Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Григорьев, Об одной последовательности тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 935–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1577>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:14:21

ОБ ОДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

П. Г. Григорьев

В заметке установлена следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Существуют абсолютная постоянная A и последовательность тригонометрических полиномов*

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \delta_k(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\text{где } \delta_k = \sum_{2^k \leq |j| < 2^{k+1}} c_j e^{ij t}, \quad k = 1, \dots, n,$$

такие, что выполнены неравенства

$$\frac{\pi}{4} \leq \|\delta_k\|_1, \quad \|\delta_k\|_\infty \leq 6, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\|S_n\|_\infty \leq A\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3)$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ – норма в пространстве $L^p(0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Отметим, что полиномы по системе Хаара

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^n \Delta_k(t), \quad \Delta_k(t) = \sum_{2^k \leq |j| < 2^{k+1}} a_j \chi_j(t),$$

обладающие аналогичными свойствами

$$\|\sigma_n\|_\infty \leq A\sqrt{n}, \quad \sum_{k=1}^n \|\Delta_k\|_1 \asymp n,$$

были использованы С. В. Бочкарёвым для уточнения одного результата А. М. Олевского (см. [1, теорема 3.3]). Наш интерес к построению тригонометрических полиномов со свойствами (2), (3) был вызван попыткой доказать одну гипотезу В. Н. Темлякова о тригонометрических полиномах многих переменных (см. подробнее [2], [3]). Однако, установленный здесь результат показывает, грубо говоря, лишь то, что нельзя доказать эту гипотезу прямым сведением многомерной задачи к одномерной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Заметим, что для всех тригонометрических полиномов вида (1) имеет место оценка (см. [4, гл. XIII, теорема 1.17])

$$\left\| \max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=1}^n \delta_k(t) \right| \right\|_2^2 \leq c_0 \left\| \sum_{k=1}^N \delta_k(t) \right\|_2^2. \quad (4)$$

Будем строить полиномы вида (1), удовлетворяющие (2), (3) с константой $A = 127 + \sqrt{72c_0\pi}$, по индукции. Положим $\delta_1(t) := e^{i2t}$. На каждом шаге для определения δ_{n+1} по уже построенным $\delta_1, \dots, \delta_n$ положим

$$E_n^k := \{t \in [0, 2\pi) : |S_k(t)| > \sqrt{72\pi c_0 n}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$B_n := \bigcup_{k=1}^n E_n^k, \quad (6)$$

$$\tilde{B}_n := \bigcup_{k=1}^{n-20} O_{2\pi(n-k)^2/2^n}(E_n^k), \quad (7)$$

где $O_\varepsilon(X)$ обозначает ε -окрестность множества X на полуинтервале с метрикой окружности. Положим

$$\Lambda_{n+1} := \left\{ j \in \{1, \dots, 2^{n+1}\} : \tilde{B}_n \cap O_{\pi/2^{n+1}}\left(\frac{2\pi j}{2^{n+1}}\right) = \emptyset \right\}, \quad (8)$$

$$\delta_{n+1}(t) := \frac{1}{2^{n+1}} e^{i3 \cdot 2^n t} \sum_{j \in \Lambda_{n+1}} K_{2^n-1}\left(t - 2\pi \frac{j}{2^{n+1}}\right), \quad (9)$$

где $K_N(t)$ – ядра Фейера. Докажем, что выполнено неравенство

$$\text{card } \Lambda_{n+1} > \frac{1}{4} 2^{n+1}. \quad (10)$$

Пользуясь (4) и (2), получим (см. (5), (6))

$$\mu B_n \leq \frac{c_0 \|S_n\|_2^2}{72\pi c_0 n} \leq \frac{2\pi c_0}{72\pi c_0 n} \sum_{k=1}^n \|\delta_k\|_\infty^2 \leq 1. \quad (11)$$

Далее обозначим через $\text{Conn } X$ число компонент связности множества X . Пользуясь тем, что $|S_k|^2$ – вещественный тригонометрический полином степени не выше 2^{k+2} (см. (9)), согласно (5) имеем

$$\text{Conn } E_n^k \leq \frac{1}{2} \text{card}\{t : |S_k(t)|^2 = 72\pi c_0 n\} \leq 2^{k+2}, \quad (12)$$

$$\text{Conn } \tilde{B}_n \leq \sum_{k=1}^{n-20} \text{Conn } E_n^k < 2^{n-17}. \quad (13)$$

Объединяя (11) и (12), получим (см. (7))

$$\mu \tilde{B}_n \leq \mu B_n + 4\pi \sum_{k=1}^{n-20} \frac{(n-k)^2}{2^n} \text{Conn } E_n^k \leq 1 + 16\pi \sum_{k=20}^{n-1} \frac{k^2}{2^k} < 2. \quad (14)$$

Оценим число интервалов вида $O_{\pi/2^{n+1}}(2\pi j/2^{n+1})$, которые пересекаются с $\tilde{B}_n$. Для каждого такого интервала возможен один из случаев: либо он содержит граничную точку $\tilde{B}_n$, либо он полностью включен в $\tilde{B}_n$. Интервалов первого типа не более 2^{n-16} (см. (13)). Из (14) получим следующую оценку для числа N интервалов второго типа:

$$\frac{2\pi}{2^{n+1}}N \leq \mu\tilde{B}_n < 2.$$

Следовательно, $N < 2^n$. Имеем

$$\text{card } \Lambda_{n+1} \geq 2^{n+1} - N - 2^{n-16} > \frac{1}{4}2^{n+1}.$$

Неравенство (10) установлено. Пользуясь известными соотношениями $\|K_N\|_1 = \pi$ и $0 \leq K_{N-1}(t) \leq 5 \min(N, 1/(Nt^2))$, проверим (2) для δ_{n+1} (см. (9), (10))

$$\begin{aligned} \|\delta_{n+1}\|_1 &\geq \frac{1}{2^{n+1}} \left\| \sum_{j \in \Lambda_{n+1}} K_{2^n-1} \left(t - 2\pi \frac{j}{2^{n+1}} \right) \right\|_1 \geq \|K_{2^n-1}\|_1 \frac{\text{card } \Lambda_{n+1}}{2^{n+1}} \geq \frac{\pi}{4}, \\ \|\delta_{n+1}\|_\infty &\leq 5 \max_{t \in [0, 2\pi)} \sum_{j=1}^{\infty} \min \left(1, \frac{1}{2^{2n}(t - 2\pi j/2^{n+1})^2} \right) < 6. \end{aligned}$$

Осталось проверить (3). Пусть $k(t) := \max\{j : |S_j(t)| \leq \sqrt{72\pi c_0 n}\}$. Если $k \geq n-20$, то имеет место неравенство (см. (2))

$$|S_{n+1}(t)| \leq |S_{k(t)}(t)| + \sum_{j=k(t)+1}^{n+1} |\delta_j(t)| \leq \sqrt{72\pi c_0 n} + 6 \cdot 21 = \sqrt{72\pi c_0 n} + 126. \quad (15)$$

Если $k(t) < n-20$, то

$$\begin{aligned} |S_{n+1}| &\leq |S_{k(t)}(t)| + \sum_{j=k(t)+1}^{k(t)+21} |\delta_j(t)| + \sum_{j=k(t)+22}^{n+1} |\delta_j(t)| \\ &\leq \sqrt{72\pi c_0 n} + 126 + \sum_{j=k(t)+22}^{n+1} |\delta_j(t)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим последнее слагаемое. Пусть $k(t) + 22 \leq j \leq n+1$, тогда (см. (5)) $t \in E_n^{k(t)+1}$. Следовательно, $t \in E_{j-1}^{k(t)+1}$, а значит (см. (7)),

$$\inf_{x \in [0, 2\pi) \setminus \tilde{B}_{j-1}} |t - x| \geq \frac{2\pi}{2^{j-1}} (j - 1 - (k(t) + 1))^2$$

и для всех $l \in \Lambda_j$ выполнено (см. (8))

$$\left| t - 2\pi \frac{l}{2^j} \right| \geq \frac{2\pi}{2^{j-1}} |j - k(t) - 2|^2. \quad (17)$$

Далее, пользуясь оценкой ядер Фейера, имеем (см. (8), (9), (17))

$$\begin{aligned}
 |\delta_j(t)| &\leq \frac{1}{2^j} \sum_{l \in \Lambda_j} K_{2^{j-1}-1} \left(t - 2\pi \frac{l}{2^j} \right) \leq 5 \sum_{l \in \Lambda_j} \min \left(1, \frac{1}{2^{2(j-1)} |t - 2\pi l / 2^j|^2} \right) \\
 &\leq 10 \sum_{s=(j-k(t)-2)^2}^{\infty} \frac{1}{16\pi^2 s^2} < \frac{1}{|j - k(t) - 2|^2}, \\
 \sum_{j=k(t)+22}^{n+1} |\delta_j(t)| &\leq \sum_{j=k(t)+22}^{\infty} \frac{1}{|j - k(t) - 2|^2} \leq \frac{1}{19}.
 \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с (15) и (16), имеем

$$|S_{n+1}(t)| \leq \sqrt{72\pi c_0 n} + 127 \leq A\sqrt{n}.$$

Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема может быть обобщена: для любого набора $1 \leq k_1 < \dots < k_n$ найдется полином

$$S_n = \sum_{s=1}^n \delta_{k_s}$$

со свойствами, аналогичными (2), (3).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20.11.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарёв С. В. // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 57–76.
2. Temlyakov V. N. // J. Complexity. 1995. V. 11. P. 293–307.
3. Temlyakov V. N. // East J. Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 253–262.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.