Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ежов, Г. Шмальц, Простое доказательство теоремы Белошапки о параметризации группы автоморфизмов CR -многообразий, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 939–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1578>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:33:02

ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕЛОШАПКИ О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ CR-МНОГООБРАЗИЙ

В. В. Ежов, Г. Шмальц

Пусть $M \subset \mathbb{C}^{n+k}$ – вещественно-аналитическое CR-многообразие коразмерности k и CR-размерности n . В подходящих координатах $(z^1, \dots, z^n, w^1 = u^1 + iv^1, \dots, w^k = u^k + iv^k)$ M записывается уравнением $v = F(z, \bar{z}, u)$, где $F(z, \bar{z}, u)$ – $\mathbb{R}^k$ -значная вещественно-аналитическая функция, которая может быть представлена в виде

$$F(z, \bar{z}, u) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(z, \bar{z}, u),$$

где $F_l(tz, t\bar{z}, t^2u) = t^l F_l(z, \bar{z}, u)$. Заменой переменных члены F_0 и F_1 исключаются, а член F_2 приводится к виду $F_2 = \langle z, z \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – $\mathbb{C}^k$ -значная эрмитова форма в $\mathbb{C}^n$.

Многообразие M называется невырожденным по Леви в точке 0, если следующие условия выполняются:

- 1) из $\langle a, z \rangle = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$ следует, что $a = 0$;
- 2) формы $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$ линейно независимы.

Через G обозначим группу локальных изотропных автоморфизмов M , т.е. ростков биголоморфных отображений φ в 0 таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(M) \subset M$. В 1990 году Белошапка доказал следующий результат [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – невырожденное в нуле вещественно-аналитическое CR-многообразие и $\varphi \in G$. Тогда $\varphi = (f, g)$ однозначно определяется своими первыми и вторыми производными в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в оригинальном доказательстве, пользуясь схемой Мозера [2], выводим некоторую систему дифференциальных уравнений. Пусть $\varphi(z, w) = (z^* = f(z, w), w^* = g(z, w))$, а

$$f = \sum_{q=0}^{\infty} f_q \quad \text{и} \quad g = \sum_{q=0}^{\infty} g_q,$$

где $f_q(tz, t^2w) = t^q f_q(z, w)$ и $g_q(tz, t^2w) = t^q g_q(z, w)$.

Тогда $f_0 = 0$, $f_1 = Cz$, $g_0 = g_1 = 0$, $g_2 = \rho w$, где $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ и $\rho \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$ такие, что $\langle Cz, Cz \rangle = \rho \langle z, z \rangle$.

Условие $\varphi(M) \subset M$ означает, что

$$\text{Im } g(z, w) = \langle f(z, w), f(z, w) \rangle + \sum_{l=3}^{\infty} F_l(f, \bar{f}, \text{Re } g)$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Австралийского фонда фундаментальных исследований (ARC). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Немецкого общества исследований (DFG).

для

$$\operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle + \sum_{l=3}^{\infty} F_l(z, \bar{z}, \operatorname{Re} w).$$

Выделяя μ -ю компоненту, получаем

$$\operatorname{Re}(ig_{\mu} + 2\langle f_{\mu-1}, Cz \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} = F_{\mu}(z, \bar{z}, u) - F_{\mu}(Cz, \overline{Cz}, \rho u) + \dots,$$

где многоточие обозначает выражения, зависящие только от F_{ν} , g_{ν} , $f_{\nu-1}$, $\nu < \mu$. Эта рекуррентная формула однозначно определяет g_{μ} , $f_{\mu-1}$, если младшие компоненты уже известны и соответствующая однородная система

$$\operatorname{Re}(ig_{\mu} + 2\langle f_{\mu-1}, Cz \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} = 0$$

имеет только тривиальное решение. При замене f на Cf и g на ρg эта система принимает вид

$$\operatorname{Re}(ig_{\mu} + 2\langle f_{\mu-1}, z \rangle)|_{v=\langle z, z \rangle} = 0. \quad (1)$$

Собирая в (1) компоненты степени p по z и степени q по $\bar{z}$, производя элементарные преобразования и обозначая теперь через f_p , g_p мономы степени p по z в старых $f_{\mu-1}$ и g_{μ} , получаем, что $g_p = 0$ для $p \geq 2$, $f_p = 0$ для $p \geq 3$, $\operatorname{Im} g_0 = 0$,

$$g_1 = 2i\langle z, f_0 \rangle, \quad (2)$$

$$2\operatorname{Re}\langle f_1, z \rangle = \operatorname{Re} \Delta g_0, \quad (3)$$

$$\langle f_2, z \rangle = 2i\langle z, \Delta f_0 \rangle, \quad (4)$$

$$\operatorname{Im}\langle \Delta f_1, z \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle z, \Delta^2 f_0 \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \Delta^3 g_0 = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta = \sum_{\varkappa=1}^k \langle z, z \rangle^{\varkappa} \frac{\partial}{\partial u^{\varkappa}}$$

(ср. [1]).

При $k > 1$ получается система дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами относительно u (z фиксировано). Для решения этой системы Белошапка использовал теорему Паламодова об экспоненциальном представлении решений таких систем [3, с. 289–321]. Однако, следующий простой подход позволяет этого избежать. Из (7) непосредственно вытекает, что $\operatorname{Re} g_0$, а также g_0 , является многочленом степени не выше 2 по u . Из (3) и (5) заключаем, что

$$\langle \Delta^2 f_1, z \rangle = 0. \quad (8)$$

Покажем, что из (8) следует линейная зависимость f_1 от u . Так как речь идет о полиномиальных решениях, мы предполагаем, что f_1 — многочлен по u и линеен по z . Преобразование Фурье относительно u от (8) равняется

$$\sum_{|m|=0}^M \left\langle \sum_{\nu=1}^n \alpha_m^{\nu} z^{\nu}, z \right\rangle \langle \langle z, z \rangle, \xi \rangle^2 D^m \delta = 0, \quad (9)$$

где ξ – двойственная переменная к u , δ – дельта-функция, $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$, $m = (m_1, \dots, m_k)$ – мультииндексы с $|m| = m_1 + \dots + m_k$,

$$D^m = \frac{\partial^{|m|}}{(\partial u^1)^{m_1} \dots (\partial u^k)^{m_k}},$$

а α_m^ν – постоянные $\mathbb{C}^n$ -векторы.

Без ограничения общности можно считать, что M – наибольшее число такое, что существует ненулевое α_m^ν с $|m| = M$. Тогда M равняется степени многочлена f_1 по u . Среди всех ненулевых α_m^ν с $|m| = M$ выбираем те, для которых m_1 максимально, среди последних выбираем те, для которых m_2 максимально, и т.д. Таким образом, приходим к некоторому однозначно определенному ненулевому матричнозначному коэффициенту $\alpha_{\tilde{m}} = (\alpha_{\tilde{m}}^\nu)$. Предположим $M \geq 2$. Тогда применим функционал из левой части (9) к следующей $\mathbb{R}^k$ -значной пробной функции ψ . Пусть $r \leq k$ – максимальное число с $\tilde{m}_r \neq 0$. Если $\tilde{m}_r \geq 2$, то положим $\psi = \psi_0 \xi_1^{\tilde{m}_1} \dots \xi_r^{\tilde{m}_r - 2}$.

Иначе, пусть $s < r$ – максимальное число, для которого $\tilde{m}_s \neq 0$. Тогда положим $\psi = \psi_0 \xi_1^{\tilde{m}_1} \dots \xi_s^{\tilde{m}_s - 1}$. Вектор ψ_0 будет определен позднее.

Согласно выбору ψ получаем

$$\left(\left\langle \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\tilde{m}}^\nu z^\nu, \zeta \right\rangle \langle z, \zeta \rangle^r, \psi_0 \right) = 0 \quad (10)$$

или соответственно

$$\left(\left\langle \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\tilde{m}}^\nu z^\nu, \zeta \right\rangle \langle z, \zeta \rangle^r \langle z, \zeta \rangle^s, \psi_0 \right) = 0 \quad (11)$$

(мы заменили антиголоморфные z -переменные на ζ).

Выберем $z_0 \in \mathbb{C}^n$ такое, что

$$\sum_{\nu=1}^n \alpha_{\tilde{m}}^\nu z_0^\nu \neq 0.$$

Тогда согласно 1) существует некоторое ζ_0 такое, что

$$\left\langle \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\tilde{m}}^\nu z_0^\nu, \zeta_0 \right\rangle \neq 0. \quad (12)$$

По непрерывности неравенство (12) также верно для z, ζ в достаточно маленьких окрестностях z_0, ζ_0 . Согласно 2) существуют z_1, ζ_1 , принадлежащие этим окрестностям, такие, что $\langle z, \zeta \rangle^r$ и $\langle z, \zeta \rangle^s$ не обращаются в 0. Тогда для подходящих ψ_0 левая часть (11) (соответственно (12)) не обращается в 0. Противоречие. Поэтому предположение $M \geq 2$ неверно. Следовательно, многочлен f_1 линеен по u .

Точно так же, из (6) можно вывести, что f_0 линейно зависит от u . С учетом (2) отсюда следует, что g_1 тоже линеен по u .

Запишем φ в виде

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots, \quad g = g_0 + g_1 + \dots,$$

где многочотия обозначают выражения, которые определяются по f_0, f_1, f_2, g_0, g_1 . Из (4) следует, что f_2 определяется по f_0 , из (2) следует, что g_1 тоже определяется по f_0 . Согласно (3) и (5) f_1 определяется по g_0 .

Таким образом,

$$f = z + aw + \dots, \quad g = w + r(w, w) + \dots.$$

В качестве следствия решения системы (1) Белошাপка [4] получил явное описание инфинитезимальных автоморфизмов невырожденных квадрик $Q = \{(z, w) : \operatorname{Im} w = \langle z, z \rangle\}$. Они оказались голоморфными векторными полями

$$\chi = \sum_{\nu=1}^n \zeta^\nu \frac{\partial}{\partial z^\nu} + \sum_{\varkappa=1}^k \omega^\varkappa \frac{\partial}{\partial w^\varkappa},$$

такими, что

$$\operatorname{Re} \chi(v - \langle z, z \rangle)|_{v - \langle z, z \rangle = 0} = 0.$$

Коэффициенты $\zeta = (\zeta^\nu)$ и $\omega = (\omega^\varkappa)$ удовлетворяют системе (1), поэтому они являются квадратичными функциями $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2$, $\omega = \omega_0 + \omega_1$, где

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= p + aw, & \zeta_1 &= Xz + B(w, z), & \zeta_2 &= A(z, z), \\ \omega_0 &= q + sw + r(w, w), & \omega_1 &= 2i\langle z, p \rangle + 2i\langle z, a\overline{w} \rangle, \end{aligned}$$

$p \in \mathbb{C}^n, q \in \mathbb{R}^k, (X, s) \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{C}) \times \operatorname{GL}(k, \mathbb{R})$ удовлетворяют условию $2 \operatorname{Re} \langle Xz, z \rangle = s\langle z, z \rangle$ для $z \in \mathbb{C}^n$; a — линейное отображение из $\mathbb{C}^k$ в $\mathbb{C}^n$ и $A(z, z)$ — $\mathbb{C}^n$ -значная симметричная билинейная форма на $\mathbb{C}^n$ такие, что

$$\langle A(z, z), z \rangle = 2i\langle z, a\langle z, z \rangle \rangle \quad \text{для } z \in \mathbb{C}^n;$$

$B(w, z)$ — $\mathbb{C}^n$ -значная билинейная форма на $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n$ и $r(w, w)$ — $\mathbb{R}^k$ -значная симметричная билинейная форма на $\mathbb{R}^k$ такие, что

$$\operatorname{Re} \langle B(u, z), z \rangle = r(u, \langle z, z \rangle), \quad \operatorname{Im} \langle B(\langle z, z \rangle, z), z \rangle = 0 \quad \text{для } z \in \mathbb{C}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k.$$

Университет штата Оклахома

Поступило

Институт математики при Боннском университете

15.05.96

E-mail: schmalz@antigone.mpg.de

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белошاپка В.К. // Матем. заметки. 1990. Т. 47. №3. С. 17–22.
2. Chern S.S., Moser J.K. // Acta Math. 1974. V. 133. №3–4. P. 219–271.
3. Паламодов В.П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1967.
4. Белошاپка В.К. // Матем. сб. 1991. Т. 192. №2. С. 203–219.