quad \omega(\hat{x}(\cdot), \delta) < \varepsilon, \quad \|\hat{x}(\cdot)\| \frac{\delta}{1-\delta} + \omega(\dot{\hat{x}}(\cdot), \delta) < \varepsilon.$$

Пусть функция $z(\cdot) \in C^1[t_0, t_1]$, для которой выполнено неравенство

$$\|z(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{C^1[t_0, t_1]} < \delta,$$

допустима в задаче (6). Так как $\dot{z}(t) > 0$, $t \in [t_0, t_1]$, существует обратная функция $z^{-1}(\cdot)$. Пусть $x(\cdot) := \hat{x} \circ z^{-1}(\cdot)$. Функция $x(\cdot)$, очевидно, принадлежит пространству $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Для любого $t \in [t_0, t_1]$

$$|z^{-1}(t) - t| = |\hat{z}(z^{-1}(t)) - z(z^{-1}(t))| < \delta, \quad |\dot{z}(t) - 1| = |\dot{z}(t) - \dot{\hat{z}}(t)| < \delta.$$

Используя эти неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}(t)\| &= \|\hat{x}(z^{-1}(t)) - \hat{x}(t)\| \leq \omega(\hat{x}(\cdot), \delta) < \varepsilon, \\ \|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\| &= \left\| \frac{\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))}{\dot{z}(z^{-1}(t))} - \dot{\hat{x}}(t) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))}{\dot{z}(z^{-1}(t))} - \dot{\hat{x}}(z^{-1}(t)) \right\| + \|\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t)) - \dot{\hat{x}}(t)\| \\ &= \|\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))\| \frac{|1 - \dot{z}(z^{-1}(t))|}{|\dot{z}(z^{-1}(t))|} + \|\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t)) - \dot{\hat{x}}(t)\| \\ &\leq \|\hat{x}(\cdot)\| \frac{\delta}{1-\delta} + \omega(\dot{\hat{x}}(\cdot), \delta) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Поэтому $x(\cdot) \in D$. Поскольку

$$\begin{aligned} J_i(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} L_i\left(t, \hat{x}(z^{-1}(t)), \frac{\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))}{\dot{z}(z^{-1}(t))}\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_i\left(z(s), \hat{x}(s), \frac{\dot{\hat{x}}(s)}{\dot{z}(s)}\right) \dot{z}(s) ds = J_i^*(z(\cdot)), \quad i = 0, 1, \dots, m, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} J_i(x(\cdot)) &= J_i^*(z(\cdot)) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ J_i(x(\cdot)) &= J_i^*(z(\cdot)) = \alpha_i, \quad i = k+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$x(t_0) = \hat{x}(z^{-1}(t_0)) = \hat{x}(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \hat{x}(z^{-1}(t_1)) = \hat{x}(t_1) = x_1.$$

Поэтому функция $x(\cdot)$ является допустимой в задаче (1). Тогда

$$J_0^*(z(\cdot)) = J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot)) = J_0^*(\hat{z}(\cdot)).$$

Интегранты $L_i^*, i = 0, 1, \dots, m$, обладают непрерывными частными производными по z и $\dot{z}$. К задаче (3) можно применить принцип Лагранжа для задачи Лагранжа [2, § 4.1]. Тогда получается, что существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 \in \mathbb{R}$ и $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, не все равные 0 и такие, что

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i &\geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ \hat{\lambda}_i J_i(\hat{x}(\cdot)) &= \hat{\lambda}_i J_i^*(\hat{z}(\cdot)) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \frac{d}{dt} \hat{L}_z^*(t) &= \hat{L}_z^*(t), \quad t \in [t_0, t_1].\end{aligned}$$

Из

$$\begin{aligned}L_z^*(t, z, \dot{z}) &= L_t \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right) \dot{z}, \\ L_{\dot{z}}^*(t, z, \dot{z}) &= -L_{\dot{x}} \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right) \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} + L \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right)\end{aligned}$$

следует, что

$$\hat{L}_z^*(t) = \hat{L}_t(t), \quad \hat{L}_{\dot{z}}^*(t) = -\hat{L}_{\dot{x}}(t) \dot{\hat{x}}(t) + \hat{L}(t).$$

Отсюда получаем (2).

3.2. Доказательство теоремы 2. Предположим, что функция $\hat{x}(\cdot)$ продолжена вне отрезка $[t_0, t_1]$ так, что кусочная гладкость сохранена. Вместе с задачей (3) будем рассматривать задачу

$$\begin{aligned}J_0^*(z(\cdot)) &\rightarrow \inf, \\ J_i^*(z(\cdot)) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad J_i^*(z(\cdot)) = 0, \quad i = k+1, \dots, m, \\ z(t_0) &= t_0, \quad z(t_1) = t_1, \quad \dot{z}(t) \in U^*(t),\end{aligned}\tag{7}$$

в которой интегральные функционалы определяются формулами

$$J_i^*(z(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} L_i \left(z(t), \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}(t)} \right) \dot{z}(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Интегранты в задаче (7)

$$L_i^*(t, z, \dot{z}) = L_i \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right) \dot{z}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

определены и кусочно-непрерывны на множестве $G^* \times K^*$ (см. определение в п. 3.1), где

$$G^* := \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (z, \hat{x}(t)) \in G\}, \quad K^* := (0, +\infty).$$

ЛЕММА 2. Если функция $\hat{x}(\cdot)$ доставляет сильный локальный минимум в задаче (3), то функция $\hat{z}(\cdot)$, $\hat{z}(t) := t$, доставляет сильный локальный минимум в задаче (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что ε -окрестность множества $\Gamma(\hat{x}(\cdot))$ принадлежит G и $\hat{x}(\cdot)$ доставляет глобальный минимум в задаче (3) в сильной ε -окрестности функции $\hat{x}(\cdot)$. Существует число $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство $\omega(\hat{x}(\cdot), \delta) < \varepsilon$.

Пусть функция $z(\cdot) \in KC^1[t_0, t_1]$, для которой выполнено неравенство

$$\|z(\cdot) - \hat{z}(\cdot)\|_{C[t_0, t_1]} < \delta,$$

допустима в задаче (7). Так как $\dot{z}(t) > 0$, существует обратная функция $z^{-1}(\cdot)$. Пусть $x(\cdot) := \hat{x} \circ z^{-1}(\cdot)$. Как нетрудно убедиться, функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $KC^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Для любого $t \in [t_0, t_1]$ выполняется неравенство

$$|z^{-1}(t) - t| = |\hat{z}(z^{-1}(t)) - z(z^{-1}(t))| < \delta.$$

Используя это неравенство, получаем, что

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| = \|\hat{x}(z^{-1}(t)) - \hat{x}(t)\| \leq \omega(\hat{x}(\cdot), \delta) < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Поэтому $\Gamma(x(\cdot)) \subseteq G$. Кроме того, для каждого $t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{x}_{\pm}(t) = \frac{\dot{\hat{x}}_{\pm}(z^{-1}(t))}{\dot{z}_{\pm}(z^{-1}(t))} \in K.$$

Таким образом, $x(\cdot) \in \bar{D}$. Поскольку

$$\begin{aligned} J_i(x(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} L_i\left(t, \hat{x}(z^{-1}(t)), \frac{\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))}{\dot{z}(z^{-1}(t))}\right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_i\left(z(s), \hat{x}(s), \frac{\dot{\hat{x}}(s)}{\dot{z}(s)}\right) \dot{z}(s) ds = J_i^*(z(\cdot)), \quad i = 0, 1, \dots, m, \end{aligned}$$

то

$$J_i(x(\cdot)) = J_i^*(z(\cdot)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad J_i(x(\cdot)) = J_i^*(z(\cdot)) = 0, \quad i = k+1, \dots, m.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \hat{x}(z^{-1}(t_0)) = \hat{x}(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = \hat{x}(z^{-1}(t_1)) = \hat{x}(t_1) = x_1, \\ \dot{x}(t) &= \frac{\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))}{\dot{z}(z^{-1}(t))} \in U, \end{aligned}$$

если $\dot{\hat{x}}(z^{-1}(t))$ и $\dot{z}(z^{-1}(t))$ существуют. Поэтому функция $x(\cdot)$ является допустимой в задаче (1). Таким образом,

$$J_0^*(z(\cdot)) = J_0(x(\cdot)) \geq J_0(\hat{x}(\cdot)) = J_0^*(\hat{z}(\cdot)).$$

Доказательство теоремы 2 основывается на применении к задаче (7) того варианта принципа максимума, который будет сформулирован в следующем пункте. Значит, существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0 \in \mathbb{R}$ и $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, не все равные 0, и кусочно-гладкая функция $\hat{r}(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i &\geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ \hat{\lambda}_i J_i(\hat{x}(\cdot)) &= \hat{\lambda}_i J_i^*(\hat{z}(\cdot)) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{\hat{r}}(t) &= \hat{L}_z^*(t), \quad t \in T, \\ L^*(t, \hat{z}(t), w) - L^*(t, \hat{z}(t), \dot{\hat{z}}(t)) - \hat{r}(t)(w - \dot{\hat{z}}(t)) &\geq 0, \quad t \in T, \quad w \in \overline{U}^*(t). \end{aligned}$$

Из

$$L_z^*(t, z, \dot{z}) = L_t \left(z, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{\dot{z}} \right) \dot{z},$$

следует, что $\hat{L}_z^*(t) = \hat{L}_t(t)$. Отсюда вытекает, что $\dot{\hat{r}}(t) = \hat{L}_t(t)$, $t \in T$. Из

$$L^*(t, \hat{z}(t), w) = L \left(t, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{w} \right) w, \quad L^*(t, \hat{z}(t), \dot{\hat{z}}(t)) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)),$$

получаем, что

$$L \left(t, \hat{x}(t), \frac{\dot{\hat{x}}(t)}{w} \right) w - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \hat{r}(t)(w - 1) \geq 0, \quad t \in T, \quad w \in \overline{U}^*(t).$$

3.3. Задача оптимального управления. Пусть G – открытое множество в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Y – топологическое пространство, W – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $[t_0, t_1]$ – отрезок действительной прямой. Будем говорить, что функция $\varphi(t, x, u)$, отображающая множество $G \times Y$ в некоторое топологическое пространство, является *кусочно-непрерывной*, если

- существует конечное множество $S \subseteq \mathbb{R}$ такое, что функция φ непрерывна в каждой точке $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \in G \times Y$, где $\bar{t} \notin S$;
- существуют пределы функции φ при $t \rightarrow \bar{t}_-, x \rightarrow \bar{x}, u \rightarrow \bar{u}$ и при $t \rightarrow \bar{t}_+, x \rightarrow \bar{x}, u \rightarrow \bar{u}$ в каждой точке $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}) \in G \times Y$.

Будем говорить, что $\bar{t} \in \mathbb{R}$ является *точкой непрерывности* функции φ , если она непрерывна в каждой точке $(t, x, u) \in G \times Y$ такой, что $t = \bar{t}$. Пусть функция $f: G \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ кусочно-непрерывна, интегранты $L_i: G \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, кусочно-непрерывны и терминанты $l_i: W \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$, непрерывны. Пусть $U(\cdot)$ – многозначное отображение множества действительных чисел в топологическое пространство Y .

Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ будем называть *процессом*, если $x(\cdot)$ – кусочно-гладкая функция, отображающая отрезок $[t_0, t_1]$ в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\Gamma(x(\cdot)) \subseteq G$ и $(x(t_0), x(t_1)) \in W$, а $u(\cdot)$ – кусочно-непрерывная функция, отображающая отрезок $[t_0, t_1]$ в Y . На множестве процессов определяются функционалы Больца формулами

$$\mathcal{B}_i(x(\cdot), u(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), u(t)) dt + l_i(x(t_0), x(t_1)), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Будем рассматривать следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0(x(\cdot), u(\cdot)) &\rightarrow \inf, \\ \mathcal{B}_i(x(\cdot), u(\cdot)) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \mathcal{B}_i(x(\cdot), u(\cdot)) = 0, \quad i = k+1, \dots, m, \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in [t_0, t_1],\end{aligned}$$

где $T \subseteq [t_0, t_1]$ – множество точек непрерывности управления $u(\cdot)$, функции f и интегрантов L_i , $i = 0, 1, \dots, m$.

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ называется *оптимальным в сильном смысле*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ с условием

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$$

выполнено неравенство $\mathcal{B}_0(x(\cdot), u(\cdot)) \geq \mathcal{B}_0(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Функции $\mathcal{H}: G \times Y \times \mathbb{R}^{n*} \times \mathbb{R}^{m*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l: W \times \mathbb{R}^{m*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\bar{U}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow Y$ определяются формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t, x, u, p, \lambda, \lambda_0) &:= pf(t, x, u) - \sum_{i=0}^m \lambda_i L_i(t, x, u), \\ l(x_0, x_1, \lambda, \lambda_0) &:= \sum_{i=0}^m \lambda_i l_i(x_0, x_1), \quad \bar{U}(t) := \text{cl} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{t < s < t + \delta} U(s).\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция f , интегранты L_i , $i = 0, 1, \dots, m$, и их частные производные по x кусочно-непрерывны, а терминанты l_i , $i = 0, 1, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы. Если процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ оптимальный в сильном смысле, то существуют множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^{m*}$, не все равные 0, и кусочно-гладкая функция $\hat{p}(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^*$ такие, что

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_i &\geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \hat{\lambda}_i \hat{\mathcal{B}}_i = 0, \quad i = 1, \dots, k, \\ \dot{\hat{p}}(t) &= -\widehat{\mathcal{H}}_x(t), \quad t \in T, \\ \mathcal{H}(t, \hat{x}(t), u, \hat{p}(t), \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0) &\leq \widehat{\mathcal{H}}(t), \quad t \in T, \quad u \in \bar{U}(t), \\ \hat{p}(\hat{t}_0) &= \hat{l}_{x_0}, \quad \hat{p}(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1},\end{aligned}$$

где $T \subseteq [t_0, t_1]$ – множество точек непрерывности функции f , интегрантов L_i , $i = 0, 1, \dots, m$, их частных производных по x и управления $\hat{u}(\cdot)$.

Отображение $t \mapsto \bar{U}(t)$ по своему построению позволяет конструировать игольчатые вариации. Это позволяет повторить схему доказательства принципа максимума из [2, § 4.2] для доказательства теоремы 3.

Белградский университет (Югославия)

Поступило
01.11.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Janković V. Necessary conditions in a problem of calculus of variations // Publ. Inst. Math. (Beograd) 1989. V. 45(59). P. 143–151.
- [2] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.