Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошапка, Нормальная форма роста четырехмерного вещественного многообразия в $\mathbb{C}^5$ в $\mathbb{R}C$ -особой точке общего положения, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 931–934

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:38:13

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА РОСТКА ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ В $\mathbb{C}^5$ В $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -ОСОБОЙ ТОЧКЕ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В. К. Белошапка

Пусть M – гладкое замкнутое ориентированное вещественное m -мерное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, ξ – его точка, $T_\xi M$ – касательное пространство, $T_\xi^\mathbb{C} M = T_\xi M \cap iT_\xi M$ – его комплексная часть. Размерность $T_\xi M$ равна m , вещественная размерность объемлющего пространства равна $2n$, поэтому если $T_\xi M$ и $iT_\xi M$ пересекаются в общем положении, то $\dim_\mathbb{C} T_\xi^\mathbb{C} M = \max\{m - n, 0\}$. Если размерность оказалась больше этого числа, то точка ξ называется $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой [1]. Есть ситуации, когда эти точки обладают устойчивостью, т.е. не исчезают при малых шевелениях поверхности, причем их количество может быть выражено через характеристические классы касательного и нормального расслоений M [1], [2]. Самая маломерная ситуация такого типа – это ситуация $n = m = 2$. Она была изучена в [3]. В частности, в [3] с помощью построения нормальной формы уравнения поверхности была описана полная система голоморфных инвариантов ростка поверхности в $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой точке. Оказалось, что существует однопараметрическое семейство попарно голоморфно неэквивалентных ростков. Заметим, что в точке, не являющейся $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой, росток поверхности общего положения эквивалентен двумерной вещественной плоскости. Следующая по размерности ситуация такого типа – это ситуация $n = 5$, $m = 4$. Основным результатом данной работы – обнаружение того, что в данном случае биголоморфных инвариантов нет, причем уравнение любого ростка общего положения в $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой точке формальным голоморфным преобразованием, т.е. заданным формальными рядами от комплексных координат, приводится к единственной нормальной форме (см. теорему).

Итак, пусть M – вещественная четырехмерная поверхность в $\mathbb{C}^5$, ξ – ее $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особая точка, причем $\dim_\mathbb{C} T_\xi^\mathbb{C} M = 1$. Первое условие, уточняющее требование общности положения нашего ростка, – размерность не больше 1. Пусть z – одномерная комплексная координата, пробегающая комплексную касательную, а e_1, e_2 – два вектора, дополняющие ее до полной касательной, тогда $ie_1, ie_2 \notin T_\xi M$. Пусть $u = (u_1, u_2)$ – двумерная вещественная координата, изменяющаяся вдоль плоскости $\{e_1, e_2\}$, а $w = u + iv$ – соответствующая комплексная координата. Дополняя (z, w_1, w_2) до системы комплексных координат в $\mathbb{C}^5$, получаем $(z, w_1, w_2, \zeta_1, \zeta_2)$. Разрешая шесть вещественных соотноше-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 096–01–01002, и фонда INTAS, грант № 930047.

ний, задающих росток, получаем

$$v = F(z, \bar{z}, u), \quad \zeta = G(z, \bar{z}, u).$$

Теперь $\xi = 0$ и F, dF, G, dG обращаются в 0 в начале координат. Пусть члены тейлоровского разложения F и G , квадратичные по $(z, \bar{z})$: $Az^2 + B|z|^2 + A\bar{z}^2$ и $Cz^2 + D|z|^2 + E\bar{z}^2$ соответственно. После замены $z \mapsto z, w \mapsto w + 2iAz^2, \zeta \mapsto \zeta - Cz^2$ получаем $F = B|z|^2 + \dots, G = D|z|^2 + E\bar{z}^2 + \dots$.

Второе условие на общность положения ростка – требование того, что $B \neq 0$, а D и E линейно независимы. Тогда после линейного преобразования $z \mapsto z, w \mapsto \alpha w, \zeta \mapsto \beta \zeta$ можем считать, что $F = e_1|z|^2 + \dots, G = e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2$, где (e_1, e_2) – стандартный базис в $\mathbb{C}^2$. После замены $w \mapsto w - i\zeta - e_2z^2$ уравнение ростка принимает вид

$$v = 2 \operatorname{Re}(zPu) + \dots, \quad \zeta = e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2 + zQu + \bar{z}Ru + \dots, \quad (1)$$

где точками обозначены члены степени 3 и выше.

Назначим веса переменных следующим образом: $[z] = 1, [w] = [u] = [\zeta] = 2$. Тогда правые части уравнений и координаты отображения разлагаются в суммы однородных компонент и (1) принимает следующий вид:

$$v = F_3 + F_4 + \dots, \quad \zeta = e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2 + G_3 + \dots. \quad (2)$$

Подвергнем росток действию замены

$$z \mapsto z + f_2 + \dots, \quad w \mapsto w + g_3 + \dots, \quad \zeta \mapsto \zeta + h_3 + \dots,$$

в результате которой (2) переходит в

$$v = \tilde{F}_3 + \dots, \quad \zeta = e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2 + \tilde{G}_3 + \dots.$$

При этом получаем соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(w + g) &= \tilde{F}(z + f, \overline{z + f}, u + \operatorname{Re} g), \\ (\zeta + f) &= e_1|z + f|^2 + e_2(\overline{z + f})^2 + \tilde{G}(z + f, \overline{z + f}, u + \operatorname{Re} g), \end{aligned}$$

где $w = u + iF, \zeta = e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2 + G$. Выделяя здесь μ -ю компоненту, получаем

$$F_\mu - \tilde{F}_\mu = \operatorname{Im} g_\mu + \dots, \quad G_\mu - \tilde{G}_\mu = -h_\mu + e_1 2 \operatorname{Re}(f_{\mu-1}\bar{z}) + 2e_2 \bar{f}_{\mu-1}\bar{z} + \dots, \quad (3)$$

где точками обозначены члены, зависящие от $F_\nu, \tilde{F}_\nu, G_\nu, \tilde{G}_\nu, f_{\nu-1}, g_\nu, h_\nu$ при $\nu < \mu$, причем аргументы в $F_\nu, \tilde{F}_\nu, G_\nu, \tilde{G}_\nu$ – это $(z, \bar{z}, u)$, а в $f_{\nu-1}, g_\nu, h_\nu$ – $(z, u, e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2)$.

Выясним, для каких правых частей разрешимо гомологическое уравнение

$$\operatorname{Im} g(z, u, e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2) = S(z, \bar{z}, u), \quad -h + e_1 2 \operatorname{Re} f\bar{z} + 2e_2 \bar{f}\bar{z} = T. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Уравнение*

$$h(z, u, e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \tau_m(z, u)\bar{z}^m$$

разрешимо относительно h тогда и только тогда, когда $\tau_{2n+1}(z, u)$ делится на z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$h(z, w, \zeta) = \sum h_{\mu\nu}(z, w)\zeta_1^\mu\zeta_2^\nu,$$

тогда

$$h(z, u, e_1|z|^2 + e_2\bar{z}^2) = \sum h_{\mu\nu}(z, u)(|z|^2)^\mu(\bar{z}^2)^\nu = \sum h_{\mu\nu}(z, u)z^{\mu+\nu}\bar{z}^{\mu+2\nu}$$

и уравнение оказывается равносильным системе

$$h_{00} = \tau_0, \quad h_{10}z = \tau_1, \quad h_{20}z^2 + h_{01} = \tau_2, \quad h_{30}z^3 + h_{11}z = \tau_3, \quad \dots,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть

$$T = \sum T_{mn}(u)z^m\bar{z}^n.$$

Запишем второе уравнение (4) покомпонентно

$$-h^{(1)} + 2\operatorname{Re}(f\bar{z}) = T^{(1)}, \quad -h^{(2)} + 2\bar{f}z = T^{(2)}. \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Второе из уравнений (5) разрешимо точно, а первое – во всех компонентах, кроме $(0, 1)$ -й.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого достаточно положить $f = \frac{1}{2}\bar{T}_{01}^{(2)}(u)$ и подобрать $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ в соответствии с леммой 1.

ЛЕММА 3. Первое из уравнений (4) разрешимо для любой правой части.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$g = \sum g_{\alpha\beta\gamma}(w)z^\alpha\zeta_1^\beta\zeta_2^\gamma,$$

тогда уравнение принимает вид

$$\sum g_{\alpha\beta\gamma}(u)z^{\alpha+\beta}\bar{z}^{\beta+2\gamma} + \sum \bar{g}_{\alpha\beta\gamma}(u)z^{\beta+2\gamma}\bar{z}^{\alpha+\beta} = \sum S_{mn}(u)z^m\bar{z}^n.$$

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что g_{mn0} присутствует только в компоненте $(m+n, n)$, причем в качестве свободного слагаемого. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Росток поверхности M в $\mathbb{R}C$ -особой точке общего положения формальным голоморфным обратимым преобразованием можно привести к виду

$$v = 0, \quad \zeta_1 = |z|^2 + \bar{z}P(u), \quad \zeta_2 = \bar{z}^2, \quad (6)$$

где $P(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем в соотношении (3) $\tilde{F} = 0$, $\tilde{G} = e_1(|z|^2 + \bar{z}P(u)) + e_2\bar{z}^2$ и используем это соотношение как рекуррентное для последовательного определения компонент (f, g, h) . Леммы 1–3 показывают, что возникающие уравнения на каждом шаге разрешимы. Условие $P(0) = 0$ есть следствие того, что правая часть уравнения исходной поверхности не содержала линейных членов. Лемма доказана.

Пусть $P_1(u)$ и $P_2(u)$ – вещественная и мнимая части $P(u)$. Введем еще одно предположение, уточняющее требование общности положения нашей особой точки. Будем предполагать, что якобиан (P_1, P_2) не равен 0 в нуле.

ТЕОРЕМА. Росток поверхности M в $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой точке общего положения формальным голоморфным обратимым преобразованием можно привести к виду

$$v = 0, \quad \zeta_1 = |z|^2 + \bar{z}(u_1 + iu_2), \quad \zeta_2 = \bar{z}^2. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подвергнем (6) преобразованию вида $z \mapsto z$, $w_1 \mapsto P_1(w)$, $w_2 \mapsto P_2(w)$, $\zeta \mapsto \zeta$. Теорема доказана.

В работе [2] введена такая характеристика изолированной $\mathbb{R}\mathbb{C}$ -особой точки, как индекс. Отметим, что начало координат для поверхности (7) имеет, в зависимости от ориентации, индекс, равный ± 1 .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: beloshap@ium.ips.ras.ru

Поступило
01.03.97

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lai H. F. // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 172. P. 1–33.
2. Домрин А. В. // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 240–245.
3. Moser J. K., Webster S. M. // Acta Math. 1983. V. 150. P. 255–296.