Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Козлов, С. В. Дронов, О порождающих σ - и π -классов,
Матем. заметки, 1997, том 61, выпуск 6, 943–945

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1579>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 03:48:15

О ПОРОЖДАЮЩИХ σ - И π -КЛАССОВ

С. Д. Козлов, С. В. Дронов

Мы работаем в альтернативной теории множеств, обстоятельное изложение которой можно найти в [1]. В тексте работы будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в [1].

Пусть $\mathbb{F}$ – класс конечных натуральных чисел, латинскими строчными буквами будем обозначать его элементы. Буквы x, y, z (возможно, с индексами) будем использовать в качестве переменных для множеств.

Если класс X определяется теоретико-множественной формулой, то будем называть его *sd-классом*. Если существует счетное число sd -классов $X_i, i \in \mathbb{F}$, таких, что

$$X = \bigcap \{X_i \mid i \in \mathbb{F}\}, \quad Y = \bigcup \{X_i \mid i \in \mathbb{F}\},$$

то X называется π -классом, а Y – σ -классом. Такие sd -классы X_i условимся называть *порождающими* для X, Y . Если для каждого i $X_i \subset X_{i+1}$, то последовательность порождающих назовем *возрастающей цепочкой*, если же для каждого i $X_i \supset X_{i+1}$, то *убывающей цепочкой*. Всюду ниже, без ограничения общности, будем считать, что порождающие σ -класса образуют возрастающую цепочку, а порождающие π -класса – убывающую. Класс X называется *раскрытым*, если любой его счетный подкласс содержится в некотором подмножестве X . Известно, что любой π -класс является раскрытым и счетное пересечение раскрытых (а значит, и sd -) классов раскрыто (см. [1, с. 80]).

Настоящая работа посвящена возможности построения удовлетворяющих $\forall$ -, $\exists$ -формулам цепочек порождающих σ - и π -классов. Из результатов данной работы, в частности, вытекает что такие цепочки можно выбрать из любой цепочки порождающих.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – π -класс, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – теоретико-множественная формула. Тогда класс X удовлетворяет свойству

$$(\forall \mathbf{x} \in X^n) \quad (\exists \mathbf{y} \in X^k) \quad (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

в том и только том случае, когда существует убывающая цепочка порождающих $X_i, i \in \mathbb{F}$, для которой выполнено

$$(\forall i > 1) \quad (\forall \mathbf{x} \in X_i^n) \quad (\exists \mathbf{y} \in X_{i-1}^k) \quad (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Возьмем произвольную $\mathbf{x} \in X^n$ и рассмотрим sd -класс $Y = \{\mathbf{y} \mid \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$. Так как

$$(\forall i) \quad (\forall \mathbf{x} \in X_i^n) \quad (\exists \mathbf{y}_i \in X_{i-1}^k) \quad (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)),$$

то $(\forall i) \quad (Z_i = X_i^k \cap Y \neq \emptyset)$. Поскольку последовательность классов Z_i не возрастает, то

$$(\forall m) \quad \left(\bigcap \{Z_i \mid i \leq m\} = Z_m \neq \emptyset \right),$$

откуда по теореме о счетном пересечении раскрытых классов [1, гл. 11, п. 4] имеем

$$\bigcap \{Z_i \mid i \in \mathbb{F}\} = Y \cap \left(\bigcap \{X_i^k \mid i \in \mathbb{F}\} \right) \neq \emptyset.$$

Таким образом, в этом пересечении найдется элемент $\mathbf{y}$. Он содержится во всех X_i^k (а значит, и в X^k), и выполняется $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $Z_i, i \in \mathbb{F}$, – некоторая убывающая цепочка порождающих. Покажем, что

$$(\forall i) (\exists j > i) (\forall \mathbf{x} \in Z_j^n) (\exists \mathbf{y} \in Z_i^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (1)$$

Предположим, напротив, что

$$(\exists i) (\forall j > i) (\exists \mathbf{x} \in Z_j^n) (\forall \mathbf{y} \in Z_i^k) (\neg \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

и рассмотрим sd-класс

$$Y_i = \{\mathbf{x} \mid (\forall \mathbf{y} \in Z_i^k) (\neg \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\}.$$

Очевидно, что $(\forall j > i) (Y_i \cap Z_j^n \neq \emptyset)$. Так как $U_j = Y_i \cap Z_j^n, j \in \mathbb{F}$, – убывающая цепочка непустых sd-классов, то

$$Y_i \cap \left(\bigcap \{Z_j^n \mid j \in \mathbb{F}\} \right) = \bigcap \{U_j \mid j \in \mathbb{F}\} \neq \emptyset.$$

Отсюда $(\exists \mathbf{x} \in X^n) (\forall \mathbf{y} \in Z_i^k) (\neg \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. В частности, так как $X \subset Z_i$, то $(\exists \mathbf{x} \in X^n) (\forall \mathbf{y} \in X^k) (\neg \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. Полученное противоречие доказывает (1). Свойство (1) позволяет по убывающей цепочке порождающих $Z_i, i \in \mathbb{F}$, шаг за шагом построить требуемую убывающую цепочку $X_i, i \in \mathbb{F}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – σ -класс, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – теоретико-множественная формула. Тогда класс X удовлетворяет свойству

$$(\forall \mathbf{x} \in X^n) (\exists \mathbf{y} \in X^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

в том и только том случае, если существует возрастающая цепочка порождающих $X_i, i \in \mathbb{F}$, для которой выполнено

$$(\forall i) (\forall \mathbf{x} \in X_i^n) (\exists \mathbf{y} \in X_{i+1}^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $Z_i, i \in \mathbb{F}$, – некоторая возрастающая цепочка порождающих. Покажем, что

$$(\forall i) (\exists j > i) (\forall \mathbf{x} \in Z_i^n) (\exists \mathbf{y} \in Z_j^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (2)$$

для чего предположим противное:

$$(\exists i) (\forall j > i) (\exists \mathbf{x}' \in Z_i^n) (\forall \mathbf{y} \in Z_j^k) (\neg \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y})).$$

Отсюда следует, что

$$X^k = \bigcup \{Z_j^k \mid j > i\} \subset \{\mathbf{y} \mid \neg \varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y})\},$$

т.е. в X^k не найдется ни одного $\mathbf{y}$, для которого $\varphi(\mathbf{x}', \mathbf{y})$. Полученное противоречие доказывает (2), откуда шаг за шагом можно построить требуемую систему порождающих $X_i, i \in \mathbb{F}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще говоря, нельзя утверждать, что в условиях теорем можно выбрать цепочку порождающих с требуемым свойством “без сдвига индексов”. Например, пусть $X = \mathbb{F}$. Справедлива формула

$$(\forall x \in X) (\exists y \in X) (x < y),$$

но в цепочке порождающих $X_n = n$ ни для какого n не выполнено

$$(\forall x \in X_n) (\exists y \in X_n) (x < y).$$

Более того, выполнение последней формулы означает, что X_n не может являться множеством, а поэтому построение цепочки порождающих для $\mathbb{F}$ с этим свойством в принципе невозможно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условий теорем, если класс X удовлетворяет свойству

$$(\exists \mathbf{x} \in X^n) (\forall \mathbf{y} \in X^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (3)$$

то существует возрастающая (соответственно убывающая) цепочка порождающих X_i , $i \in \mathbb{F}$, для которой выполнено

$$(\forall i) (\exists \mathbf{x} \in X_i^n) (\forall \mathbf{y} \in X_i^k) (\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})). \quad (4)$$

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, что показывают следующие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \mathbb{N} \setminus \mathbb{F}$, $X_i = \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, i\}$, $n = k = 1$, $\varphi(x, y) = (x \leq y)$. Хотя, в каждом $\mathbb{N} \setminus \{1, \dots, i\}$ есть минимальный элемент (см. (4)), но в $\mathbb{N} \setminus \mathbb{F}$ минимального элемента нет, а формула (3) утверждает его существование.

ПРИМЕР 2. Аналогично, положим $X = \mathbb{F}$, $X_i = i$, $n = k = 1$, $\varphi(x, y) = (y \leq x)$. Здесь контрпример связан с отсутствием максимального элемента в $\mathbb{F}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – π -класс (соответственно σ -класс), $\varphi(\mathbf{x})$ – теоретико-множественная формула. Тогда класс X удовлетворяет свойству $(\forall \mathbf{x} \in X^n) (\varphi(\mathbf{x}))$ тогда и только тогда, когда существует убывающая (соответственно возрастающая) цепочка порождающих X_i , $i \in \mathbb{F}$, такая, что

$$(\forall i) (\forall \mathbf{x} \in X_i^n) (\varphi(\mathbf{x})).$$

Алтайский государственный университет,
г. Барнаул

Поступило
04.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вopenка П. Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир, 1983.