Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Масальцев, Непогружаемость нилмнообразий в виде гиперповерхностей в евклидово пространство, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 868–873

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 09:43:53

УДК 514

НЕПОГРУЖАЕМОСТЬ НИЛМНОГООБРАЗИЙ В ВИДЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Л. А. Масальцев

Доказано, что $2n+1$ -мерная группа Гейзенберга H_n и 4-многообразия $\text{Nil}^4, \text{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ с произвольной левоинвариантной метрикой не допускают C^3 -регулярного погружения в виде гиперповерхностей в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$ и $\mathbb{R}^5$ соответственно.

Библиография: 7 названий.

В работе [1] Ривертц доказал теорему о том, что не существует регулярного изометрического погружения трехмерной группы Гейзенберга с произвольной левоинвариантной метрикой в евклидово пространство $\mathbb{R}^4$. Напомним, что дифференцируемое отображение $f: M^m \rightarrow N^n$ дифференцируемых многообразий называется *погружением*, если его дифференциал $f_*(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ является инъективным для всех $x \in M^m$. Погружение риманова многообразия M^m с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ в риманово многообразие N^n с метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ называется *изометрическим*, если $\langle X, Y \rangle_M = \langle f_* X, f_* Y \rangle_N$ для всех $x \in M$ и всех $X, Y \in T_x M$. Обзор результатов по изометрическим погружениям с доказательствами содержится в главе 3 монографии [2] Громова.

В настоящей заметке мы обобщаем результат Ривертца на $(2n+1)$ -мерную группу Гейзенберга H_n с произвольной левоинвариантной метрикой.

ТЕОРЕМА 1. *Не существует C^3 -регулярного изометрического погружения $(2n+1)$ -мерной группы Гейзенберга H_n в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$.*

Известно [3, п. 7.3], что существует три односвязных 4-мерных нильпотентных группы Ли: $\mathbb{R}^4, \text{Nil}^3 \times \mathbb{R}, \text{Nil}^4$. Для них мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Не существует C^3 -регулярного изометрического погружения 4-мерных групп $\text{Nil}^3 \times \mathbb{R}, \text{Nil}^4$ с произвольными левоинвариантными метриками в евклидово пространство $\mathbb{R}^5$.*

Следует заметить, что нилмногообразия в теоремах 1 и 2 допускают гладкие (неизометрические) погружения коразмерности 1 в евклидово пространство по теореме Смейла–Хирша. Известная теорема Черна–Кейпера [4, с. 34, теорема 4.7] утверждает, что если в каждой точке x компактного риманова многообразия M^m касательное пространство $T_x M$ содержит k -мерное подпространство T'_x такое, что секционная кривизна любой плоскости из T'_x неположительна, то коразмерность p изометрического погружения M^m в евклидово пространство $\mathbb{R}^{m+p}$ удовлетворяет неравенству $p \geq k$. Поскольку у нилмногообразий, рассмотренных в теоремах 1 и 2, в любой точке x имеются двумерные плоскости в $T_x M$, в направлении которых секционная кривизна отрицательна, то для их компактных фактор-многообразий теорема Черна–Кейпера верифицирует

результаты теорем 1 и 2. Заметим также, что поскольку рассматриваемые нимногообразия аналитические, то согласно классической теореме Жана [2, с. 25] существует окрестность любой точки $x \in M^m$, допускающая изометрическое аналитическое вложение в евклидово пространство $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$.

1. Риманова группа Гейзенберга H_n и ее алгебра Ли. Приведем необходимые сведения, которые содержатся в [5], сохраняя введенные там обозначения. $(2n+1)$ -мерная группа Гейзенберга есть подгруппа $H_n = (h(x, y, t) : x, y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R})$ группы $GL(n+2, \mathbb{R})$, где

$$h(x, y, t) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & t \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение в группе задается законом

$$h(x, y, t)h(x', y', t') = h(x + x', y + y', t + t' + \langle x, y' \rangle),$$

где $\langle x, y' \rangle$ есть стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Алгебра Ли h_n группы H_n имеет базис $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z$, образующие которого удовлетворяют соотношениям $[X_i, Y_i] = Z, i = 1, \dots, n$, и остальные скобки равны нулю. Всякая левоинвариантная метрика на H_n однозначно определяется ассоциированным внутренним произведением на касательном пространстве $T_e(H_n) = h_n$ в единице e . В [5, лемма 2.8] доказано, что всякая левоинвариантная метрика на H_n изометрична единственной метрике с внутренним скалярным произведением в h_n диагонального вида

$$\langle X_i, X_i \rangle = \langle Y_i, Y_i \rangle = a_i, \quad \langle Z, Z \rangle = 1, \quad (1)$$

где $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$.

2. Непогружаемость группы Гейзенберга H_n в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются вычислить компоненты тензора Римана $R_{i,k,i,k}$ и $R_{i,r,i,j}$ левоинвариантной метрики в единице $e \in H_n$.

ЛЕММА. Среди компонент вида $R_{i,k,i,k}$ и $R_{i,r,i,j}$ тензора Римана левоинвариантной метрики (1) в единице e ненулевыми являются следующие:

$$R_{i,n+i,i,n+i} = -\frac{3}{4}, \quad R_{i,2n+1,i,2n+1} = R_{n+i,2n+1,n+i,2n+1} = \frac{1}{4a_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [6, предложение 7.28] для ковариантной производной левоинвариантной метрики в точке e справедлива формула $(\nabla_P Q)_e = -\frac{1}{2}[P, Q] + U(P, Q)$, где симметрическое отображение $U: h_n \times h_n \rightarrow h_n$ определяется равенством

$$2\langle U(P, Q), R \rangle = \langle [R, P], Q \rangle + \langle P, [R, Q] \rangle \quad \text{для всех } P, Q, R \in h_n.$$

Учитывая выражение левоинвариантной метрики в точке e , получим

$$U(X_i, Z) = -\frac{1}{2a_i}Y_i, \quad U(Y_i, Z) = \frac{1}{2a_i}X_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Значения отображения U на остальных парах базисных векторов равны нулю. Для ненулевых ковариантных производных получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_i} Y_i &= -\frac{1}{2}Z, \quad \nabla_{Y_i} X_i = \frac{1}{2}Z, \\ \nabla_{X_i} Z &= -\frac{1}{2a_i}Y_i, \quad \nabla_{Y_i} Z = \frac{1}{2a_i}X_i, \quad \nabla_Z X_i = -\frac{1}{2a_i}Y_i, \quad \nabla_Z Y_i = \frac{1}{2a_i}X_i, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n.$$

Для вычисления компонент тензора Римана $R_{i,k,i,k}$ можно прямо использовать формулу [6, п. 7.30]

$$\begin{aligned} R_{i,k,i,k} &= \langle R(V_i, V_k)V_i, V_k \rangle = -\frac{3}{4}[V_i, V_k]^2 - \frac{1}{2}\langle [V_i, [V_i, V_k]], V_k \rangle - \frac{1}{2}\langle [V_k, [V_k, V_i]], V_i \rangle \\ &\quad + |U(V_i, V_k)|^2 - \langle U(V_i, V_i), U(V_k, V_k) \rangle. \end{aligned}$$

Применяя эту формулу, получим следующие ненулевые компоненты (мы предполагаем, что базис алгебры Ли группы H_n упорядочен в связи с выше приведенной формулой следующим образом: $V_1 = X_1, \dots, V_n = X_n, V_{n+1} = Y_1, \dots, V_{2n} = Y_n, V_{2n+1} = Z$)

$$R_{i,n+i,i,n+i} = -\frac{3}{4}, \quad R_{i,2n+1,i,2n+1} = R_{n+i,2n+1,n+i,2n+1} = \frac{1}{4a_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Вычисление компонент вида $R_{i,k,i,j} = \langle R(V_i, V_j)V_k, V_i \rangle$ проводится непосредственно с использованием формулы $R(V_i, V_j)V_k = \nabla_{V_i}\nabla_{V_j}V_k - \nabla_{V_j}\nabla_{V_i}V_k - \nabla_{[V_i,V_j]}V_k$ и дает нулевые значения для всех них.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для группы Гейзенберга H_2 нетрудно найти следующее выражение левоинвариантной метрики

$$ds^2 = a_1(dx_1^2 + dy_1^2) + a_2(dx_2^2 + dy_2^2) + (x_1dy_1 + x_2dy_2 - dt)^2.$$

Компьютерные вычисления в Maple с использованием опции `Riemann` в пакете для работы с тензорами `with(tensor)` дают следующие значения для ненулевых компонент тензора Римана:

$$\begin{aligned} R_{1,3,1,3} &= R_{2,4,2,4} = -\frac{1}{4D}(-3a_1a_2 + 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_2^2 + a_2x_1^2 + a_1x_2^2), \quad R_{2,5,2,5} = -\frac{a_1}{4D}, \\ R_{1,5,1,5} &= -\frac{a_2}{4D}, \quad R_{4,5,4,5} = \frac{1}{4a_2}, \quad R_{3,5,3,5} = \frac{1}{4a_1}, \quad R_{1,5,2,3} = -R_{1,2,3,5} = \frac{a_1x_2}{4D}, \\ R_{1,4,2,3} &= -R_{1,2,3,4} = -\frac{1}{4D}(x_1^2x_2^2 - a_2x_1^2 - a_1x_2^2 + a_1a_2 - x_1x_2^2), \\ R_{1,4,2,5} &= R_{1,2,4,5} = -R_{1,3,1,5} = -\frac{a_2x_1}{4D}, \quad R_{2,4,2,5} = \frac{a_1x_2}{4D}, \end{aligned}$$

где $D = -a_1a_2 + x_1x_2^2 - x_1^2x_2^2$.

Легко видеть, что в точке e , т.е. при $x_1 = x_2 = 0$ получаются значения компонент, указанные в лемме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Допустим, что существует регулярное класса C^3 погружение римановой группы Гейзенберга H_n (размерности $2n + 1$) в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$. Тогда имеет место система уравнений Гаусса в точке e [7, с. 66]

$$R_{i,j,k,l} = b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq 2n + 1,$$

где $R_{i,j,k,l}$ – компоненты тензора Римана группы H_n , погруженной в виде гиперповерхности в $\mathbb{R}^{2n+2}$, и b_{ik} – коэффициенты ее второй фундаментальной формы.

Дальше мы выписываем не все уравнения Гаусса, а только те, которые потребуются для доказательства противоречивости:

$$\begin{aligned} R_{i,n+i,i,n+i} &= b_{ii}b_{n+i,n+i} - b_{i,n+i}^2 = -\frac{3}{4}, \\ R_{i,2n+1,i,2n+1} &= b_{ii}b_{2n+1,2n+1} - b_{i,2n+1}^2 = \frac{1}{4a_i}, \quad i = 1, \dots, n, \\ R_{n+i,2n+1,n+i,2n+1} &= b_{n+i,n+i}b_{2n+1,2n+1} - b_{n+i,2n+1}^2 = \frac{1}{4a_i}, \\ R_{k,t,t,s} &= b_{kt}b_{ts} - b_{ks}b_{tt} = 0, \end{aligned}$$

где индексы $1 \leq k, t, s \leq 2n + 1$ попарно разные. Рассмотрим тройку следующих уравнений из данной системы:

$$\begin{aligned} R_{i,2n+1,i,2n+1} &= b_{ii}b_{2n+1,2n+1} - b_{i,2n+1}^2 = \frac{1}{4a_i}, \\ R_{k,i,i,2n+1} &= b_{ki}b_{i,2n+1} - b_{k2n+1}b_{ii} = 0, \\ R_{k,2n+1,2n+1,i} &= b_{k2n+1}b_{2n+1,i} - b_{ki}b_{2n+1,2n+1} = 0, \end{aligned}$$

где $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq 2n, i \neq k$.

Если умножить второе из этих уравнений на $b_{2n+1,2n+1}$, а третье – на $b_{i,2n+1}$ и почленно сложить, то получим

$$b_{k2n+1}(b_{i,2n+1}^2 - b_{ii}b_{2n+1,2n+1}) = 0.$$

Откуда, с учетом первого уравнения следует, что $b_{k2n+1} = 0$. Аналогично, если умножить второе уравнение на $b_{i,2n+1}$, третье – на b_{ii} и сложить, то с учетом первого получим $b_{ki} = 0$. В частности, имеем $b_{12n+1} = b_{1n+1} = b_{n+1,2n+1} = 0$. Тогда тройка уравнений

$$\begin{aligned} R_{1,n+1,1,n+1} &= b_{11}b_{n+1,n+1} = -\frac{3}{4}, \quad R_{1,2n+1,1,2n+1} = b_{11}b_{2n+1,2n+1} = \frac{1}{4a_1}, \\ R_{n+1,2n+1,n+1,2n+1} &= b_{n+1,n+1}b_{2n+1,2n+1} = \frac{1}{4a_1}, \end{aligned}$$

противоречива, поскольку из них следует, что $b_{11}^2 < 0$, что и доказывает непогружаемость H_n в $\mathbb{R}^{2n+2}$.

3. Nil⁴-многообразие и его левоинвариантная метрика. Как известно [3, с. 135], группа Nil⁴ представляет собой полупрямое произведение $\mathbb{R}^3 \times_{\theta} \mathbb{R}$, где

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, умножение в Nil⁴ задается законом

$$(g, s)(h, t) = (g + \theta(s)h, s + t) = \left(\begin{pmatrix} g_1 + h_1 + sh_2 + \frac{s^2}{2}h_3 \\ g_2 + h_2 + sh_3 \\ g_3 + h_3 \end{pmatrix}, s + t \right),$$

где $g, h \in \mathbb{R}^3$, $t, s \in \mathbb{R}$. Если метрический тензор левоинвариантной метрики Nil⁴ в точке e имеет диагональный вид $g_{ij}(e) = \delta_{ij}a_i$, где $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, то нетрудно найти его выражение в произвольной точке (g, s) :

$$g_{ij}((g, s)) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1s & a_1\frac{s^2}{2} & 0 \\ -a_1s & a_1s^2 + a_2 & -s(a_2 + a_1\frac{s^2}{2}) & 0 \\ a_1\frac{s^2}{2} & -s(a_2 + a_1\frac{s^2}{2}) & a_1\frac{s^4}{4} + a_2s^2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ненулевые компоненты тензора Римана в точке e , вычисленные в Maple, с использованием опции Riemann в пакете with(tensor), имеют следующие значения:

$$R_{2,3,2,3} = \frac{a_2^2}{4a_4}, \quad R_{1,4,3,4} = -\frac{a_1}{4}, \quad R_{3,4,3,4} = -\frac{3a_2}{4}, \quad R_{1,4,1,4} = \frac{a_1^2}{4a_2},$$

$$R_{1,2,2,3} = -\frac{a_1a_2}{4a_4}, \quad R_{1,2,1,2} = \frac{a_1^2}{4a_4}, \quad R_{2,4,2,4} = -\frac{3a_1a_3 - a_2^2}{4a_3}.$$

4. Непогружаемость Nil⁴ с произвольной левоинвариантной метрикой в $\mathbb{R}^5$. Допустим, что нилмногообразие Nil⁴ с левоинвариантной метрикой (3) погружено в $\mathbb{R}^5$. Тогда справедливы следующие уравнения Гаусса в единице e (поскольку система переопределенная, мы выписываем только те из уравнений Гаусса, которые потребуются для доказательства ее противоречивости):

- 1) $R_{1,2,1,2} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = a_1^2/(4a_4)$,
- 2) $R_{2,3,2,3} = b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = a_2^2/(4a_4)$,
- 3) $R_{3,4,3,4} = b_{33}b_{44} - b_{34}^2 = -3a_2/4$,
- 4) $R_{1,2,1,3} = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{12} = 0$,
- 5) $R_{2,3,2,4} = b_{22}b_{34} - b_{24}b_{23} = 0$,
- 6) $R_{3,2,3,4} = b_{33}b_{24} - b_{32}b_{34} = 0$,
- 7) $R_{1,3,1,4} = b_{11}b_{34} - b_{14}b_{13} = 0$,
- 8) $R_{2,1,2,3} = b_{22}b_{13} - b_{23}b_{21} = a_1a_2/(4a_4)$,
- 9) $R_{4,2,4,3} = b_{44}b_{23} - b_{42}b_{43} = 0$,
- 10) $R_{1,2,3,4} = b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0$.

Действуя с тройкой уравнений 2), 5), 6) таким же образом, как при доказательстве теоремы 1, получим, что $b_{34} = 0$.

Опирируя затем так же с тройкой уравнений 3), 6), 9) найдем, что $b_{23} = 0$.

Тогда из уравнения 8) будет следовать, что $b_{13} \neq 0$.

Изучение уравнений 4), 7), 10) дает, что $b_{24} = b_{14} = b_{12} = 0$.

Наконец, анализ тройки уравнений 1), 2) и 3) приводит к абсурду, что и доказывает противоречивость выписанной системы уравнений Гаусса.

5. Непогружаемость $\text{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^5$. Поскольку согласно [5, лемма 2.8] всякая левоинвариантная метрика на группе Гейзенберга H_1 изометрична некоторой левоинвариантной метрике с метрическим тензором в единице e вида $\text{diag}(a, a, 1)$, $a > 0$, то можно считать, что левоинвариантная метрика на $\text{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ имеет вид

$$ds^2 = a(dx^2 + dy^2) + (dz - x dy)^2 + dt^2,$$

где $(x, y, z) \in \text{Nil}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Ненулевые компоненты тензора Римана данной метрики, вычисленные в Maple, следующие:

$$R_{1,2,1,2} = -\frac{3a - x^2}{4a}, \quad R_{2,3,2,3} = R_{1,3,1,3} = \frac{1}{4a}, \quad R_{1,2,1,3} = -\frac{x}{4a}.$$

Если предположить, что $\text{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ допускает регулярное погружение в $\mathbb{R}^5$, то должны выполняться уравнения Гаусса. Рассматривая в точке e тройку уравнений

- 1) $R_{1,2,2,3} = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} = 0$,
- 2) $R_{1,3,3,2} = b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33} = 0$,
- 3) $R_{2,3,2,3} = b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 1/(4a)$,

аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1, получим

$$b_{13} = b_{12} = 0.$$

Затем, рассматривая тройку уравнений

- 2) $R_{1,3,3,2} = b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33} = 0$,
- 4) $R_{2,1,1,3} = b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11} = 0$,
- 5) $R_{1,3,1,3} = b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 1/(4a)$,

получим, что $b_{23} = 0$. Тогда тройка уравнений

- 3) $R_{2,3,2,3} = b_{22}b_{33} = 1/(4a)$,
- 5) $R_{1,3,1,3} = b_{11}b_{33} = 1/(4a)$,
- 6) $R_{1,2,1,2} = b_{11}b_{22} = -3/4$

противоречива, что и доказывает непогружаемость $\text{Nil}^3 \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^5$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rivertz H. J. An obstruction to isometric immersion of the threedimensional Heisenberg group into $\mathbb{R}^4$ // Preprint series in Pure Mathematics № 22. Oslo: Matematisk institut Univ. Oslo, 1999.
- [2] Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
- [3] Hillman J. A. Four-manifolds, Geometries and Knots. Geometry and Topology Monographs. V. 5: Sydney, 2002.
- [4] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
- [5] Gordon C. Riemannian manifolds isospectral on functions but not on 1-forms // J. Differential Geometry. 1986. V. 24. P. 79–96.
- [6] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
- [7] Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев: Наукова думка, 2002.

Харьковский национальный университет им. В. Каразина, Украина
E-mail: masaltsev@univer.kharkov.ua

Поступило
25.09.2003
Исправленный вариант
30.03.2004