Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Я. Агранович, О. Т. Азизова, О связи смешанных дискриминантов и совместного спектра семейства коммутирующих операторов в конечномерном пространстве, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 3–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:08:22

УДК 517.5

О СВЯЗИ СМЕШАННЫХ ДИСКРИМИНАНТОВ И СОВМЕСТНОГО СПЕКТРА СЕМЕЙСТВА КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю.Я. Агранович, О.Т. Азизова

Исследуются свойства полиномиального операторного пучка

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} M_i, \quad M_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad i = \overline{0, n},$$

$\mathcal{H}$ – k -мерное гильбертово пространство. Доказано, что смешанные дискриминанты $\{d_j\}_{j=0}^{nk}$ – коэффициенты полинома

$$\det L(\lambda) = \sum_{j=0}^{nk} d_j \lambda^{nk-j}$$

– определяются только совместным спектром семейства $\{M_i\}_{i=0}^n$. Получено обобщение известной теоремы Гершгорина о локализации собственных значений матрицы на случай полиномиального матричного пучка.

Библиография: 9 названий.

Предметом нашего рассмотрения будет полиномиальный операторный пучок вида

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} M_i \tag{1}$$

с коэффициентами $\{M_i\}_{i=0}^n$, являющимися операторами в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} = k$). Понятно, что $\det L(\lambda)$ представляет собой некоторый многочлен, степень которого не превосходит nk :

$$\det L(\lambda) = \sum_{i=0}^{nk} d_i \lambda^{nk-i}. \tag{2}$$

Коэффициенты $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$ в (2) – смешанные дискриминанты, построенные по семейству матричных представлений операторных коэффициентов в (1), – впервые появились,

по-видимому, в работах Минковского и Вейля, а также Боннезена и Фенхеля, и систематически применялись Александровым (см. [1]) в его теории смешанных объемов выпуклых тел.

Из (1) и (2) следует, что величины $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$ инвариантны относительно действия любого унитарного автоморфизма на $L(\lambda)$. Однако, до сих пор неизвестны необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять операторные коэффициенты M_j ($j = \overline{0, n}$) полиномиального пучка (1), чтобы коэффициенты d_i ($i = \overline{0, nk}$) многочлена (2) зависели только от инвариантов операторов $\{M_j\}_{j=0}^n$.

Цель настоящей работы – доказать, что если семейство $\{M_j\}_{j=0}^n$ коммутативно, то коэффициенты $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$ однозначно определяются координатами точек совместного спектра $\sigma(\{M_j\}_{j=0}^n)$ операторных коэффициентов и их кратностями. Полученные результаты применяются в задаче о локализации собственных значений пучка (1): продолжая работу [2], где этот вопрос изучался в терминах смешанных дискриминантов, мы докажем некоторое обобщение известной теоремы Гершгорина (см., например, [3, с. 58–71]).

1. Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} A_i, \quad A_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (3)$$

Пусть семейство операторов $\{A_i\}_{i=0}^n$ содержится в некоторой коммутативной алгебре $\mathfrak{S}$ операторов скалярного типа, действующих в $\mathcal{H}$. Тогда (см., например, [4, с. 113]) существует оператор A , также скалярного типа, и $n+1$ многочленов p_i , степени которых меньше степени минимального аннулирующего многочлена для A , таких, что

$$A_i = p_i(A), \quad i = \overline{0, n}. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных операторов $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ таких, что действие соответствующих автоморфизмов U^*AU приводит оператор A (терминологию см. в [5, с. 97]). Из (4) немедленно следует, что каждый элемент $U \in \mathfrak{U}$ определяет унитарный автоморфизм, приводящий сразу все $\{A_i\}$ ($i = \overline{0, n}$). При этом порядок расположения собственных чисел оператора A на главной диагонали соответствующего матричного представления U^*AU определяет порядок расположения собственных чисел матричного представления операторов U^*A_iU ($i = \overline{0, n}$). Иными словами, каждому элементу $U \in \mathfrak{U}$ мы можем поставить в соответствие множество точек в $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} U^*A_iU &= \text{diag}(a_l^{(i)}), \quad l = \overline{1, k}, \quad i = \overline{0, n}, \\ U &\mapsto \{\{a_l^{(i)}\}_{i=0}^n\}_{l=1}^k \equiv \tau(\{A_i\}_{i=0}^n, U) \subset \mathbb{C}^{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, то из (4) следует, что $\tau(\{A_i\}_{i=0}^n, U_1) = \tau(\{A_i\}_{i=0}^n, U_2)$. Таким образом, все элементы $\mathfrak{U}$ определяют одно и то же множество точек

$$\tau(\{A_i\}_{i=0}^n, \mathfrak{U}) \equiv \tau(\{A_i\}_{i=0}^n) \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Пусть множество $\tau(\{A_i\}_{i=0}^n)$ состоит из m различных точек, j -я из которых встречается в (5) n_j раз ($j = \overline{1, m}$), тогда $\sum_{j=1}^m n_j = k$, и мы можем сформулировать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Построенное в (5) множество $\tau(\{A_i\}_{i=0}^n) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ будем называть *совместным спектром семейства операторов* $\{A_i\}_{i=0}^n \subset \mathfrak{S}$, а числа $\{n_j\}_{j=0}^m$ будем называть *кратностями* соответствующих различных точек совместного спектра.

На самом деле, определение совместного спектра совпадает с абстрактным определением для коммутативной банаховой алгебры (см., например, [6, с. 267]) в рассматриваемом нами случае алгебры $\mathfrak{S}$.

Действительно, зафиксируем любую точку $\{a_j^{(i)}\}_{i=0}^n \in \tau(\{A_i\}_{i=0}^n)$ и произвольное семейство операторов $\{B_i\}_{i=0}^n \subset \mathfrak{S}$. Рассмотрим выражение

$$M = \sum_{i=0}^n (A_i - a_j^{(i)} I) B_i.$$

Приводя все $\{A_i\}_{i=0}^n$ и переходя к соответствующему матричному представлению, с учетом (5) немедленно получим, что $M_{jj} = 0$, следовательно, $M \neq I$. Таким образом, множество $\tau(\{A_i\}_{i=0}^n)$ содержится в совместном спектре $\sigma(\{A_i\}_{i=0}^n)$ в смысле абстрактного определения. Докажем обратное включение. Если $\{\psi^{(i)}\}_{i=0}^n \in \sigma(\{A_i\}_{i=0}^n)$, то для любых $\{B_i\}_{i=0}^n \subset \mathfrak{S}$ оператор

$$M_1 = \sum_{i=0}^n (A_i - \psi^{(i)} I) B_i$$

вырожден, в противном случае мы могли бы домножить обе части последнего равенства на M_1^{-1} и получили бы

$$\sum_{i=0}^n (A_i - \psi^{(i)} I) B_i M_1^{-1} = I,$$

что противоречит абстрактному определению совместного спектра. Приведем M_1 действием унитарного автоморфизма, определяемого некоторым элементом $U \in \mathfrak{U}$. Выберем B_i так, чтобы матричное представление $U^* B_i U$ было диагональным для всех $i = \overline{0, n}$. В силу абстрактного определения совместного спектра B_i выбираются произвольным образом, и, следовательно, мы имеем возможность подходящим образом варьировать диагональные элементы матричных представлений $\{U^* B_i U\}_{i=0}^n$. Отсюда непосредственно вытекает, что если M_1 вырожден, то в одной и той же позиции диагональных матриц $A_i - \psi^{(i)} I$ должен стоять 0, т.е. $\psi^{(i)} = a_j^{(i)}$ ($i = \overline{0, n}$) для некоторой точки $\{a_j^{(i)}\}_{i=0}^n \in \tau(\{A_i\}_{i=0}^n)$. Тем самым, доказано обратное включение, следовательно, $\tau(\{A_i\}_{i=0}^n) = \sigma(\{A_i\}_{i=0}^n)$ – совместный спектр в смысле абстрактного определения.

Переходя теперь к матричному представлению $\{A_i\}_{i=0}^n$, из (5), (2) и (3) получим соотношение

$$\det L(\lambda) = \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n a_j^{(i)} \lambda^{n-i} \right)^{n_j}. \quad (6)$$

Таким образом, доказана

ЛЕММА 1. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^n$ – произвольное конечное семейство операторов из коммутативной алгебры $\mathfrak{S}$ операторов скалярного типа, действующих в k -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\sigma(\{A_i\}_{i=0}^n) = \{\{a_j^{(i)}\}_{i=0}^n\}_{j=1}^m$ – совместный спектр операторов $\{A_i\}_{i=0}^n$, состоящий из m различных точек кратностей n_j ($j = \overline{1, m}$). Тогда смешанные дискриминанты $\{d_i\}_{i=0}^{nk}$ в (2) однозначно определяются координатами точек совместного спектра операторов $\{A_i\}_{i=0}^n$ и их кратностями:

$$\sum_{i=0}^{nk} d_i \lambda^{nk-i} = \prod_{j=1}^m \left(\sum_{i=0}^n a_j^{(i)} \lambda^{n-i} \right)^{n_j}. \quad (7)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{A_i\}_{i=0}^n$ – произвольное конечное семейство операторов из алгебры самосопряженных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Тогда оно удовлетворяет условиям леммы 1 и коэффициенты при степенях λ в (7) вещественны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как самосопряженность произведения самосопряженных операторов эквивалентна их коммутативности, то остается применить лемму 1 и воспользоваться тем, что собственные числа самосопряженных операторов вещественны.

2. Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} C_i, \quad C_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad i = \overline{0, n}. \quad (8)$$

Пусть теперь семейство операторов $\{C_i\}_{i=0}^n$ принадлежит некоторой коммутативной алгебре $\mathfrak{M}$ операторов, необязательно скалярного типа, действующих в $\mathcal{H}$. В силу разложения Данфорда (см. [7, с. 31], а также, например, [5, с. 123–125]) имеем

$$C_i = S_i + N_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где S_i – операторы скалярного типа, а N_i – нильпотентные операторы; S_i и N_i коммутируют и разложение (9) единственно. Из абстрактных результатов теории спектральных операторов следует, что S_i и S_j коммутируют ($i, j = \overline{0, n}, i \neq j$) [7, с. 27] и алгебра, порожденная семейством попарно коммутирующих операторов скалярного типа $\{S_i\}_{i=0}^n$, является подалгеброй алгебры $\mathfrak{M}$ (см. [7, с. 279]). Учитывая указанные обстоятельства и произвольность выбора алгебры коммутирующих операторов скалярного типа $\mathfrak{S}$ в п. 1, мы, без ограничения общности, можем принять, что $S_i = A_i$ ($i = \overline{0, n}$) и воспользоваться рассуждениями и результатами п. 1. Кроме того, известно (см., например, [8, с. 103]), что существует унитарный автоморфизм такой, что матричное представление U^*CU имеет верхнетреугольный вид сразу для всех операторов $C \in \mathfrak{M}$. Значит, мы можем полностью перенести определение 1 из п. 1 на рассматриваемый здесь случай и, кроме того, получить факторизационное представление (6) для пучка (8). Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{C_i\}_{i=0}^n$ – произвольное конечное семейство операторов из коммутативной алгебры $\mathfrak{M}$ операторов, действующих в k -мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $\sigma(\{C_i\}_{i=0}^n) = \{\{c_j^{(i)}\}_{i=0}^n\}_{j=1}^l$ – совместный спектр операторов $\{C_i\}_{i=0}^n$, состоящий из l различных точек кратностей n_j ($j = \overline{1, l}$). Тогда

смешанные дискриминанты d_i ($i = \overline{0, nk}$) в (2) однозначно определяются координатами точек совместного спектра операторов $\{C_i\}_{i=0}^n$ и их кратностями и справедливо факторизационное представление

$$\sum_{i=0}^{nk} d_i \lambda^{nk-i} = \prod_{j=1}^l \left(\sum_{i=0}^n c_j^{(i)} \lambda^{n-i} \right)^{n_j}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{L}_j$ ($j = \overline{1, l}$), $\dim \mathcal{L}_j = n_j$, каждое из которых является собственным для всех S_i и корневым для всех C_i ($i = \overline{0, n}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рассуждений п. 1 ясно, что совокупность скалярных составляющих S_i операторов C_i имеет совместную систему собственных подпространств $\mathcal{L}_j$ и $\dim \mathcal{L}_j = n_j$ ($j = \overline{1, l}$). Так как собственное подпространство составляющей скалярного типа S_i является корневым подпространством для C_i , то и система корневых подпространств операторов $\{C_i\}_{i=0}^n$ также является для них совместной.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение, обратное следствию 2, конечно, неверно: соответствующие контрпримеры легко строятся с использованием матриц, имеющих ниже- и верхнетреугольную формы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из наших построений ясно, что совместный спектр полностью определяется составляющими скалярного типа, и, следовательно, формально совместный спектр можно определить для некоммутирующих операторов спектрального типа: требуется лишь коммутирование составляющих скалярного типа. Однако, без условия коммутруемости N_i и N_j ($i \neq j, i, j = \overline{0, n}$) результаты теоремы 1, вообще говоря, неверны.

Теперь сформулируем полезные, как нам представляется, следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда собственные числа оператора $L(\lambda)$ и его след равны соответственно

$$\mu_j = \sum_{i=0}^n c_j^{(i)} \lambda^{n-i}, \quad j = \overline{1, l}; \quad \text{sp } L(\lambda) = \sum_{j=1}^l n_j \left(\sum_{i=0}^n c_j^{(i)} \lambda^{n-i} \right).$$

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 2.

Аналогично, по известным формулам вычисляются и другие инварианты оператора $L(\lambda)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\sigma(L(\lambda)) \equiv \mathbb{C}$;
- 2) $\theta \in \sigma(\{C_i\}_{i=0}^n)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 1.

3. Полученные в п. 2 результаты позволяют продолжить исследования, начатые в [2], и доказать в терминах совместного спектра операторных коэффициентов $\{C_i\}_{i=0}^n$ обобщение теоремы Гершгорина (см., например, [3, с. 58-71]) на случай полиномиальных операторных пучков. Если выполнены условия

$$c_j^{(0)} \neq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad (10)$$

то мы можем определить величины

$$\gamma_j = 2 \max_{i=\overline{1, n}} \left| \frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(0)}} \right|^{1/i}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Если выполнены условия

$$c_j^{(n)} \neq 0, \quad j = \overline{1, l}, \quad (11)$$

то, аналогично, определим величины

$$\Gamma_j = 2 \max_{i=\overline{1, n}} \left| \frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(n)}} \right|^{1/(n-i)}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Воспользовавшись теперь результатами Элснера [9], получим, что спектр пучка (8) $\sigma(L(\lambda))$ содержится в объединении l колец Ω_j , определяемых условиями

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{c_j^{(n-i)}}{c_j^{(n)}} \right| \cdot \Gamma_j^i \right)^{-1/n} \frac{1}{\psi(n)} \leq |\lambda| \leq \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{c_j^{(i)}}{c_j^{(0)}} \right| \cdot \gamma_j^{n-i} \right)^{1/n} \psi(n), \quad j = \overline{1, l}, \quad (12)$$

где

$$\psi(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n-1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, (10) и (11). Тогда

$$\sigma(L(\lambda)) \subset \bigcup_{j=1}^l \Omega_j (\equiv \Omega),$$

где Ω_j определяются условиями (12).

СЛЕДСТВИЕ 5. Если количество различных точек совместного спектра $\sigma(\{C_i\}_{i=0}^n)$ меньше k , то $\sigma(L(\lambda))$ содержит по крайней мере одно кратное собственное значение. Пусть одна из связных компонент Ω образована объединением r колец вида (12), тогда эта связная компонента содержит ровно nr собственных значений пучка $L(\lambda)$ с учетом их кратности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел // Матем. сб. 1938. Т. 3 (45). № 2. С. 227–249.
- [2] Агранович Ю. Я., Сухочёва Л. И. О собственных значениях полиномиальных матричных пучков // Спектральные и эволюционные задачи. Киев: Наукова думка, 1991. С. 23.
- [3] Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. М.: ИЛ, 1960.
- [4] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [5] Глазман И. М., Любич Ю. Л. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.
- [6] Любич Ю. Л. Линейный функциональный анализ // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–305.
- [7] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974.
- [8] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [9] Elsner L. On the variation of the spectra of matrices // Linear Algebra Appl. 1982. V. 47. P. 127–138.

Воронежский государственный технический университет
Областной центр новых информационных технологий
Воронежский государственный университет
E-mail: agyrya@vpcnit.voronezh.su

Поступило
17.05.96