Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Соловьев, Начальные сегменты эффективно-конечных порядков, *Матем. заметки*, 1997, том 61, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 05:25:00

НАЧАЛЬНЫЕ СЕГМЕНТЫ ЭФФЕКТИВНО-КОНЕЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В. Д. Соловьёв

Частичный порядок ' $\leq$ ' на ряде натуральных чисел $\mathbb{N}$, рассматриваемый как бинарное отношение, является *рекурсивно перечислимым*, если множество пар $\langle x, y \rangle$ таких, что $x \leq y$ рекурсивно перечислимо. В ряде разделов теории алгоритмов встречаются рекурсивно перечислимые порядки, задаваемые более специальным образом.

Например, эффективная разметка натуральным рядом вершин бинарного дерева определяет рекурсивно перечислимый порядок, если положить $x \leq y$ тогда и только тогда, когда y расположен на той же ветви, что и x , и y ближе к корню, чем x . Характерной особенностью этого порядка является наличие двух функций $l(x)$ и $r(x)$, определяемых как левый и правый сын вершины x . Эти две функции полностью определяют указанный выше частичный порядок, причем $x \leq y \iff x = y \vee \exists \tau (\tau - \text{терм языка } \{l, r\} \text{ и } x = \tau(y))$.

Вводимые далее определения естественным образом обобщают частичные порядки, связанные с деревьями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для данного набора $\mathcal{P} = \{f_1, \dots, f_n\}$ частично рекурсивных функций частичный порядок ' $\leq_{\mathcal{P}}$ ', задаваемый условием $x \leq_{\mathcal{P}} y \iff x = y \vee \exists \tau (\tau - \text{терм языка } \mathcal{P} \text{ и } x = \tau(y))$ назовем *эффективно-конечным*, определяемым набором $\mathcal{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Начальным сегментом частичного порядка ' $\leq$ ' называется такое множество S , что $\forall x, y (x \leq y \ \& \ y \in S \iff x \in S)$.*

Легко видеть, что начальным сегментом эффективно-конечных порядков являются регрессивные множества и сплинтеры (определения этих понятий можно найти в [1]).

В первом случае эффективно-конечный порядок будет иметь минимальный элемент, а во втором – максимальный.

Начальные сегменты эффективно-конечных порядков существенным образом используются в теории программных алгебр рекурсивных функций. Так в [2] показано, что множество $\{f \mid f \text{ есть 1-местная общерекурсивная функция и } f(A) \subseteq A\} \cup \{1\text{-местные общерекурсивные предикаты}\}$ является максимальной подалгеброй тогда и только тогда, когда A является начальным сегментом некоторого эффективно-конечного порядка, определяемого набором общерекурсивных функций и обладающего наибольшим элементом.

Для алгебры частично рекурсивных функций имеет место аналогичный результат с той разницей, что эффективно-конечный порядок определяется набором частично рекурсивных функций.

Доказываемые в данной работе утверждения устанавливают существенную разницу в свойствах порядков, определяемых наборами обще- и частично рекурсивных функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если A – начальный сегмент эффективно-конечного порядка с наибольшим элементом, определяемого набором общерекурсивных функций, то $\overline{A}$ не гипериммунно.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-16004.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть набор $\mathcal{L} = \{f_1, \dots, f_n\}$ определяет частичный порядок ' $\leq_{\mathcal{L}}$ ' и x_0 – его наибольший элемент. Тогда либо $\bar{A}$ конечно, либо каждое из множеств

$$E_1 = \{x_0\}, \quad E_2 = \bigcup_{i=1}^n \{f_i(x_0)\}, \quad E_3 = \bigcup_{i=1}^n \{f_i(E_2)\}, \quad \dots$$

пересекается с $\bar{A}$ и, более того, каждое из множеств

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = E_2 - E_1, \quad E'_3 = E_3 - (E_2 \cup E_1), \quad \dots$$

тоже пересекается с $\bar{A}$. Это следует из того, что A – начальный сегмент порядка ' $\leq_{\mathcal{L}}$ ', поэтому если для какого-нибудь E_i выполнено $E_i \subseteq A$, то и $E_{i+1} \subseteq A$.

Система конечных множеств $\{E'_i\}_{i=1}^{\infty}$ строится эффективно-конечным образом, различные множества этой системы попарно не пересекаются и поэтому $\bar{A}$ не гипериммунно. Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует рекурсивно перечислимое множество с гипериммунным дополнением, являющееся начальным сегментом эффективно-конечного порядка, с наибольшим элементом, определяемого набором частично рекурсивных функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение искомого множества A будет вестись пошагово методом приоритета [1]. Параллельно с ним будут строиться две частично рекурсивные функции f и g , которые и определяют эффективно-конечный порядок.

Обозначим через $A^{(n)}$, $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ части множества A , функций f и g соответственно, построенные за n шагов. Назовем число *вакантным на шаге n* , если оно не входит в область значений функций $f^{(n-1)}$, $g^{(n-1)}$. Построение будет вестись таким образом, что на каждом шаге невакантные числа образуют начальный отрезок N .

Составим список всех частично рекурсивных функций: $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ – и будем вычислять параллельно (разумеется, это можно моделировать последовательным алгоритмом) значения всех частично рекурсивных функций во всех точках, как это принято в теории алгоритмов [1]. В ходе построения некоторые функции из этого списка будут вычеркиваться.

В конструкции используются маркеры. В начальный момент около всех чисел устанавливаются маркеры: около числа i – маркер $\boxed{i}$. В ходе построения маркеры будут сдвигаться, причем так, что если число теряет маркер, то оно уже не может приобрести его в дальнейшем. Обозначим число, около которого стоит маркер $\boxed{i}$ после n шагов, через $a_i^{(n)}$.

Сдвиги осуществляются таким образом, что $\forall n \forall i \exists j \geq i (a_i^{(n+1)} = a_j^{(n)})$. Множество $A^{(n)}$ после шага n будут составлять числа, оставшиеся без маркеров.

Шаг 0. Пусть $A^{(0)} = \emptyset$, $f^{(0)}(0) = 1$. Переходим к следующему шагу.

Шаг n . Для тех частично рекурсивных функций, которые еще не вычеркнуты из списка $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ и имеют номера $\leq n$, сделаем по n шагов в вычислениях их значений в точках $0, \dots, n$.

Пусть число i удовлетворяет следующему свойству:

(*) i – наименьшее число такое, что значения $\varphi_i^{(n)}(0), \dots, \varphi_i^{(n)}(k_i)$ для некоторого $k_i \leq n$ все вычислились, $\mathcal{D}_{\varphi_i^{(n)}(0)}, \dots, \mathcal{D}_{\varphi_i^{(n)}(k_i)}$ попарно не пересекаются, все

имеют непустое пересечение с $A^{(n)}$ и для некоторого j $\mathcal{D}_{\varphi_i^{(n)}(j)}$ не содержит чисел $a_0^{(n-1)}, \dots, a_i^{(n-1)}$.

Сдвигаем все маркеры $\boxed{i'}$, $i' > i$, таким образом, что маркер $\boxed{i+1}$ устанавливается около наименьшего вакантного числа, большего всех чисел из $\mathcal{D}_{\varphi_i^{(n)}(j)}$. Для всех $k > 1$ маркер $\boxed{i+k}$ устанавливается около числа $a_{i+1}^{(n)} + k - 1$. Остальные маркеры на этом шаге не сдвигаются.

Определяем на числе $a_i^{(n)}$ функцию g как $a_{i+1}^{(n)}$, на числах от $a_i^{(n)} + 1$ до $a_{i+1}^{(n)} - 2$ — функцию $f(x)$ как $x + 1$.

Вычеркиваем φ_i из списка $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ частично рекурсивных функций.

Определяем функцию f на числе $a_{i+1}^{(n)}$ равной $a_{i+1}^{(n)} + 1$.

Если числа i со свойством $(*)$ не найдется, то находим наименьшее вакантное число x , на котором функция f еще не определена, и полагаем $f(x) = x + 1$.

Построение завершено. Множество $A = \bigcup_n A^{(n)}$ есть множество чисел, оставшихся в итоге без маркеров; $f = \bigcup_n f^{(n)}$ и $g = \bigcup_n g^{(n)}$.

Докажем, что множество A удовлетворяет требованиям предложения 2 в каждом из следующих случаев:

- а) $\bar{A}$ бесконечно;
- б) $\bar{A}$ гипериммунно;
- в) A рекурсивно перечислимо;
- г) эффе́ктивно-конечный порядок ' $\leq_{\{f,g\}}$ ' обладает наибольшим элементом;
- д) A — начальный сегмент порядка ' $\leq_{\{f,g\}}$ '.

а) Покажем, что любой маркер сдвигается лишь конечное число раз. Действительно, маркер $\boxed{0}$ не сдвигается вообще. Маркер $\boxed{1}$ может сдвинуться лишь один раз при выполнении требования $(*)$ для функции φ_0 , так как после этого φ_0 вычеркивается из списка частично рекурсивных функций. Аналогично, маркер $\boxed{n}$ может сдвигаться лишь при выполнении требования $(*)$ для функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, которые после этого вычеркиваются. Следовательно, $\boxed{n}$ сдвигается лишь конечное число раз.

Так как число, около которого стоит маркер в своей окончательной позиции, принадлежит множеству $\bar{A}$, отсюда следует, что $\bar{A}$ бесконечно.

б) Действительно, предположим противное. Если бы существовала такая общерекурсивная функция φ_t , что

$$\forall x (\mathcal{D}_{\varphi_t(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset) \ \& \ \forall x, y (x \neq y \implies \mathcal{D}_{\varphi_t(x)} \cap \mathcal{D}_{\varphi_t(y)} = \emptyset),$$

то на некотором шаге $n > t$ вычислились бы $\varphi_t^{(n)}(0), \dots, \varphi_t^{(n)}(t+1)$, и так как $\forall x, y (x \neq y \implies \mathcal{D}_{\varphi_t(x)} \cap \mathcal{D}_{\varphi_t(y)} = \emptyset)$, то найдется число j такое, что $\mathcal{D}_{\varphi_t(j)}$ не содержит чисел с маркерами $\boxed{0}, \dots, \boxed{t}$ (т.е. $a_0^{(n-1)}, \dots, a_t^{(n-1)}$). Тогда по конструкции все числа из $\mathcal{D}_{\varphi_t(j)}$ лишаются маркеров и, следовательно, включаются в множество A в противоречие с допущением $\forall x (\mathcal{D}_{\varphi_t(x)} \cap \bar{A} \neq \emptyset)$.

в) Это следует из эффе́ктивности всего построения и того, что если число лишается маркера, т.е. попадает в A , то оно уже не может приобрести маркер вновь.

г) Наибольшим элементом является число 0. Действительно, из конструкции видно, что на любом шаге невакантные числа, т.е. являющиеся значениями функций f или g , образуют начальный отрезок N .

В пределе вакантные числа отсутствуют ввиду того, что $\overline{A}$ гипериммунно, оно не конечно и, следовательно, в конструкции имело место бесконечно много перемещений маркеров. Отсюда и из того, что функции f и g монотонно возрастающие, следует, что $\forall x \exists \tau$ (τ – терм $\{f, g\}$ и $\tau(0) = x$), т.е. число 0 – наибольший элемент порядка ' $\leq_{\{f, g\}}$ '.

д) Действительно, включение $x \in A$ означает, что на некотором шаге n был осуществлен сдвиг маркеров таким образом, что число x лишилось маркера. В этом случае, если функция g была определена на x , то она принимает в качестве значения число, также лишшающееся на этом шаге маркера и потому принадлежащее A .

Функция f на числе x определяется на шаге n или раньше тоже так, что $f(x) = x + 1$, и она обладает маркером на шаге n . Значит, $f(x)$ принадлежит A . Предложение доказано.

НИИ математики и механики
при Казанском государственном университете

Поступило
02.12.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
2. Соловьёв В. Д. // Изв. вузов. Матем. 1982. № 12. С. 51–56.