Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Адамович, О строении модулей когомологий линейных расслоений на G/B , *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 10–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:25:47

УДК 512.73

О СТРОЕНИИ МОДУЛЕЙ КОГОМОЛОГИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА G/B

А. М. Адамович

Изучаются G -модули когомологий линейных расслоений на многообразии флагов G/B над алгебраически замкнутым полем простой характеристики. Описаны серии подмодулей и фактормодулей таких модулей.

Библиография: 5 названий.

Пусть G – связная односвязная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$; T – ее максимальный тор; R – система корней, соответствующая паре (G, T) ; Δ – множество простых корней; R_+ (R_-) – множества положительных (соответственно отрицательных) корней; $B \supset T$ – борелевская подгруппа, соответствующая R_- ; X – группа характеров T ; $X^+ = \{\lambda \in X \mid 0 \leq \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle \text{ для } \alpha \in \Delta\}$ – множество доминантных весов; $L(\lambda)$ – простой G -модуль со старшим весом $\lambda \in X^+$; W – группа Вейля; $l(w)$ – длина элемента $w \in W$ относительно множества простых отражений $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$; w_0 – максимальный элемент W ; $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где ρ – полусумма положительных корней.

G -модулями будем называть рациональные конечномерные G -модули. Это же относится и к H -модулям, если H – подгруппа G .

Наша цель – изучение строения G -модулей $H^{l(w)}(w \cdot \lambda) = H^{l(w)}(G/B, \mathcal{L}(w \cdot \lambda))$, где $\mathcal{L}(w \cdot \lambda)$ – линейное расслоение на G/B , индуцированное характером $w \cdot \lambda$ группы B , $\lambda \in X^+$. Известно, что в общем случае эти модули неразложимы, а их характеры равны характеру Вейля $\chi(\lambda)$. Более того, $H^{l(w_0)}(w_0 \cdot \lambda)$ изоморфен модулю Вейля $V(\lambda)$ (универсальному G -модулю, порожденному вектором старшего веса λ). Хамфри в [1] доказал, что $V(\lambda)$ имеет фактормодуль вида $V(\kappa) \otimes L(p^n \eta)$ и (при некоторых ограничениях на λ) подмодуль вида $H^0(\mu) \otimes L(p^n \nu)$, где μ и $\kappa - p^n$ -ограниченные веса. Оказывается, что результаты Хамфри о строении модулей Вейля можно перенести на случай $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$, где w – произвольный элемент W , и обобщить (см. теоремы 1 и 2). Эти теоремы позволяют использовать информацию о строении модулей когомологий с малыми весами при изучении структуры $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$ в общем случае.

Введем необходимые обозначения.

$X_n = \{\lambda \in X \mid 0 \leq \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle < p^n \text{ для } \alpha \in \Delta\}$ – множество p^n -ограниченных весов.

Каждый элемент $\mu \in X$ имеет единственное разложение $\mu = \mu_n^0 + p^n \mu_n^1$, где $\mu_n^0 \in X_n$ и $\mu_n^1 \in X$ (индекс n будем опускать, если понятно, о каком его значении идет речь).

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант M7N000.

$F: G \rightarrow G$ – гомоморфизм Фробениуса, G_n – ядро F^n .

Если V – G -модуль, т.е. есть гомоморфизм $\pi: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, то через $V^{(n)}$ будем обозначать G -модуль, соответствующий $\pi \circ F^n$.

$L(\lambda)$ – простой G -модуль со старшим весом $\lambda \in X^+$ (по теореме Стейнберга $L(\lambda) \simeq L(\lambda_n^0) \otimes L(\lambda_n^1)^{(n)}$).

Положим $\mu^* = -w_0(\mu)$ для $\mu \in X$, перечислим свойства этой инволюции (сопряжения):

- сопряжение переводит простые корни в простые, поэтому $X_n^* = X_n$;
- $(\mu^*)_n^0 = (\mu_n^0)^*$ и $(\mu^*)_n^1 = (\mu_n^1)^*$ (следует из предыдущего);
- $(w_0 \cdot \mu^*)^* = w_0 \cdot \mu$ (следует из того, что $\rho^* = \rho$);
- $L(\lambda)^* \simeq L(\lambda^*)$.

Пусть H – группа; V, L – H -модули, причем L – простой, тогда $[V : L]$ – кратность фактора L в композиционном ряде V .

Пусть V – H -модуль, тогда $\mathrm{Soc}_H V$ – максимальный полупростой H -подмодуль V (очевидно, что $[\mathrm{Soc}_H V : L] \neq 0 \iff \mathrm{Hom}_H(L, V) \neq 0$).

Множество классов эквивалентности простых $G_n B$ -модулей параметризуется элементами X (старшими весами). Пусть $\hat{L}_n(\mu)$ – простой $G_n B$ -модуль со старшим весом μ (известно [2], что $\hat{L}_n(\mu) \simeq L(\mu_n^0) \otimes p^n \mu_n^1$).

Для $\mu \in X$ определим индуцированный $G_n B$ -модуль $\hat{Z}_n(\mu) = \mathrm{Ind}_B^{G_n B}(\mu)$. Нам понадобятся следующие свойства $G_n B$ -модулей [2]:

- $\hat{Z}_n(\mu) \simeq \hat{Z}_n(\mu_n^0) \otimes p^n \mu_n^1$;
- $\hat{Z}_n(\mu)^* \simeq \hat{Z}_n(2(p^n - 1)\rho - \mu) = \hat{Z}_n(w_0 \cdot \mu^* + 2p^n \rho)$;
- $\mathrm{Soc}_{G_n B} \hat{Z}_n(\mu) \simeq \hat{L}_n(\mu)$.

Пусть H – замкнутая подгруппа G ; функтор Ind_H^G , действующий из категории рациональных H -модулей в категорию рациональных G -модулей, имеет правые производные функторы $H^i(G/H, \cdot)$, $i \geq 0$ (мы будем использовать сокращенную запись $H^i(\cdot) = H^i(G/B, \cdot)$). Пусть V – G -модуль, E – H -модуль; функтор Ind_H^G и его производные обладают следующими свойствами:

- $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_H^G(E)) \simeq \mathrm{Hom}_H(V, E)$ (двойственность Фробениуса);
- $H^i(G/H, V \otimes E) \simeq V \otimes H^i(G/H, E)$ (обобщенное тензорное тождество [3]).

Мы будем использовать еще два свойства индуцирования для $H = G_n B$ (см. [2, 1.6]):

- $H^i(G/G_n B, p^n \mu) \simeq H^i(\mu)^{(n)}$;
- $H^i(G/G_n B, \hat{Z}_n(\mu)) \simeq H^i(\mu)$.

Напомним известные утверждения о G -модулях когомологий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (двойственность Серра).

$$H^{l(w)}(w \cdot \lambda)^* \simeq H^{l(w_0) - l(w)}(-w \cdot \lambda - 2\rho) = H^{l(w w_0)}(w w_0 \cdot \lambda^*).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $H^0(\lambda) \neq 0 \iff \lambda \in X^+$; если λ – доминантный, то $\mathrm{ch} H^0(\lambda)$ равен характеру Вейля $\chi(\lambda)$ и $\mathrm{Soc}_G H^0(\lambda) \simeq L(\lambda)$.

Если R неразложима, то число Кокстера $h = \langle \alpha_0^\vee, \rho \rangle + 1$, где α_0 – максимальный короткий корень. Пусть в общем случае h – максимальное из чисел Кокстера неразложимых компонент R .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3 (см. [2, 2.1]). Пусть $\lambda \in X^+$ – такое, что для любого $\alpha \in R_+$ $4(h-1) \leq \langle \alpha^\vee, \lambda_m^1 \rangle \leq p-4(h-1)$. Тогда

$$H^i(w \cdot \lambda) = 0 \iff i \neq l(w).$$

Пусть $C_1 = \{\lambda \in X^+ \mid \langle \alpha^\vee, \lambda + \rho \rangle < p \text{ для любого } \alpha \in R_+\}$ – нижний p -альков. Из результатов Андерсена [4], [5] легко следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $\lambda \in C_1$, то $H^i(w \cdot \lambda) = 0$ при $i \neq l(w)$ и $H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \simeq L(\lambda)$.

Пусть $\lambda \in X^+$. Скажем, что λ – вес порядка m , если $\lambda \in X_{m+1} \setminus X_m$. Назовем λ общим (порядка m), если для любого $\alpha \in R_+$

$$6(h-1) \leq \langle \alpha^\vee, \lambda_m^1 \rangle \leq p-6(h-1).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 (см. [2, 2.2]). Пусть λ – общий вес порядка m . Тогда

$$\text{Soc}_G H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \simeq L(\lambda^w) \quad \text{и} \quad [H^{l(w)}(w \cdot \lambda) : L(\lambda^w)] = 1,$$

где $\lambda^w = (w \cdot \lambda)_m^0 + p^m w^{-1} \cdot ((w \cdot \lambda)_m^1)$.

В дальнейшем нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть M, N – H -модули, причем $\text{Soc}_H M \simeq \text{Soc}_H N \simeq L$, L – простой H -модуль и $[M : L] = 1$. Тогда $\dim \text{Hom}_H(M, N) \leq 1$, и если φ – ненулевой элемент $\text{Hom}_H(M, N)$, то φ – вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A: \text{Hom}_H(M, N) \rightarrow \text{Hom}_H(L, N)$ – линейный оператор, задаваемый формулой $A\varphi = \varphi|_{\text{Soc}_H M}$.

Допустим, что $\varphi \in \text{Ker } A$. Тогда $\varphi|_{\text{Soc}_H M} = 0$ и $[\text{Im } \varphi : L] \leq [M/\text{Soc}_H M : L] = 0$. Теперь из $\text{Soc}_H N \simeq L$ вытекает, что $\varphi = 0$.

Итак, $\text{Ker } A = 0$. Следовательно,

- 1) $\dim \text{Hom}_H(M, N) \leq \dim \text{Hom}_H(L, N) = [\text{Soc}_H N : L] = 1$;
- 2) если $0 \neq \varphi \in \text{Hom}_H(M, N)$, то $\text{Soc}_H M \not\subseteq \text{Ker } \varphi$ и, поскольку $\text{Soc}_H M$ прост, $\text{Ker } \varphi = 0$. Значит, φ – вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mu \in X$, $\mu^0 = \mu_n^0$, $\mu^1 = \mu_n^1$, $p > 3(h-1)$. Тогда существует вложение $G_n B$ -модулей

$$H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1 \hookrightarrow \widehat{Z}_n(\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{G_n B}(H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1, \widehat{Z}_n(\mu)) &\simeq \text{Hom}_{G_n B}(H^0(\mu^0), \widehat{Z}_n(\mu) \otimes p^n(-\mu^1)) \\ &\simeq \text{Hom}_{G_n B}(H^0(\mu^0), \widehat{Z}_n(\mu - p^n \mu^1)) \\ &\simeq \text{Hom}_{G_n B}(H^0(\mu^0), \widehat{Z}_n(\mu^0)). \end{aligned}$$

По двойственности Фробениуса

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{G_n B}(H^0(\mu^0), \widehat{Z}_n(\mu^0)) &\simeq \mathrm{Hom}_G(H^0(\mu^0), \mathrm{Ind}_{G_n B}^G \widehat{Z}_n(\mu^0)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(H^0(\mu^0), H^0(\mu^0)) \neq 0.\end{aligned}$$

Итак, существует ненулевой морфизм $G_n B$ -модулей $\varphi: H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1 \rightarrow \widehat{Z}_n(\mu)$.

Докажем, что φ – вложение. Ввиду леммы 1 достаточно показать, что

$$\mathrm{Soc}_{G_n B}(H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) \simeq \widehat{L}_n(\mu) \quad \text{и} \quad [H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1 : \widehat{L}_n(\mu)] = 1.$$

Второе соотношение очевидно, так как μ – однократный старший вес в $H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1$.

Докажем первое соотношение, т.е. $\mathrm{Hom}_{G_n B}(\widehat{L}_n(\nu), H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) \neq 0$ лишь при $\nu = \mu$. Допустим, что

$$\mathrm{Hom}_{G_n B}(\widehat{L}_n(\nu), H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) \neq 0.$$

Поскольку $\widehat{L}_n(\nu) \simeq L(\nu^0) \otimes p^n \nu^1$, то

$$\begin{aligned}0 \neq \mathrm{Hom}_{G_n B}(\widehat{L}_n(\nu), H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) &\simeq \mathrm{Hom}_{G_n B}(L(\nu^0), H^0(\mu^0) \otimes p^n(\mu^1 - \nu^1)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(L(\nu^0), \mathrm{Ind}_{G_n B}^G(H^0(\mu^0) \otimes p^n(\mu^1 - \nu^1))) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(L(\nu^0), H^0(\mu^0) \otimes H^0(\mu^1 - \nu^1)^{(n)})\end{aligned}$$

(мы использовали двойственность Фробениуса, обобщенное тензорное тождество и третье свойство индуцирования). В частности, $H^0(\mu^1 - \nu^1) \neq 0$ и, значит, $\mu^1 - \nu^1 \in X^+$ согласно утверждению 2.

Покажем, что $\mu^1 - \nu^1 \in C_1$. Имеем

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{G_n B}(\widehat{L}_n(\nu), H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) = \mathrm{Hom}_{G_n B}(L(\nu^0) \otimes p^n(\nu^1 - \mu^1), H^0(\mu^0)).$$

Следовательно, $\lambda = \nu^0 + p^n(\nu^1 - \mu^1)$ является весом $H^0(\mu^0)$. Пусть $w \in W$ – такое, что $w(\lambda) \in X^+$. Тогда $w(\lambda) \leq \mu^0$. Пусть α_0 – максимальный короткий корень неразложимой компоненты R , содержащей α , $\alpha \in R$. Для любого $\alpha \in R$ имеем

$$|\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle| = |\langle w(\alpha)^\vee, w(\lambda) \rangle| \leq \langle \alpha_0^\vee, w(\lambda) \rangle \leq \langle \alpha_0^\vee, \mu^0 \rangle \leq (p^n - 1)(h - 1)$$

(последнее неравенство вытекает из того, что $\mu^0 \in X_n$).

Далее, $p^n(\mu^1 - \nu^1 + \rho) = \nu^0 - \lambda + p^n \rho$, поэтому

$$\begin{aligned}|p^n \langle \alpha^\vee, \mu^1 - \nu^1 + \rho \rangle| &\leq |\langle \alpha^\vee, \nu^0 \rangle| + |\langle \alpha^\vee, \lambda \rangle| + |p^n \langle \alpha^\vee, \rho \rangle| \\ &\leq (p^n - 1)(h - 1) + (p^n - 1)(h - 1) + p^n(h - 1) < 3p^n(h - 1).\end{aligned}$$

Таким образом, $|\langle \alpha^\vee, \mu^1 - \nu^1 + \rho \rangle| < 3(h - 1) < p$ и $\mu^1 - \nu^1 \in C_1$.

Следовательно, $H^0(\mu^1 - \nu^1) \simeq L(\mu^1 - \nu^1)$ по утверждению 4. Итак,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{G_n B}(\widehat{L}_n(\nu), H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) &\simeq \mathrm{Hom}_G(L(\nu^0), H^0(\mu^0) \otimes L(\mu^1 - \nu^1)^{(n)}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(L(\nu^0) \otimes L((\mu^1 - \nu^1)^*), H^0(\mu^0))^{(n)} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_G(L(\nu^0 + p^n(\mu^1 - \nu^1)^*), H^0(\mu^0))\end{aligned}$$

(последнее – по теореме Стейнберга). Но

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(L(\nu^0 + p^n(\mu^1 - \nu^1)^*), H^0(\mu^0)) &\simeq \text{Hom}_G(L(\nu^0 + p^n(\mu^1 - \nu^1)^*), \text{Soc}_G H^0(\mu^0)) \\ &\simeq \text{Hom}_G(L(\nu^0 + p^n(\mu^1 - \nu^1)^*), L(\mu^0)) \\ &\simeq \begin{cases} k & \text{при } \nu^0 + p^n(\mu^1 - \nu^1)^* = \mu^0, \text{ т.е. } \nu = \mu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому $\text{Soc}_{G_n B}(H^0(\mu^0) \otimes p^n \mu^1) \simeq \widehat{L}_n(\mu)$ и φ – вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mu \in X$, $p > 3(h-1)$. Тогда существует эпиморфизм $G_n B$ -модулей

$$\widehat{Z}_n(\mu) \rightarrow H^{l(w_0)}(w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^0)) \otimes p^n w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие предложения 1 существует вложение

$$H^0((w_0 \cdot \mu^*)^0) \otimes p^n((w_0 \cdot \mu^*)^1 + 2\rho) \hookrightarrow \widehat{Z}_n(w_0 \cdot \mu^* + 2p^n \rho) \simeq \widehat{Z}_n(\mu)^*.$$

По двойственности получаем эпиморфизм

$$\widehat{Z}_n(\mu) \rightarrow H^0((w_0 \cdot \mu^*)^0)^* \otimes p^n(-(w_0 \cdot \mu^*)^1 - 2\rho).$$

Покажем, что последний модуль изоморфен $H^{l(w_0)}(w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^0)) \otimes p^n w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^1)$. Действительно, по двойственности Серра $H^0((w_0 \cdot \mu^*)^0)^* \simeq H^{l(w_0)}(w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu^*)^0)^*)$, а $w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu^*)^0)^* = w_0 \cdot (((w_0 \cdot \mu^*)^*)^0) = w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^0)$ (мы использовали свойства операции ‘*’). Кроме того,

$$\begin{aligned} (-(w_0 \cdot \mu^*)^1 - 2\rho) &= -(((w_0 \cdot \mu)_n^1)^* + \rho) - \rho = -((w_0 \cdot \mu)_n^1 + \rho)^* - \rho \\ &= w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^1 + \rho) - \rho = w_0 \cdot ((w_0 \cdot \mu)_n^1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 2 (см. [2, доказательство 2.1]). Пусть $w \in W$, $\lambda \in X^+$, $\widehat{L}_n(\nu)$ – композиционный фактор $\widehat{Z}_n(w \cdot \lambda)$. Тогда для любого $\alpha \in R_+$

$$\langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle - 4(h-1) < \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\nu_n^1 + \rho) \rangle < \langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle + 4(h-1).$$

Заметим, что если общие веса существуют, то $p > 12(h-1)$.

ЛЕММА 3. Пусть $p > 12(h-1)$, $w \in W$, $\lambda \in X^+$ – общий вес порядка $m \geq n$, $\widehat{L}_n(\nu)$ – композиционный фактор $\widehat{Z}_n(w \cdot \lambda)$, $\nu^1 = \nu_n^1$. Тогда

$$H^i(\nu^1) = 0 \iff i \neq l(w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для любого $\alpha \in R_+$

$$\langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle - 4(h-1) < \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\nu_n^1 + \rho) \rangle < \langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle + 4(h-1).$$

При $m = n$ сразу получаем $w^{-1} \cdot (\nu^1) \in C_1$ и вследствие утверждения 4

$$H^i(\nu^1) = 0 \iff i \neq l(w).$$

Пусть $m > n$. Так как $0 < \langle \alpha^\vee, \rho \rangle \leq (h-1)$ для любого $\alpha \in R_+$, то

$$\langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle - 5(h-1) < \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\nu_n^1 + \rho) - \rho \rangle < \langle \alpha^\vee, \lambda_n^1 \rangle + 4(h-1).$$

Положим $\eta = w^{-1} \cdot (\nu^1)$, $\mu = \lambda^1 = \lambda_n^1$. Мы имеем разложения $\eta = \eta^0 + \eta^1 p^{m-n}$ и $\mu = \mu^0 + \mu^1 p^{m-n}$, где $\eta^0, \mu^0 \in X_{m-n}$, $\eta^1, \mu^1 \in X$.

Теперь из неравенства

$$\langle \alpha^\vee, \mu \rangle - 5(h-1) < \langle \alpha^\vee, \eta \rangle < \langle \alpha^\vee, \mu \rangle + 4(h-1)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \langle \alpha^\vee, \mu^0 \rangle - \langle \alpha^\vee, \eta^0 \rangle + \langle \alpha^\vee, \mu^1 \rangle p^{m-n} - 5(h-1) \\ & < \langle \alpha^\vee, \eta^1 \rangle p^{m-n} < \langle \alpha^\vee, \mu^0 \rangle - \langle \alpha^\vee, \eta^0 \rangle + \langle \alpha^\vee, \mu^1 \rangle p^{m-n} + 4(h-1). \end{aligned}$$

Так как $\eta^0, \mu^0 \in X_{m-n}$, имеем оценки

$$0 \leq \langle \alpha^\vee, \eta^0 \rangle < p^{m-n}(h-1), \quad 0 \leq \langle \alpha^\vee, \mu^0 \rangle < p^{m-n}(h-1),$$

поэтому

$$(-(h-1) + \langle \alpha^\vee, \mu^1 \rangle) p^{m-n} - 5(h-1) < \langle \alpha^\vee, \eta^1 \rangle p^{m-n} < (h-1 + \langle \alpha^\vee, \mu^1 \rangle) p^{m-n} + 4(h-1).$$

Заметим, что $\mu^1 = \mu_{m-n}^1 = (\lambda_n^1)_{m-n}^1 = \lambda_m^1$ и $6(h-1) \leq \langle \alpha^\vee, \mu^1 \rangle \leq p - 6(h-1)$, поскольку λ — общий вес порядка m . Значит,

$$5(h-1)p^{m-n} - 5(h-1) < \langle \alpha^\vee, \eta^1 \rangle p^{m-n} < (p - 5(h-1))p^{m-n} + 4(h-1).$$

Так как $p > 12(h-1)$, то, тем более, $p^{m-n}(h-1) > 5(h-1)$ и

$$4(h-1)p^{m-n} < \langle \alpha^\vee, \eta^1 \rangle p^{m-n} < (p - 4(h-1))p^{m-n},$$

т.е. $4(h-1) < \langle \alpha^\vee, \eta^1 \rangle < p - 4(h-1)$. Мы получили, что $\eta = w^{-1} \cdot (\nu^1)$ удовлетворяет условиям утверждения 3. Следовательно, $H^i(w \cdot \eta) = 0$, т.е. $H^i(\nu^1) = 0 \iff i \neq l(w)$.

ЛЕММА 4. Пусть $p > 12(h-1)$, $w \in W$, $\lambda \in X^+$ — общий вес порядка $m \geq n$, $\hat{L}_n(\nu)$ — композиционный фактор $\hat{Z}_n(w \cdot \lambda)$.

Тогда $H^i(G/G_n B, \hat{L}_n(\nu)) = 0$ для $i \neq l(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H^i(G/G_n B, \widehat{L}_n(\nu)) = H^i(G/G_n B, L(\nu_n^0) \otimes p^n \nu_n^1) \simeq L(\nu_n^0) \otimes H^i(\nu_n^1)^{(n)}$$

по обобщенному тензорному тождеству и третьему свойству индуцирования. Применение леммы 3 завершает доказательство.

Всюду, далее, для любого $\mu \in X$ будем полагать $\mu^0 = \mu_n^0, \mu^1 = \mu_n^1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 12(h-1)$, $\lambda \in X^+$, $w \in W$; в случае $w \neq e$ потребуем, чтобы λ был общим весом порядка $t \geq n$. Тогда

$$\text{Hom}_G(H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1)^{(n)}, H^{l(w)}(w \cdot \lambda)) = k,$$

причем любой ненулевой морфизм является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие предложения 1 мы имеем точную последовательность $G_n B$ -модулей

$$0 \rightarrow H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes p^n (w \cdot \lambda)^1 \rightarrow \widehat{Z}_n(w \cdot \lambda) \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Применяя функторы $H^*(G/G_n B, \cdot)$, получим длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{l(w)-1}(G/G_n B, N) &\rightarrow H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1)^{(n)} \\ &\rightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \rightarrow H^{l(w)}(G/G_n B, N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

(здесь учтено обобщенное тензорное тождество, третье и четвертое свойства индуцирования).

Если $w = e$, то мы уже получили вложение

$$H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1)^{(n)} \hookrightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda).$$

Для $w \neq e$ и общего λ надо доказать, что $H^{l(w)-1}(G/G_n B, N) = 0$. Но это очевидное следствие того, что $H^{l(w)-1}(G/G_n B, \widehat{L}_n(\nu)) = 0$ для любого композиционного фактора $\widehat{L}_n(\nu)$ $G_n B$ -модуля $\widehat{Z}_n(w \cdot \lambda)$ (см. лемму 4).

Итак, существует вложение

$$M = H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1)^{(n)} \hookrightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda).$$

Докажем, что вложение ненулевое, т.е. $M \neq 0$. В самом деле, по утверждению 2 $H^0((w \cdot \lambda)^0) \neq 0$, так как $(w \cdot \lambda)^0 \in X_n \subset X^+$. Аналогично, при $w = e$ $H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1) = H^0(\lambda^1) \neq 0$, так как $\lambda^1 \in X^+$. В случае $w \neq e$ $H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1) \neq 0$ по лемме 3.

Осталось доказать, что $\dim \text{Hom}_G(M, H^{l(w)}(w \cdot \lambda)) \leq 1$.

Действительно, $\text{Soc}_G H^{l(w)}(w \cdot \lambda) \simeq L$ и $[H^{l(w)}(w \cdot \lambda) : L] = 1$, где $L = L(\lambda)$ в случае $w = e$ (см. утверждение 2) и $L = L(\lambda^w)$ в случае $w \neq e$ (см. утверждение 5). Поскольку M вкладывается в $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$, то $\text{Soc}_G M \simeq L$ и $[M : L] = 1$. Теперь лемма 1 доказывает нужное неравенство.

Аналогично из предложения 2 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 12(h-1)$, $\lambda \in X^+$, $w \in W$; в случае $w \neq w_0$ потребуем, чтобы λ был общим весом порядка $m \geq n$. Тогда

$$\text{Hom}_G\left(H^{l(w)}(w \cdot \lambda), H^{l(w_0)}(w_0 \cdot ((w_0 w \cdot \lambda)^0)) \otimes H^{l(w)}(w_0 \cdot ((w_0 w \cdot \lambda)^1))^{(n)}\right) = k,$$

причем любой ненулевой морфизм является эпиморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть в условиях теоремы 1 $m = n$. Тогда существует вложение

$$H^0((w \cdot \lambda)^0) \otimes L(w^{-1} \cdot ((w \cdot \lambda)^1))^{(n)} \hookrightarrow H^{l(w)}(w \cdot \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $w = e$ это следует из того, что $L(\lambda^1) \simeq \text{Soc}_G H^0(\lambda^1)$.

Пусть $w \neq e$. Так как λ — общий вес порядка n , то $w^{-1} \cdot ((w \cdot \lambda)^1) \in C_1$ (см. доказательство леммы 3), и $H^{l(w)}((w \cdot \lambda)^1) \simeq L(w^{-1} \cdot ((w \cdot \lambda)^1))$ по утверждению 4.

Аналогично получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 2 $m = n$. Тогда

$$H^{l(w_0)}(w_0 \cdot ((w_0 w \cdot \lambda)^0)) \otimes L(w^{-1} w_0 \cdot ((w_0 w \cdot \lambda)^1))^{(n)}$$

изоморфен фактормодулю модуля $H^{l(w)}(w \cdot \lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для $w = w_0$ два последних утверждения доказаны Хамфри в [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Humphreys J. E. On the structure of Weyl modules // Comm. Algebra. 1984. V. 12. P. 2665–2677.
- [2] Andersen H. H. On the generic structure of cohomology modules for semi-simple algebraic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 295. P. 397–415.
- [3] Andersen H. H. The Frobenius morphism on the cohomology of homogeneous vector bundles on G/B // Ann. of Math. 1980. V. 112. P. 113–121.
- [4] Andersen H. H. The strong linkage principle // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 315. P. 53–59.
- [5] Andersen H. H. On the structure of Weyl modules // Math. Z. 1980. V. 170. P. 1–14.