Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бабаев, Приближение соболевских классов W_q^r функций многих переменных билинейными формами в L_p при $2 \leq q \leq p \leq \infty$, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 18–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1584>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:16:55

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ СОБОЛЕВСКИХ КЛАССОВ W_q^r ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ БИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ В L_p ПРИ $2 \leq q \leq p \leq \infty$

М.-Б. А. Бабаев

Исследуется приближение функций многих переменных билинейными формами – парными произведениями функций меньшего числа переменных. Установлен порядок приближения соболевских классов W_q^r билинейными формами в L_p при $2 \leq q \leq p \leq \infty$.

Библиография: 13 названий.

В работе изучается приближение функций многих переменных суммами парных произведений меньшего числа переменных.

Рассмотрим пространство $L_p = L_p(K)$ функций $f = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$, определенных на кубе $K = I^l$, $I = [0, 1]$, таких, что

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vrai sup}_{x \in K} |f(x)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $\Gamma = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_d)$, $v = (x_{d+1}, \dots, x_l)$, $1 \leq d < l$. Обозначим

$$G^M(\Gamma) = G^M(\Gamma, K) = \left\{ g \mid g = \sum_{k=1}^M \varphi_k(u) \psi_k(v), \varphi_k \in L_p(I^d), \psi_k \in L_p(I^{l-d}) \right\}.$$

Пусть Q – компакт в L_p . Назовем уклонением компакта Q от многообразия $G^M(\Gamma)$ в L_p выражение

$$\tau_M = \tau_{M\Gamma}(Q)_p = \tau(Q, G^M(\Gamma), L_p) = \sup_{f \in Q} \inf_{g \in G^M(\Gamma)} \|f - g\|_p.$$

Пусть r – натуральное число, $1 \leq q \leq \infty$. Обозначим через $W_q^r = W_q^r(K)$ соболевский класс функций f на K , удовлетворяющих неравенствам $\|f\|_q \leq 1$ и

$$\|f\|_{L_q^r}^q \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{|\tilde{r}|=r} \|f^{(\tilde{r})}(x)\|_q^q \leq 1,$$

где

$$f^{(\tilde{r})}(x) = \frac{\partial^{|\tilde{r}|}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_l^{r_l}} f, \quad \tilde{r} = (r_1, \dots, r_l), \quad |\tilde{r}| = r_1 + \dots + r_l,$$

а суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным векторам $\tilde{r}$, для которых $|\tilde{r}| = r$. Не нарушая общности, положим $d \geq l - d$. Далее условимся, что соотношение $\tau_M \asymp \theta_M$ эквивалентно двусторонним оценкам $c_1 \theta_M \leq \tau_M \leq c_2 \theta_M$ ($M \in \mathbb{N}$) с константами $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, не зависящими от M .

ТЕОРЕМА. Пусть $2 \leq q \leq p \leq \infty$, $r > l/q - d/p$. Тогда имеет место соотношение

$$\tau_{MG}(W_q^r)_p \asymp M^{-\frac{1}{l-d}(r-d/q+d/p)+1/p-1/q}.$$

Первый результат по приближению билинейными формами был получен Е. Шмидтом [1], который в 1907 году нашел наилучшее приближение периодической функции двух переменных суммами произведений функций одной переменной в L_2 . В. Н. Темляковым в ряде работ (см., например, [2], [3]) найдены порядки приближения $\tau_{MG}(F)_p$ классов периодических функций многих переменных билинейными формами, когда в $\Gamma(u, v)$ $d = l - d$. Это классы $W_{q,\alpha}^{\tilde{r}}$, $SW_{q,\alpha}^r$, $H_q^{\tilde{r}}$ и NH_q^r периодических функций, определенных ограничениями на соответствующие частные производные или ограничениями на соответствующие допредельные разности. Такие оценки им получены [4] также в различных смешанных нормах для анизотропных классов Соболева и Никольского. Порядок уклонения соболевских классов W_q^r от многообразия билинейных форм $G^M(\Gamma)$ в L_p при $1 \leq q \leq p \leq 2$ и $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$ был установлен автором в [5] и [6].

В доказываемой здесь теореме для класса $W_q^r(K)$ группы переменных u и v произвольные. Как видно из формулировки теоремы, специфика групп переменных различной длины проявляется еще и в том, что порядок $\tau_{MG}(W_q^r)_p$ зависит от p и q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Случаи $q = 2$, $2 \leq p \leq \infty$ и $p = q$ следуют из результатов, приведенных в [5]–[7]. Нам необходимо рассмотреть случай $2 < q < p \leq \infty$. Сначала проведем необходимую подготовительную работу. Обозначим через J множество m^l мультииндексов:

$$J = J_l = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_l) \mid 1 \leq i_j \leq m, j = \overline{1, l}\}.$$

Разобьем куб $K = I^l$, $I = [0, 1]$ на m^l кубов

$$K_{\bar{i}} = \left\{ x \mid \frac{i_j - 1}{m} \leq x_j \leq \frac{i_j}{m}, \bar{i} = (i_1, \dots, i_l) \in J \right\}$$

и рассмотрим в $\mathbb{R}^l$ m^l функций

$$s_{\bar{i}}(x) = \begin{cases} \prod_{j=1}^m |\sin^\rho(\pi m x_j)|, & \rho > r, \quad x \in K_{\bar{i}}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^l \setminus K_{\bar{i}}. \end{cases}$$

Договоримся в дальнейшем под

$$\left(\int_{\Delta} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{и} \quad \left(\sum_{i=1}^k a_i^p \right)^{1/p}$$

при $p = \infty$ понимать

$$\text{vrai max}_{x \in \Delta} |f(x)| \quad \text{и} \quad \max_{i=\overline{1, k}} a_i$$

соответственно.

ЛЕММА 1 [6]. Для произвольных $p \geq 1$, $\bar{l} \in J$ и целых $r_j \geq 0$ ($j = \overline{1, \bar{l}}$, $\sum_{j=1}^{\bar{l}} r_j = r$) имеет место равенство

$$\left(\int_{K_{\bar{l}}} |s_{\bar{l}}^{(\bar{r})}(x)|^p dx \right)^{1/p} = c_{\bar{r}, p} \cdot m^{r-l/p},$$

где $c_{\bar{r}, p}$ константа, зависящая лишь от l , ρ , $\tilde{r}$ и p .

Рассмотрим множество

$$s_m = \left\{ \xi_{\bar{l}} = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_l}) \mid \xi_s = \frac{s-1}{m}, s = \overline{1, m}, \bar{l} \in J \right\}$$

вершин кубов $K_{\bar{l}}$. Построим в $\mathbb{R}^{m^l}$ многообразие

$$G_m^{M\Gamma} = \left\{ g \in R^{m^l} \mid g(\xi_{\bar{l}}) = \sum_{k=1}^M \varphi_k(\xi) \psi_k(\eta) \right\},$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $\eta = (\xi_{d+1}, \dots, \xi_l)$.

Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma_1(m) = (\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \xi_{d+1}, \dots, \xi_l)$ и построим в $\mathbb{R}^{m^{2(l-d)}}$ многообразие

$$G_m^{M\Gamma_1} = \left\{ h \in R^{m^{2(l-d)}} \mid h = \sum_{k=1}^M \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_{l-d}) \psi_k(\xi_{d+1}, \dots, \xi_l), \right. \\ \left. \varphi_k, \psi_k - \text{вещественные функции} \right\}.$$

Пусть B_q^m – единичный шар в ℓ_q^m .

Оценим $\tau_{M\Gamma}(W_q^r)_p$ снизу.

ЛЕММА 2. Пусть $m^{l-d} \asymp M$. Тогда

$$\tau(B_q^{m^{2(l-d)}}, G_m^{M\Gamma_1}, \ell_2^{m^{2(l-d)}}) \gg M^{1-2/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$f_{\alpha\beta} = \exp \left(2\pi i \beta (\xi_{d+1}, \dots, \xi_l) \frac{\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{l-d}) - 1}{m^{l-d}} \right), \quad (1)$$

где α и β взаимно-однозначные отображения между множествами

$$\underbrace{\{1, \dots, m\} \times \dots \times \{1, \dots, m\}}_{l-d} \quad \text{и} \quad \{1, \dots, m^{l-d}\}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{m^{2(l-d)}}$ вектор $f = \{f_{\alpha\beta}/m^{2(l-d)/q}\}_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}}$. Поскольку

$$\|f\|_{\ell_q^{m^{2(l-d)}}} = \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{2(l-d)/q}} \right|^q \right)^{1/q} \leq \frac{1}{m^{2(l-d)/q}} \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} 1 \right)^{1/q} = 1,$$

то $f \in B_q^{m^{2(l-d)}}$.

Рассмотрим величину

$$I^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| f_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^M \varphi_{\alpha k} \psi_{\beta k} \right|^2,$$

где $\varphi_{\alpha k}, \psi_{\beta k}$ – произвольные комплексные числа. Оценим I снизу. Запишем I^2 в виде

$$I^2 = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \left\| f_{\alpha} - \sum_{k=1}^M \varphi_{\alpha k} \psi_k \right\|_{\ell_2^{m^{l-d}}}^2, \quad (2)$$

где $f_{\alpha} = (f_{1\alpha}, \dots, f_{m^{l-d}\alpha})$, $\psi_k = (\psi_{1\alpha}, \dots, \psi_{m^{l-d}\alpha})$ комплексные векторы в $\ell_2^{m^{l-d}}$. Рассмотрим подпространство L_M в $\mathbb{R}^{m^{l-d}}$, натянутое на векторы $\psi_1, \dots, \psi_M$. Пусть $g_1, \dots, g_M$ – ортонормированный набор в L_M (как будет видно из дальнейшего изложения, векторы $\psi_1, \dots, \psi_M$, не умаляя общности, можно считать линейно независимыми). Тогда (см., например, [8]) для каждого α

$$\left\| f_{\alpha} - \sum_{k=1}^M \varphi_{\alpha k} \psi_k \right\|_{\ell_2^{m^{l-d}}} \geq \rho(f_{\alpha}, L_M, \ell_2^{m^{l-d}}) = \left\| f_{\alpha} - \sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_k \right\|_{\ell_2^{m^{l-d}}}, \quad (3)$$

где $g_k = (g_{1k}, \dots, g_{m^{l-d}k})$, ρ – расстояние от f_{α} до L_M в метрике $\ell_2^{m^{l-d}}$. Из (2) и (3) следует

$$I^2 \geq \sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| f_{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_{\beta k} \right|^2.$$

Из неравенства треугольника получаем

$$I \geq \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} |f_{\alpha\beta}|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| \sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_{\beta k} \right|^2 \right)^{1/2} \equiv K_1 - K_2. \quad (4)$$

Так как $|f_{\alpha\beta}| = 1$, то

$$K_1^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} |f_{\alpha\beta}| = m^{2(l-d)}. \quad (5)$$

Оценим сумму

$$K_2^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| \sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_{\beta k} \right|^2.$$

Рассмотрим вектор

$$h = \left(\sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_{1k}, \dots, \sum_{k=1}^M (f_{\alpha}, g_k) g_{m^{l-d}k} \right).$$

В силу ортонормированности векторов $g_1, \dots, g_M$ имеем

$$\sum_{\beta=1}^{m^{l-d}} \left| \sum_{k=1}^M (f_\alpha, g_k) g_{\beta k} \right|^2 = \|h\|_{\ell_2^{m^{l-d}}}^2 = \sum_{k=1}^M |(f_\alpha, g_k)|^2.$$

Тогда

$$K_2^2 = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M |(f_\alpha, g_k)|^2. \quad (6)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M |(f_\alpha, g_k)|^2 &= \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M (f_\alpha, g_k) \overline{(f_\alpha, g_k)} = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^{m^{l-d}} f_{\alpha s} \bar{g}_{sk} \sum_{s'=1}^{m^{l-d}} \bar{f}_{\alpha s'} g_{s'k} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M \sum_{s=1}^{m^{l-d}} f_{\alpha s} \bar{f}_{\alpha s} \bar{g}_{sk} g_{sk} + \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M \sum_{\substack{s, s'=1 \\ s \neq s'}}^{m^{l-d}} f_{\alpha s} \bar{f}_{\alpha s'} \bar{g}_{sk} g_{s'k} \\ &\equiv \sum_1 + \sum_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $f_{\alpha s} \bar{f}_{\alpha s} = 1$ для любых α и s , то

$$\sum_1 = \sum_{\alpha} \sum_k \sum_s |g_{sk}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \sum_{k=1}^M 1 = m^{l-d} M. \quad (8)$$

Положим

$$\sum_{k=1}^M \bar{g}_{sk} g_{s'k} = a_{ss'}, \quad \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} f_{\alpha s} \bar{f}_{\alpha s'} = b_{ss'}.$$

Тогда

$$\sum_2 = \sum_{\substack{s, s'=1 \\ s \neq s'}}^{m^{l-d}} a_{ss'} b_{ss'}. \quad (9)$$

Поскольку при фиксированных $\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \xi_{d+1}, \dots, \xi_l$

$$b_{ss'} = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} f_{\alpha s} \bar{f}_{\alpha s'} = \sum_{\alpha=1}^{m^{l-d}} \exp\left(\frac{2\pi i(\alpha-1)(s-s')}{m^{l-d}}\right),$$

то, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получаем $b_{ss'} = 0$, так как $s \neq s'$ и $1 \leq s, s' \leq m^{l-d} \implies \exp(2\pi i(s-s')/m^{l-d}) \neq 1$. Тогда из (9) будем иметь $\sum_2 = 0$ и, значит, в силу (6)–(8)

$$K_2^2 \leq \left| \sum_1 \right| + \left| \sum_2 \right| \leq m^{l-d} M.$$

Подставляя это соотношение, а также (5) в неравенство (4), получаем

$$I \geq K_1 - K_2 \geq \sqrt{m^{l-d}}(\sqrt{m^{l-d}} - \sqrt{M}).$$

Подбирая m и $c_1 > 1$ из соотношения $m^{l-d} > c_1 M$, будем иметь $I \geq M\sqrt{c_1}(\sqrt{c_1} - 1) \gg M$. Таким образом,

$$\rho(f, G_m^{M\Gamma_1}, \ell_2^{m^{2(l-d)}}) \gg \frac{M}{m^{2(l-d)/q}} \gg M^{1-2/q}. \quad (10)$$

Комплексному вектору $f = \{f_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = \overline{1, m^{l-d}}\}$ размерности $m^{2(l-d)}$ сопоставим вещественный вектор

$$f_1 = \{\operatorname{Re} f_{\alpha\beta}, \operatorname{Im} f_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta = \overline{1, m^{l-d}}\}$$

размерности $2m^{2(l-d)}$, а вектору

$$\varphi = \left\{ \sum_{k=1}^M \varphi_{1k} \psi_{1k}, \dots, \sum_{k=1}^M \varphi_{m^{l-d}k} \psi_{m^{l-d}k} \right\}$$

вектор

$$\varphi^{(1)} \left\{ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^M \varphi_{\alpha k} \psi_{\alpha k}, \operatorname{Im} \sum_{k=1}^M \varphi_{\alpha k} \psi_{\alpha k} \mid \alpha = \overline{1, m^{l-d}} \right\}.$$

Тогда в силу (10)

$$\rho^2(f, \varphi)_{\ell_2^{m^{2(l-d)}}} = \|f - \varphi\|_{\ell_2^{m^{2(l-d)}}}^2 = \rho^2(f_1, \varphi^{(1)})_{\ell_2^{2m^{2(l-d)}}} \gg M^{2(1-2/q)}. \quad (11)$$

Но поскольку для вещественных векторов

$$\|\cdot\|_{\ell_2^{m^{2(l-d)}}} \asymp \|\cdot\|_{\ell_2^{2m^{2(l-d)}}},$$

то из (11) получаем

$$\|f_1 - \varphi^{(1)}\|_{\ell_2^{m^{2(l-d)}}} \gg M^{1-2/q} \implies \tau(B_q^{m^{2(l-d)}}, G_m^{M\Gamma_1}, \ell_2^{m^{2(l-d)}}) \gg M^{1-2/q},$$

откуда и следует утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3 (см. также теорему 5 в [3]). При $m^{l-d} \asymp M$ справедлива оценка

$$\tau(B_q^{m^l}, G_m^{M\Gamma}, \ell_p^{m^l}) \gg M^{2(1/p-1/q)}, \quad 2 \leq q \leq p \leq \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)$, а $f_{\alpha\beta}$ функция, определенная в (1),

$$\tilde{f}_\xi \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{f}_{\xi_1 \dots \xi_l} = \begin{cases} \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{2(l-d)/q}}, & \text{если } \xi_{l-d+1} = \dots = \xi_d = 1; \\ 0, & \text{если } \prod_{i=l-d+1}^d \xi_i > 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_\xi\|_{\ell_q^{m^l}} &= \left(\sum_{\xi_1, \dots, \xi_l=1}^m |\tilde{f}_{\xi_1 \dots \xi_l}|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{\substack{\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \\ \xi_{d+1}, \dots, \xi_l=1}}^m |\tilde{f}_{\xi_1 \dots \xi_{l-d} 1 \dots 1 \xi_{d+1} \dots \xi_l}|^q \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^{m^{l-d}} \left| \frac{f_{\alpha\beta}}{m^{2(l-d)/q}} \right|^q \right)^{1/q} \leq 1, \end{aligned}$$

то $\tilde{f}_\xi \in B_q^{m^l}$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \tau(B_q^{m^l}, G_m^{M\Gamma}, \ell_p^{m^l}) &\geq \rho(\tilde{f}_\xi, G_m^{M\Gamma}, \ell_p^{m^l}) \\ &= \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1, M}} \left(\sum_{\xi_1, \dots, \xi_l=1}^m \left| \tilde{f}_\xi - \sum_{k=1}^M \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_d) \psi_k(\xi_{d+1}, \dots, \xi_l) \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1, M}} \left(\sum_{\substack{\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \\ \xi_{d+1}, \dots, \xi_l=1}}^m \left| \tilde{f}_{\xi_1 \dots \xi_{l-d} 1 \dots 1 \xi_{d+1} \dots \xi_l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^M \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \dots, 1, \dots, 1) \psi_k(\xi_{d+1}, \dots, \xi_l) \right|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, продолжим оценку:

$$\begin{aligned} &\geq \inf_{\substack{\varphi_k, \psi_k \\ k=1, M}} \left(\sum_{\substack{\xi_1, \dots, \xi_{l-d}, \\ \xi_{d+1}, \dots, \xi_l=1}} \left| \tilde{f}_{\xi_1 \dots \xi_{l-d} 1 \dots 1 \xi_{d+1} \dots \xi_l} - \sum_{k=1}^M \varphi_k(\xi_1, \dots, \xi_{l-d}) \psi_k(\xi_{d+1}, \dots, \xi_l) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \frac{1}{m^{(l-d)(1-2/p)}}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2, завершаем доказательство:

$$\gg \frac{1}{m^{(l-d)(1-2/p)}} M^{1-2/q} \gg \frac{1}{M^{1-2/p}} M^{1-2/q} = M^{2(1/p-1/q)}.$$

Лемма 3 доказана.

Пусть $h \in B_q^{m^l}$. Определим функцию

$$H(x) = (Th)(x) = b_m \sum_{\bar{\tau} \in J} h_{\bar{\tau}} s_{\bar{\tau}}(x),$$

где $b_m = c^* \cdot m^{-r+l/q}$. Действуя, как в [6, с. 125] и выбирая c^* из условия

$$c^* \leq \min \left\{ c_{0,q}^{-1}, \left(\sum_{|\bar{r}|=r} c_{\bar{r},q} \right)^{-1} \right\},$$

нетрудно убедиться в том, что $H(x) \in W_q^r$. Определим множество

$$Q_q^r = \left\{ H(x) \mid H(x) = b_m \sum_{\bar{i} \in J} h_{\bar{i}} s_{\bar{i}}(x), h \in B_q^{m^l} \right\}.$$

Поскольку $Q_q^r \subset W_q^r$, то

$$\tau(W_q^r, G^M(\Gamma), L_p^{m^l}) \geq \tau(Q_q^r, G^M(\Gamma), L_p^{m^l}).$$

Для любого $H \in Q_q^r$ и $g \in G^M(\Gamma)$ имеем

$$\begin{aligned} \|H - g\|_p^p &= \int_K |H(x) - g(x)|^p dx = \sum_{\bar{i} \in J} \int_{K_{\bar{i}}} |H(x) - g(x)|^p dx \\ &= \int_{K_{\bar{1}}} \left[\sum_{\bar{i} \in J} |H(x + \xi_{\bar{i}}) - g(x + \xi_{\bar{i}})|^p \right] dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Зафиксируем $x \in K_{\bar{1}}$, $H(x + \xi_{\bar{i}}) = b_m s_{\bar{1}}(x) h_{\bar{i}}$. В силу леммы 3 существует $h \in B_q^{m^l}$, такой, что

$$\inf_{\sigma \in G_m^{M\Gamma}} \|h - \sigma\|_{\ell_p^{m^l}} \gg M^{2(1/p-1/q)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\inf_{\sigma \in G_m^{M\Gamma}} \left(\sum_{\bar{i} \in J} |b_m s_{\bar{1}}(x) h_{\bar{i}} - \sigma(x + \xi_{\bar{i}})|^p \right)^{1/p} \\ &= b_m s_{\bar{1}}(x) \inf_{\sigma \in G_m^{M\Gamma}} \left(\sum_{\bar{i} \in J} |h_{\bar{i}} - \sigma(x + \xi_{\bar{i}})|^p \right)^{1/p} \geq b_m s_{\bar{1}}(x) M^{2(1/p-1/q)}. \end{aligned}$$

Учитывая это для $H(x) = (Th)(x)$, согласно (12) и лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} \|H - g\|_p &\gg \left(\int_{K_{\bar{1}}} b_m^p s_{\bar{1}}^p(x) M^{2p(1/p-1/q)} dx \right)^{1/p} = b_m M^{2(1/p-1/q)} \|s_{\bar{1}}(x)\|_{L_p(K_{\bar{1}})} \\ &= C_{\bar{r},p} m^{-l/p} b_m M^{2(1/p-1/q)} \gg c_{\bar{r},p} m^{-l/p} c^* m^{-r+l/p} M^{2/p-2/q} \\ &= m^{-r} m^{l(1/p-1/q)} M^{2(1/p-1/q)} \gg M^{-r/(l-d)} M^{-\frac{l}{l-d}(1/p-1/q)} M^{2(1/p-1/q)} \\ &= M^{-r/(l-d)} M^{(1/p-1/q)(2-l/(l-d))} = M^{-\frac{1}{l-d}(r-d/q+d/p)+1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Оценка снизу установлена.

Приведем ряд утверждений, необходимых для установления оценки сверху.

ЛЕММА 4 (Кашин, Глускин [9]). *Имеют место соотношения*

$$d_n(B_q^m, \ell_p^m) \asymp (\min\{1, m^{1/p} n^{-1/2}\})^{(1/q-1/p)/(1/2-1/p)}, \quad 2 \leq q < p < \infty,$$

с константами, не зависящими от m и n (здесь, как обычно, через d_n обозначен n -поперечник по Колмогорову).

Нам потребуется очевидное следствие из этой леммы: так как $2 \leq q < p < \infty$, то $1/q - 1/p > 0$, $1/2 - 1/p > 0$, следовательно, при $m \asymp n$ $m^{1/p} n^{-1/2} \asymp m^{1/p-1/2}$ и n можно брать настолько ближе к m , что будем иметь $m^{1/p} n^{-1/2} < 1$, и поэтому

$$d_n(B_q^m, \ell_p^m) \asymp (m^{1/p} n^{-1/2})^{(1/q-1/p)/(1/2-1/p)}. \quad (13)$$

ЛЕММА 4' (Гарнаев, Глускин [10]). *Пусть $2 \leq t < \infty$. Тогда при $1 \leq n < m$ с некоторой абсолютной константой c справедливо неравенство*

$$d_n(B_t^m, \ell_\infty^m) \leq \min \left\{ 1, c \left(\frac{\log(1 + m/n)}{n} \right)^{1/t} \right\}.$$

В [10] установлено для $d_n(B_t^m, \ell_\infty^m)$ порядковое равенство. Мы в этой заметке будем использовать оценку сверху.

ЛЕММА 5 (см. [7] и [11]). *Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$ и $\Delta \subset I^l$ куб со сторонами, параллельными координатным осям. При выполнении условия $r > l/q - l/p$ существует линейный оператор проектирования P_Δ , отображающий пространство $W_q^r(\Delta)$ на конечномерное пространство полиномов степени $\leq r - 1$ от l переменных, такой, что $\forall f \in W_q^r(\Delta)$*

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_q(\Delta)} \leq c |\Delta|^{r/l-1/q+1/p} \|f\|_{L_q^r(\Delta)},$$

где $|\Delta|$ – лебегов объем куба Δ , константа c не зависит от куба Δ и f .

Разобьем куб I^l на 2^{kl} , $k = 0, 1, \dots$, равных кубов. Полученное множество кубов Δ обозначим через R_k . Построим оператор $P_{R_k} = P_k$, положив внутри каждого куба $\Delta \in R_k$ $(P_k f)(x) = (P_\Delta f)(x)$. Для однозначности оператора $P_k f$ договоримся на плоскостях, принадлежащих граням различных Δ и Δ' , в качестве значения $R_k f$ принимать значения какого-нибудь одного из полиномов $P_\Delta f$ и $P_{\Delta'} f$. $(P_k f)(x)$ представляет собой всюду на I^l кусочно-полиномиальную функцию, причем каждый полином имеет степень $\leq r - 1$.

ЛЕММА 6 [7]. *Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $r > l/q - l/p$. Положим для $f \in W_q^r(I^l)$*

$$T_0 f = P_0 f, \quad T_k f = (P_k - P_{k-1})(f) = P_k f - P_{k-1} f \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тогда для любой $f \in W_q^r(I^l)$

$$\|T_k f\|_{L_p(I^l)} \leq 4c \cdot 2^{(-r+l/q-l/p)(k-1)},$$

где c – константа из леммы 4', и имеет место разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} T_k f,$$

где сходимость понимается в смысле $L_p(I^l)$.

ЛЕММА 7 [7]. Пусть $M_k \in \{0, 1, \dots\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} M_k \leq N$. Тогда, полагая $G^0 = \{\varphi \equiv 0\}$, будем иметь при $1 \leq p \leq \infty$

$$\rho\left(\sum_{k=0}^{\infty} T_k f, G^N, L_p\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \rho(T_k f, G^{M_k}, L_p). \quad (14)$$

При $M_k = 0$, $G^0 = \{0\}$ получаем величины

$$\rho(T_k f, G^{M_k}, L_p) = \|T_k f\|_p,$$

оценка которых дана в лемме 6. Оценка остальных слагаемых в (14) (при $0 < M_k < m_k^{l-d}$) будет основываться на следующей лемме и следствии из нее.

Рассмотрим сетку Q на кубе I^l :

$$Q = \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \mid \xi_s = \frac{j-1}{m}, j = \overline{1, m}, s = \overline{1, l} \right\}$$

и каждой сеточной функции $V(\xi)$ поставим в соответствие вектор $(V(\xi))_{\xi \in Q} = V \in \mathbb{R}^{m^l}$, координаты которого, занумерованные мультииндексом ξ , пробегающим свои значения Q , совпадают с соответствующими значениями $V(\xi)$. Пусть

$$V \in B_q^{m^l}, \quad \text{т.е.} \quad \|V(\xi)\|_{\ell_q^{m^l}} = \left(\sum_{\xi \in Q} |V(\xi)|^q \right)^{1/q} \leq 1,$$

$$\xi_u = \xi_{\overline{1, d}} = (\xi_1, \dots, \xi_d), \quad \xi_v = \xi_{\overline{d+1, l}}, \quad \xi = (\xi_u, \xi_v).$$

ЛЕММА 8. Пусть $2 \leq q < p \leq \infty$. Для произвольных натуральных m , $M < \mu = m^{l-d}$ на классе сеточных функций $V(\xi) \in B_q^{m^l}$ ($\xi \in Q$) существует оператор H_{mM} вида

$$(H_{mM}V)(\xi) = g_{2M}(\xi; V) = \sum_{j=1}^{2M} \varphi_j(\xi_u; V) \psi_j(\xi_v; V)$$

такой, что

$$\left\{ \sum_{\xi \in Q} |V(\xi) - (H_{mM}V)(\xi)|^p \right\}^{1/p} \leq c M^{1/p-1/q} d_{mM},$$

где

$$d_{mM} = \begin{cases} m^{(l-d)/p} M^{-1/2} & \text{при } p < \infty, \\ \left[\frac{\log(1 + m^{l-d}/M)}{m} \right]^{1/2} & \text{при } p = \infty \end{cases} \quad (15)$$

с константой $0 < c < \infty$, не зависящей от m , M и V .

Доказательство леммы 8 проводится аналогично лемме 8 из [7] с использованием (13) и леммы 4'.

ЛЕММА 9 (следствие). При $2 \leq q < p < \infty$ для любых натуральных m , $M < \mu = m^{l-d}$ на классе сеточных функций $V(\xi)$ ($\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in Q$) существует оператор $g_M(\xi; V)$ вида

$$g_M(\xi; V) = \sum_{j=1}^M \varphi_j(\xi_u; V) \psi_j(\xi_v; V),$$

$$\xi_u = (\xi_1, \dots, \xi_d), \quad \xi_v = (\xi_{d+1}, \dots, \xi_l), \quad \xi = (\xi_u, \xi_v)$$

такой, что

$$\left(\sum_{\xi \in Q} |V(\xi) - g_M(\xi; V)|^p \right)^{1/p} \leq c M^{1/p-1/q} d_{mM} \|V(\xi)\|_{\ell_q^{m^l}}.$$

Здесь d_{mM} определен в (15), а константа c не зависит от m и M .

Для оценки $t_{M\Gamma}(W_q^r)_p$ сверху оценим вначале слагаемые $\rho(T_k f, G^{M_k}, L_p)$ в правой части неравенства (14) леммы 7 и при $0 < M_k < m_k^{l-d}$ ($m_k = r \cdot 2^k$). Для этого разобьем каждый кубик $\Delta \in R_k$ на r^l равных кубиков. В итоге получим разбиение I^l на $(r \cdot 2^k)^l$ равных кубиков и соответствующую сетку $Q = Q(r, k)$, совпадающую с рассмотренной в леммах 8, 9 сеткой при $m = m_k = r \cdot 2^k$. Пусть

$$g_{M_k}(\xi) = \sum_{j=1}^{M_k} \varphi_j(\xi_u) \psi_j(\xi_v)$$

– любая билинейная форма на сетке $Q(r, k)$. Обозначим через Δ_u (Δ_v) и $Q_u(r, k)$ ($Q_v(r, k)$) проекции Δ и $Q(r, k)$ на пространства переменных $u = (x_{\overline{1,d}})$ ($v = (x_{\overline{d+1,l}})$). Пусть $P_{j, \Delta_u}(u)$ ($P_{j, \Delta_v}(v)$) – интерполяционный по каждой переменной $x_1, \dots, x_d$ ($x_{d+1}, \dots, x_l$) многочлен Лагранжа, интерполирующий функцию $\varphi_j(\xi_u)$ ($\psi_j(\xi_v)$) на сетке $Q_u(r, k) \cap \overline{\Delta_u}$ ($Q_v(r, k) \cap \overline{\Delta_v}$) (см., например, [7]). Полагая

$$\varphi_j(u) = \sum_{\Delta_u \subset I^d} \chi_{\Delta_u}(u) P_{j, \Delta_u}(u), \quad \psi_j(v) = \sum_{\Delta_v \subset I^{l-d}} \chi_{\Delta_v}(v) P_{j, \Delta_v}(v),$$

где $\chi_E(t)$ характеристическая функция множества E , продолжим $g_{M_k}(\xi)$ на I^l :

$$g_{M_k}(x) = \sum_{j=1}^{M_k} \varphi_j(u) \psi_j(v).$$

Функция $g_{M_k}(x)$ является внутри каждого $\Delta \in R_k$ полиномом степени r по каждой переменной $x_1, \dots, x_l$. Доопределим функции $\varphi_j(u)$, $\psi_j(v)$ на гранях Δ_u , Δ_v , например, по непрерывности слева по каждой переменной, получим билинейную форму $g_{M_k}(x)$ на I^l , интерполирующую на сетке $Q(r, k)$ исходную функцию $g_{M_k}(\xi)$. Положим

$$\|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q} \stackrel{\text{df}}{=} \left(\sum_{\xi \in Q(r, k)} |(T_k f)(\xi)|^q \right)^{1/q}.$$

Применим лемму 9 к сеточной функции $V(\xi; f) = (T_k f)(\xi) / \|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q}$ при $m = m_k$ и $M = M_k \leq \mu_k = m_k^{l-d}$. В итоге при $M_k \leq \mu_k \leq m_k^{l-d}$ функции $(T_k f)(\xi)$ поставим в соответствие функцию $g_{M_k}(\xi; f) \in G^{M_k}(\Gamma, Q(r, k))$ при $2 \leq q < p \leq \infty$, удовлетворяющую неравенству

$$\left(\sum_{\xi \in Q(r, k)} |(T_k f)(\xi) - g_{M_k}(\xi; f)|^p \right)^{1/p} \leq c M_k^{1/p-1/q} d_{m_k M_k} \|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q}, \quad (16)$$

где

$$d_{m_k M_k} = \begin{cases} (m_k^{(l-d)/p} M_k^{-1/2})^{(1/q-1/p)/(1/2-1/p)} & \text{при } p < \infty, \\ \left[\frac{\log((1 + m_k^{l-d})/M_k)}{M_k} \right]^{1/q} & \text{при } p = \infty. \end{cases} \quad (17)$$

Продолжим $g_{M_k}(\xi; f)$ на I^l , как указано выше. Так как на каждом $\Delta \in R_k$ $(T_k f)(x)$ есть полином степени $\leq r$ по совокупности переменных и $g_{M_k}(x; f)$ есть по построению полином степени $\leq r$ по каждому переменному, то

$$(T_k f)(x) - g_{M_k}(x; f) \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{P}_\Delta(x)$$

есть полином степени r по каждой переменной. Тогда в силу леммы 1.2 из [12]

$$\left\| \sum_{\Delta \in R_k} \chi_\Delta(x) \tilde{P}_\Delta(x) \right\|_p \leq c_{r,l} |\Delta|^{1/p} \left(\sum_{\Delta \in R_k} \sum_{\xi \in \bar{\Delta} \cap Q(r, k)} |\tilde{P}_\Delta(\xi)|^p \right)^{1/p}.$$

С учетом эквивалентности норм в ℓ_p на $R^{(r+1)^l}$ ($1 \leq p \leq \infty$, $(r+1)^l$ – мощность $\bar{\Delta} \cap Q(r, k)$) доказательство этого неравенства сводится к неравенству

$$\|\tilde{P}_\Delta(x)\|_{L_p(\Delta)} \leq c \|\tilde{P}_\Delta(\xi)\|_{\ell_1(\xi \in \bar{\Delta} \cap Q(r, k))} |\Delta|^{1/p},$$

непосредственно вытекающему из представления $\tilde{P}_\Delta(x)$ в форме интерполяционного многочлена Лагранжа степени r на Δ :

$$\tilde{P}_\Delta(x) = \sum_{\xi_{1,l} \in \bar{\Delta} \cap Q(r, k)} \tilde{P}_\Delta(\xi_{1,l}) l_{\xi_1}(x_1) l_{\xi_2}(x_2) \cdots l_{\xi_l}(x_l),$$

где $l_{\xi_i}(x_i)$ – полином степени r по x_i , $\tilde{P}_\Delta(\xi_{1,l})$ – множители Лагранжа. Тогда

$$\begin{aligned} c |\Delta|^{1/p} &= c(r, l) |\Delta|^{1/p} = \max_{\xi_{1,l} \in \bar{\Delta} \cap Q(r, k)} \|l_{\xi_1}(x_1) l_{\xi_2}(x_2) \cdots l_{\xi_l}(x_l)\|_{L_p(\Delta)} \\ &= |\Delta|^{1/p} \left\{ \max_{0 \leq j \leq r} \left(\int_0^1 \left| \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^r \frac{(t-s/r)}{(j/r-s/r)} \right|^p dt \right)^{1/p} \right)^l. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|(T_k f)(x) - g_{M_k}(x)\|_{L_p(I^l)} \leq c_{r,k} |\Delta|^{1/p} \left(\sum_{\xi \in Q(r, k)} |(T_k f)(\xi) - g_{M_k}(\xi)|^p \right)^{1/p}.$$

С учетом (16) получаем при $2 \leq q < p \leq \infty$

$$\|(T_k f)(x) - g_{M_k}(x)\|_{L_p(I^l)} \leq \tilde{c} M_k^{1/p-1/q} 2^{-kl/2} d_{r \cdot 2^k, M_k} \|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q}. \quad (18)$$

Оценим $\|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q} &= \left(\sum_{\Delta \in R_k} \sum_{\xi \in \Delta} |(T_k f)(\xi)|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{\Delta \in R_k} \sum_{\xi \in \Delta} (\|(T_k f)(x)\|_{L_\infty(\Delta)})^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку $T_k f = P_k f - P_{k-1} f$ есть полином степени $\leq k$, то согласно известному неравенству Никольского (в одномерном случае см., например, [13, с. 251])

$$\|(T_k f)(x)\|_{L_\infty(\Delta)} \leq c(k, p) |\Delta|^{-1/p} \|(T_k f)(x)\|_{L_p(\Delta)}, \quad p \geq 1. \quad (20)$$

Далее, используя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} \|(T_k f)(x)\|_{L_p(\Delta)} &\leq \|f - P_k f\|_{L_p(\Delta)} + \|f - P_{k-1} f\|_{L_p(\Delta)} \\ &\ll |\Delta|^{r/l-1/q+1/p} \|f\|_{W_q^r(\Delta)}. \end{aligned}$$

Учитывая это и (20), из (19) будем иметь

$$\begin{aligned} \|(T_k f)(\xi)\|_{\ell_q} &\ll \left[\sum_{\Delta \in R_k} \sum_{\xi \in \Delta} (|\Delta|^{-1/p} |\Delta|^{r/l-1/q+1/p} \|f\|_{W_q^r(\Delta)})^q \right]^{1/q} \\ &= |\Delta|^{r/l-1/q} r^l \left(\sum_{\Delta \in R_k} \|f\|_{W_q^r(\Delta)}^q \right)^{1/q} = |\Delta|^{r/l-1/q} r^l (\|f\|_{W_q^r(\Delta)}^q)^{1/q} \\ &\ll |\Delta|^{r/l-1/q} = 2^{-(r/l-1/q)kl}. \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя оценку (21) в (18), получаем при

$$\begin{aligned} \rho(T_k f, G^{M_k}, L_p) &\leq \|(T_k f)(x) - g_{M_k}(x; f)\|_{L_p(I^l)} \\ &\leq \tilde{c} M_k^{1/p-1/q} d_{r \cdot 2^k, M_k} \cdot 2^{(-r/l+1/q-1/p)kl} \quad (2 \leq q < p \leq \infty). \end{aligned} \quad (22)$$

Для завершения оценки $\tau_M(W_q^r)_p$ сверху конкретизируем числа M_k в лемме 7 следующим образом. Положим при $r > l/q - d/p$

$$M_k = \begin{cases} (r \cdot 2^k)^{l-d}, & k \leq k' = \frac{1}{l-d} \log_2 M, \\ [M \cdot 2^{\alpha(k'-k)}], & k' < k \leq k^* = \frac{\alpha+1}{\alpha} k', \\ 0, & k > k^*, \end{cases}$$

где число α определяется из соотношения

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{r - l/q + d/p}{(l-d)(1/2 + 1/q - 2/p)}, \frac{r - (1/q - 1/p)[l + (l-d)/p/(1/2 - 1/p)]}{(1/q - 1/p)[1 + (1/2)/(1/2 - 1/p)]} \right\}$$

(это возможно, поскольку согласно условиям теоремы, эти дроби положительны). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} M_k &\leq \sum_{k=0}^{k'} (r \cdot 2^k)^{l-d} + \sum_{k=k'}^{k^*} [M \cdot 2^{\alpha(k'-k)}] \leq r^{l-d} \frac{2^{l-d}(2^{k'})^{l-d} - 1}{2^{l-d} - 1} \\ &\quad + M \sum_{k=k'}^{k^*} 2^{\alpha(k'-k)} < r^{l-d} \frac{2^{l-d}}{2^{l-d} + 1} M + M \frac{1 - 2^{\alpha(k'-k^*)-\alpha}}{1 - 2^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$l-d \geq 1 \implies \frac{2^{l-d}}{2^{l-d} - 1} \leq 2 \quad \text{и} \quad \alpha(k' - k^*) = \alpha k' \left(1 - \frac{\alpha + 1}{\alpha}\right) = -k',$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k \leq M \left(2r^{l-d} + \frac{1 - 2^{-\alpha-k'}}{1 - 2^{-\alpha}} \right) \leq M\theta \stackrel{\text{df}}{=} N$$

($\theta = 2r^{l-d} + [1/(1 - 2^{-\alpha})] + 1$). Таким образом, в силу леммы 7 и с учетом замечания после ее доказательства и того, что при $k < k'$ $T_k f \in G^{M_k}$, имеем при любом M для $N = \theta M$ (θ не зависит от M):

$$\begin{aligned} \rho(f, G^N, L_p) &\leq \sum_{k > k'} \rho(T_k f, G^{M_k}, L_p) \\ &\leq \sum_{k' < k \leq k^*} \|T_k f - g_{M_k}(x; f)\|_{L_p(I^l)} + \sum_{k > k^*} \|T_k f\|_{L_p(I^l)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим первую сумму в правой части (23) вначале при $p < \infty$. Положим $\omega = r^{-l}/q + l/p$ при $2 \leq q < p < \infty$. В силу (22) и (17) при $m_k = r \cdot 2^k$ имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{k' < k \leq k^*} \|T_k f - g_{M_k}(x; f)\|_{L_p(I^l)} \\ &\leq \tilde{c} \sum_{k' \leq k \leq k^*} M_k^{1/p-1/q} 2^{-\omega k} (m_k^{(l-d)/p} M_k^{-1/2})^{(1/q-1/p)/(1/2-1/p)} \stackrel{\text{df}}{=} J_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как при $\lambda > 1$, $[\lambda] \geq \lambda/2$, то

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c_2 \sum_{k \geq k'} M_k^{1/p-1/q} M_k^{1/2(1/p-1/q)/(1/2-1/p)} 2^{-\omega k} 2^{(k(l-d)/p)(1/q-1/p)/(1/2-1/p)} \\ &= c_3 \sum_{k \geq k'} M^{1/p-1/q+(1/2)(1/p-1/q)/(1/2-1/p)} \\ &\quad \times 2^{\alpha(k'-k)[(1/p-1/q)+(1/2)(1/p-1/q)/(1/2-1/p)]} \\ &\quad \times 2^{-\omega k} 2^{(k(l-d)/p)(1/q-1/p)/(1/2-1/p)} \\ &= c_3 M^{(1/p-1/q)[1+(1/2)/(1/2-1/p)]} 2^{\alpha k'(1/p-1/q)[1+(1/2)/(1/2-1/p)]} A, \end{aligned}$$

где $A = A(p, q, k') = \sum_{k \geq k'} 2^{\delta k}$,

$$\delta = -\alpha \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \left[1 + \frac{1/2}{1/2 - 1/p} - \omega + \frac{l-d}{p} \frac{1/q - 1/p}{1/2 - 1/p} \right].$$

Согласно определению α $\delta < 0$ и поэтому A представляет собой сумму убывающей прогрессии. Следовательно,

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{\delta k'}}{1 - 2^\delta} \leq 2^{\delta k'} \\ &= 2^{-\alpha k' (1/p - 1/q) [1 + (1/2)/(1/2 - 1/p)]} 2^{-\omega k' 2^{(k'(l-d)/p)(1/q - 1/p)/(1/2 - 1/p)}}. \end{aligned}$$

Учитывая это и определение k' , продолжим оценку:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq c_3 M^{(1/p - 1/q)[1 + (1/2)/(1/2 - 1/p)]} M^{(1/(l-d))(-r+l/q-1/p)} M^{(1/p)(1/q-1/p)/(1/2-1/p)} \\ &= c_3 M^{(-1/(l-d))(r-d/q+d/p)+1/p-1/q}. \end{aligned}$$

Учитывая это и соотношения (24), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k' \leq k \leq k^*} \|T_k f - g_{M_k}(x; f)\|_{L_p(I^l)} &\ll M^{(-1/(l-d))(r-d/q+d/p)+1/p-1/q} \\ &(2 \leq q < p < \infty). \end{aligned} \quad (25)$$

При $p = \infty$ в силу (22) и (17)

$$\begin{aligned} J^I &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k' < k \leq k^*} \|(T_k f)(x) - g_{M_k}(x; f)\|_{L_\infty(I^l)} \\ &\leq \sum_{k' < k \leq k^*} c_4 M_k^{-1/q} d_{r, 2^k, M_k} 2^{(-r+l/q)k} \\ &= c_4 \sum_{k' < k \leq k^*} M_k^{-1/q} 2^{(-r+l/q)k} \left[\frac{\log(1 + m_k^{l-d}/M_k)}{M_k} \right]^{1/q} \\ &= c_4 \sum_{k' < k \leq k^*} M^{-2/q} 2^{(-r+l/q)k} \left[\log \left(1 + \frac{m_k^{l-d}}{M_k} \right) \right]^{1/q} \\ &= c_4 M^{-2/q} \sum_{k' < k \leq k^*} 2^{(-r+l/q)k} 2^{-(1/q+1/2)\alpha(k'-k)} \left[\log \left(1 + \frac{m_k^{l-d}}{M_k} \right) \right]^{1/q} \\ &= c_4 M^{-2/q} 2^{(-1/q+1/2)\alpha k'} \sum_{k' < k \leq k^*} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)k} \left[\log \left(1 + \frac{m_k^{l-d}}{M_k} \right) \right]^{1/q}. \end{aligned} \quad (26)$$

Учитывая, что $k > k'$, получаем

$$\log \left(1 + \frac{m_k^{l-d}}{M_k} \right) \leq \log \left(1 + \frac{2^{r-l-d} 2^{k(l-d)}}{M \cdot 2^{\alpha(k'-k)}} \right) = \log \left(1 + \frac{2^{r-l-d} \cdot 2^{k(l-d)+\alpha(k-k')}}{M} \right),$$

где по определению числа $k' = k'(M)$ $1/M = 2^{-k'(l-d)}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \log_2 \left(1 + \frac{m_k^{l-d}}{M_k} \right) &\leq \log_2 (1 + 2r^{l-d} \cdot 2^{k(l-d) + \alpha(k-k') - k'(l-d)}) \\ &\leq c_{r,l} \log_2 2^{(\alpha+l-d)(k-k')} \leq c_{r,l} (\alpha + l)(k - k'). \end{aligned}$$

Тогда из (26) имеем

$$\begin{aligned} J^I &\ll M^{-2/q} \cdot 2^{(-1/q+1/2)\alpha k'} \sum_{k' < k \leq k^*} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)k} \\ &\leq M^{-2/q} \cdot 2^{(-1/q+1/2)\alpha k'} \sum_{k=[k']+1}^{\infty} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)k} \sqrt[q]{k - k'} \\ &= M^{-2/q} \cdot 2^{(-1/q+1/2)\alpha k'} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)k'} \\ &\quad \times \sum_{k=[k']+1}^{\infty} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)(k-k')} \sqrt[q]{k - k'} \\ &= M^{-2/q} \cdot 2^{(-1/q+1/2)2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)k'}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)j} \sqrt[q]{j}. \quad (27) \end{aligned}$$

Согласно определению α при $p = \infty$

$$\begin{aligned} \alpha &< \frac{r - l/q}{(l+d)(1/2 + 1/q)} < \frac{r - l/q}{1/2 + 1/q} \implies \frac{-r + l/q}{1/2 + 1/q} + \alpha < 0 \\ \implies \frac{-r + l/q + \alpha/q + \alpha/2}{1/2 + 1/q} &< 0 \implies -r + \frac{l}{q} + \frac{\alpha}{q} + \frac{\alpha}{2} < 0. \end{aligned}$$

Тогда ряд $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{(-r+l/q+\alpha/q+\alpha/2)j} \sqrt[q]{j}$ сходится, и мы из (27) получаем

$$J^I \ll M^{-2/q} \cdot 2^{(-r+l/q)k'} = M^{-2/q} M^{(1/(l-d))(-r+l/q)} = M^{(-1/(l-d))(r-d/q)-1/q}.$$

Таким образом, получаем, что при $p = \infty$

$$\sum_{k' < k \leq k^*} \|(T_k f)(x) - g_{M_k}(x; f)\|_{L_{\infty}(I^l)} \leq M^{(-1/(l-d))(r-d/q)-1/q}. \quad (28)$$

Для оценки оставшихся в (23) слагаемых применим лемму 6. Имеем

$$J_2 \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k > k^*} \|T_k f\|_{L_p(I^l)} \leq 4c \sum_{k \geq k^*} 2^{-\omega(k-1)} \ll \sum_{k \geq k^*} 2^{-\omega k}.$$

Учитывая, что согласно условиям теоремы $-\omega = -(r - l/q + l/p) < 0$, продолжим оценку

$$J_2 \leq \frac{2^{-\omega k^*}}{1 - 2^{\omega}} \ll 2^{-\omega k^*}.$$

Далее, используя определение k^* , будем иметь

$$J_2 \ll 2^{(-(\alpha+1)/\alpha \cdot \omega/(l-d)) \log_2 M} = M^{-(\alpha+1)/\alpha \cdot \omega/(l-d)}.$$

Согласно определению α

$$0 < \alpha < \frac{r - l/q + d/p}{(l-d)(1/2 + 1/q - 2/p)} < \frac{\omega}{2(l-d)(1/q - 1/p)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha + 1}{\alpha} &= 1 + \frac{1}{\alpha} > 1 + \frac{2(l-d)(1/q - 1/p)}{\omega} \\ \Rightarrow -\frac{\alpha + 1}{\alpha} \cdot \frac{\omega}{l-d} &\ll -\frac{1}{l-d} \left(r - \frac{d}{q} + \frac{d}{p} \right) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_2 \leq M^{(-1/(l-d))(r-d/q+d/p)+1/p-1/q} \quad (2 \leq q < p \leq \infty). \quad (29)$$

Таким образом, из (23), (25), (28) и (29) имеем

$$\rho(f, G^N, L_p) \ll M^{(-1/(l-d))(r-d/q+d/p)+1/p-1/q},$$

где $N = \theta M$, откуда следует искомая оценка сверху $\tau_{\text{МГ}}(W_q^r)_p$ при $2 \leq q < p \leq \infty$. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. I // Math. Ann. 1906/07. V. 63. P. 433–476.
- [2] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
- [3] Темляков В. Н. О наилучших билинейных приближениях периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1986. Т. 2. № 2. С. 301–304.
- [4] Темляков В. Н. Билинейная аппроксимация и приложения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 191–215.
- [5] Бабаев М.-Б. А. Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных и квазипоперечники // Докл. АН АзССР. 1986. № 3. С. 3–5.
- [6] Бабаев М.-Б. А. О порядке приближения соболевского класса билинейными формами в L_p при $1 \leq q \leq p \leq 2$ // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 1. С. 122–129.
- [7] Бабаев М.-Б. А. О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами в L_p при $1 \leq q \leq 2 \leq p \leq \infty$ // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 21–40.
- [8] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Физматгиз, 1965.
- [9] Глускин Е. Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Матем. сб. 1983. Т. 120(162). С. 180–189.
- [10] Гарнаев А. Ю., Глускин Е. Д. О поперечниках евклидова шара // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 5. С. 1048–1052.
- [11] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 331–355.
- [12] Майоров В. Е. Представления и наилучшее приближение на классах функций многих переменных. Дисс. . . к. ф.-м. н. М.: МИСИ, 1976.
- [13] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.