Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. О. Банах, Р. Коти, О гиперпространствах нигде не топологически полных пространств, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 35–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:52:30

УДК 515.12

О ГИПЕРПРОСТРАНСТВАХ НИГДЕ НЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИ ПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Т. Банах, Р. Коти

Доказано, что если X – связное локально континуум связное коаналитическое нигде не топологически полное пространство, то гиперпространство 2^X всех непустых компактных подмножеств X сильно универсально для класса всех коаналитических пространств. Более того, гиперпространство 2^X гомеоморфно Π_2 , если X – пространство первой категории; и 2^X гомеоморфно $Q \setminus \Pi_1$, если X содержит всюду плотное абсолютное G_δ -множество $G \subset X$ так, что пересечение $G \cap U$ связно для любого открытого связного подмножества $U \subset X$. (Здесь $\Pi_1, \Pi_2 \subset Q$ – стандартные подмножества гильбертова куба Q , являющиеся поглощающими пространствами для классов аналитических и коаналитических пространств соответственно.) Аналогичные результаты получены также для высших проективных классов.

Библиография: 22 названия.

Для топологического пространства X через 2^X обозначается гиперпространство всех компактных подмножеств X , снабженное топологией Виеториса.

Давно замечено, что конструкция гиперпространства значительно улучшает геометрические свойства пространств. Например, как доказал Д. Кёртис, обобщив результаты Войдыславского [1] и Ташметова [2], гиперпространство 2^X является абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда X – связное локально континуум связное пространство. (Пространство X называется *локально континуум связным*, если для любой точки $x \in X$ и ее окрестности $U \subset X$ существует окрестность $V \ni x$, любая точка $y \in V$ которой соединяется с x континуумом, лежащим в U .)

Более того, в ряде случаев гиперпространство 2^X оказывается гомеоморфным некоторым хорошо изученным модельным пространствам бесконечномерной топологии. Как пример можно привести классическую теорему Кёртиса–Шори [3], утверждающую, что гиперпространство 2^X гомеоморфно гильбертовому кирпичу Q , как только X – невырожденный пеановский континуум. Несколько позже, Кёртис доказал, что 2^X гомеоморфно гильбертовому кубу с выброшенной точкой, если X – связное локально компактное некомпактное пространство [4], и 2^X гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 , если X – связное локально связное польское нигде не локально компактное пространство [5].

Работа выполнена во время пребывания первого автора в университете Париж VI при поддержке стипендии Министерства Высшего образования Франции.

Эти три результата проясняют топологическую структуру гиперпространств 2^X для топологически полных X и дают топологическую классификацию гиперпространств, являющихся польскими топологически однородными абсолютными ретрактами: каждое такое гиперпространство гомеоморфно одному из пространств: $\{pt\}$, Q , $Q \setminus \{pt\}$, ℓ_2 .

В данной статье мы изучаем топологию гиперпространств 2^X для не топологически полных пространств X . В этом случае известно, что гиперпространство 2^X не борелевское. Тем не менее, мы докажем, что иногда, даже при неполном X , гиперпространство 2^X гомеоморфно некоторым хорошо известным (хоть и не борелевским) модельным бесконечномерным пространствам таким, как пространства Π_{2n} либо $Q \setminus \Pi_{2n-1}$. Построенные недавно вторым автором [6] подмножества Π_n , $n \in \mathbb{N}$, гильбертова куба Q играют в классах $\mathcal{P}_n$ проективных пространств ту же роль, какую играют гильбертов кирпич Q и гильбертово пространство ℓ_2 в классах метрических компактов и польских пространств: они топологически однородны и содержат замкнутую копию каждого пространства из соответствующего класса.

Мы докажем, в частности, что гиперпространство 2^X гомеоморфно пространству Π_2 тогда и только тогда, когда X – связное локально континуум связное коаналитическое пространство первой категории (теорема 2); и что 2^X гомеоморфно $Q \setminus \Pi_1$, если X – связное локально связное нигде не топологически полное коаналитическое пространство, содержащее всюду плотное абсолютное G_δ -множество $G \subset X$ так, что пересечение $G \cap U$ связно для любого связного открытого множества $U \subset X$ (теорема 3).

Мы получим также аналогичные результаты, касающиеся гиперпространств, гомеоморфных пространствам Π_{2n} и $Q \setminus \Pi_{2n-1}$ для $n \geq 1$ (см. теорему 5).

1. Некоторые предварительные сведения. Все рассматриваемые пространства предполагаются сепарабельными и метризуемыми, а отображения – непрерывными.

Обозначим через $\mathcal{M}_0$ класс всех метрических компактов и через $\mathcal{P}_n$, $n \geq 0$, классы проективных множеств, определяемые индуктивно: $\mathcal{P}_0$ – это класс всех пространств, гомеоморфных борелевским подмножествам гильбертова кирпича; для $n \geq 1$ $\mathcal{P}_{2n-1}$ – класс всех метризуемых непрерывных образов пространств класса $\mathcal{P}_{2n-2}$, и класс $\mathcal{P}_{2n}$ содержит дополнения в польских пространствах к множествам из класса $\mathcal{P}_{2n-1}$. Пространства из классов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ называются соответственно *аналитическими* и *коаналитическими*. Напомним, что *польским* называется любое топологически полное метрическое сепарабельное пространство.

Хорошо известно, что если X – топологически полное пространство, то таковым же является и гиперпространство 2^X . Согласно [7] для любого $n \geq 1$ гиперпространство 2^X принадлежит классу $\mathcal{P}_{2n}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{P}_{2n}$.

Отметим, что каждое отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает отображение $2^f: 2^X \rightarrow 2^Y$, действующее как $2^f(A) = f(A)$ для $A \in 2^X$. Напомним также, что для каждого X определено непрерывное отображение объединения $\cup_X: 2^{2^X} \rightarrow 2^X$.

Для симплицияльного комплекса N через $N^{(k)}$ мы обозначаем k -мерный остов N . Для симплекса $\sigma \in N$ через $|\sigma|$ обозначается его геометрическая реализация и через $\text{St}(\sigma) = \bigcup_{\tau \supset \sigma} |\tau|$ его замкнутая звезда. Отметим, что для симплексов $\tau, \sigma \in N$, если $\tau \subset \sigma$, то $\text{St}(\tau) \supset \text{St}(\sigma)$.

Пусть X – пространство с метрикой d . Замкнутое подмножество $A \subset X$ называется Z -множеством (сильным Z -множеством) в X , если для любой функции $\varepsilon: X \rightarrow (0, 1)$ существует такое отображение $f: X \rightarrow X$, что $d(f(x), x) < \varepsilon(x)$ для любого $x \in X$

и $f(X) \cap A = \emptyset$ ($\text{cl}_X f(X) \cap A = \emptyset$). Подмножество $A \subset X$ называется *локально гомотопически пренебрежимым в X* , если любое отображение $f: (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, X \setminus A)$ конечномерного куба в X можно равномерно аппроксимировать отображениями в $X \setminus A$, совпадающими с f на границе ∂I^k куба [8]. Хорошо известно, что замкнутое подмножество в ANR-пространстве является Z -множеством тогда и только тогда, когда оно локально гомотопически пренебрежимо. Вложение $f: A \rightarrow X$ называется *Z -вложением*, если его образ $f(A)$ – Z -множество в X ; Z_σ -множествами в X называются счетные объединения Z -множеств в X .

Пусть $Y \subset X$ и $C \subset K$ – две пары пространств. Пара (X, Y) называется *сильно (K, C) -универсальной*, если для любой функции $\varepsilon: X \rightarrow (0, 1)$, любого замкнутого подмножества $B \subset K$ и отображения $f: K \rightarrow X$, ограничение $f|_B: B \rightarrow X$ которого на B является Z -вложением с $(f|_B)^{-1}(Y) = B \cap C$, существует такое Z -вложение $\bar{f}: K \rightarrow X$, что $\bar{f}|_B = f|_B$, $\bar{f}^{-1}(Y) = C$ и $d(\bar{f}(x), f(x)) < \varepsilon(f(x))$ для любого $x \in K$. (Если пространство K компактно, то, очевидно, можно предполагать, что функция ε постоянна.)

Пару (X, Y) будем называть *(K, C) -универсальной* (соответственно *(K, C) -предуниверсальной*), если существует замкнутое вложение (соответственно совершенное отображение) $f: K \rightarrow X$ с $f^{-1}(Y) = C$. (Напомним, что совершенным называется любое замкнутое отображение с компактными прообразами точек.) Легко видеть, что пара (X, Y) (K, C) -предуниверсальна тогда и только тогда, когда пара $(X \times Q, Y \times Q)$ (K, C) -универсальна. Пара (X, Y) называется *всюду (K, C) -предуниверсальной*, если для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ пара $(U, U \cap Y)$ (K, C) -предуниверсальна. Очевидно, что любая сильно (K, C) -универсальная пара всюду (K, C) -предуниверсальна.

Пространство X называется *сильно C -универсальным* (соответственно *всюду C -предуниверсальным*), если пара (X, X) сильно (C, C) -универсальна (соответственно всюду (C, C) -предуниверсальна).

Пусть $\mathcal{C}$ – некоторый класс пространств. Пара (X, Y) называется *сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$ -универсальной* (соответственно *всюду $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$ -предуниверсальной*), если она сильно (K, C) -универсальна (соответственно всюду (K, C) -предуниверсальна) для любой пары (K, C) , где $\mathcal{C} \ni C \subset K \in \mathcal{M}_0$. Соответственно пространство X называется *сильно $\mathcal{C}$ -универсальным* (*всюду $\mathcal{C}$ -предуниверсальным*), если X сильно C -универсально (всюду C -предуниверсально) для любого пространства $C \in \mathcal{C}$.

В [9] доказано, что если $X \subset \ell_2$ – подмножество с локально гомотопически пренебрежимым дополнением в ℓ_2 , то из сильной $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$ -универсальности пары (ℓ_2, X) следует сильная $\mathcal{C}$ -универсальность пространства X .

В [6] для каждого $n \geq 1$ вторым автором была построена сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_n)$ -универсальная пара (Q, P_n) , топологическую характеристику которой дает следующая

ТЕОРЕМА А. *Пара (Q, X) гомеоморфна паре (Q, P_n) тогда и только тогда, когда*

- 1) $X \in \mathcal{P}_n$;
- 2) X содержится в Z_σ -множестве в Q ;
- 3) пара (Q, X) сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_n)$ -универсальна.

2. Локальная гомотопическая пренебрежимость в гиперпространствах.

Здесь и далее X – связное локально континуум связное сепарабельное метрическое нигде не локально компактное пространство и d – метрика на X , обладающая свойством

(*) для любых точек $x, y \in X$, если $d(x, y) < \varepsilon$, существует континуум K в X диаметра $< \varepsilon$, содержащий точки x и y .

Чтобы сконструировать такую метрику d , достаточно положить

$$d(x, y) = \inf \{ \text{diam}_{d_0}(K) \mid K \subset X - \text{континуум, содержащий точки } x \text{ и } y \},$$

где d_0 – любая метрика на X (см. [10, гл. VIII, § 9]).

Обозначим через X^* пополнение пространства X по метрике d , причем метрику на X^* будем обозначать той же буквой d . Пусть ρ – метрика Хаусдорфа на 2^{X^*} , определяемая для $A, B \in 2^{X^*}$ формулой

$$\rho(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A) \right\}.$$

Пусть $U = \{x \in X^* \mid x \text{ обладает локально компактной окрестностью}\}$ – множество точек локальной компактности пространства X^* . Очевидно, что множество U локально компактно и открыто в X^* , и поскольку пространство X нигде не локально компактно, дополнение $U \setminus X$ всюду плотно в U . Зафиксируем любое всюду плотное счетное подмножество $A \subset U \setminus X$ и положим $Y = X^* \setminus A$. Легко видеть, что пространство Y – польское и нигде не локально компактное.

ЛЕММА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любых точек $x, y \in X^*$ с $d(x, y) < \varepsilon$ существует континуум $K \subset X \cup \{x, y\}$ диаметра $< \varepsilon$, содержащий $\{x, y\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\eta = \frac{1}{4}(\varepsilon - d(x, y))$ и выберем две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ в X , сходящиеся к точкам x и y так, чтобы $d(x_n, x_{n+1}) < \eta/2^n$ и $d(y_n, y_{n+1}) < \eta/2^n$ для $n \geq 1$. Тогда $d(x, x_1) < \eta$, $d(y, y_1) < \eta$ и, следовательно,

$$d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1) < d(x, y) + 2\eta.$$

Пусть $K_0 \subset X$ – континуум диаметра $< d(x, y) + 2\eta$, содержащий точки x_1 и y_1 . Для каждого $n \geq 1$ найдем континуумы $K_n, K'_n \subset X$ диаметра $< \eta/2^n$, содержащие множества $\{x_n, x_{n+1}\}$ и $\{y_n, y_{n+1}\}$ соответственно. Тогда объединение

$$K = \{x, y\} \cup K_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n \cup K'_n)$$

является искомым континуумом, поскольку

$$\text{diam } K \leq \text{diam } K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam } K_n + \text{diam } K'_n) < d(x, y) + 2\eta + 2\eta \leq \varepsilon.$$

Из леммы 1 следует, что любое подмножество в X^* , содержащее X , связно и локально континуум связно, следовательно, Y – связное локально континуум связное польское нигде не локально компактное пространство. Тогда согласно [5] гиперпространство 2^Y гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2 .

ЛЕММА 2. *Гиперпространство 2^X имеет локально гомотопически пренебрежимое дополнение в 2^Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: I^k \rightarrow 2^Y$ – любое отображение с $f(\partial I^k) \subset 2^X$ и $\varepsilon > 0$. Наша цель – построить ε -близкое к f отображение $\bar{f}: I^k \rightarrow 2^X$ с $\bar{f}|_{\partial I^k} = f|_{\partial I^k}$.

Зафиксируем метрику d_1 на I^k и выберем триангуляцию N внутренности $I^k \setminus \partial I^k$ куба I^k настолько мелкую, чтобы для любого симплекса $\sigma \in N$ удовлетворялось условие

$$\text{diam } f(\sigma) < \frac{1}{6}\varepsilon_\sigma, \quad \text{где } \varepsilon_\sigma = \min\{\varepsilon, \inf\{d_1(x, \partial I^k) \mid x \in \overline{\text{St}}(\sigma)\}\}. \quad (1)$$

Поскольку X всюду плотно в Y , то для любой вершины $v \in N^{(0)}$ мы можем выбрать конечное множество $F_v \subset X$ так, чтобы

$$\rho(f(v), F_v) < \frac{1}{6}\varepsilon_v. \quad (2)$$

Пусть $\sigma = \langle v, u \rangle$ – 1-симплекс в N (здесь, как и в доказательстве леммы 7, 1-симплексы предполагаются ориентированными, т.е. запись $\sigma = \langle v, u \rangle$ означает, что v – первая вершина σ). Из условий (1), (2) следует, что

$$\rho(F_v, F_u) \leq \rho(F_v, f(v)) + \rho(f(v), f(u)) + \rho(f(u), F_u) < \frac{1}{6}\varepsilon_v + \frac{1}{6}\varepsilon_\sigma + \frac{1}{6}\varepsilon_u \leq \frac{3}{6}\varepsilon_\sigma.$$

Значит, для каждой точки $y \in F_v$ существует точка $z \in F_u$ с $d(y, z) < \varepsilon_\sigma/2$ и наоборот. По выбору метрики d отсюда вытекает, что существует конечное семейство $\mathcal{K}_\sigma$ континуумов в X диаметра $< \varepsilon_\sigma/2$, удовлетворяющих условиям: $F_v \cup F_u \subset \bigcup \mathcal{K}_\sigma$ и $F_v \cap A \neq \emptyset$, $F_u \cap A \neq \emptyset$ для любого $A \in \mathcal{K}_\sigma$. Поскольку гиперпространство любого континуума линейно связно [11], то для каждого континуума $A \in \mathcal{K}_\sigma$ существует путь $\alpha_A: [0, 1] \rightarrow 2^A$, начинающийся в $A \cap F_v$ и заканчивающийся в $A \cap F_u$. Тогда $\alpha^\sigma = \bigcup_{A \in \mathcal{K}_\sigma} \alpha_A: [0, 1] \rightarrow 2^X$ – путь в 2^X диаметра $< \varepsilon_\sigma/2$, начинающийся в F_v и заканчивающийся в F_u . Определим отображение $g: \sigma \rightarrow 2^X$, полагая для $y = (1-t)v + tu \in \sigma$

$$g(y) = \begin{cases} F_v \cup \alpha^\sigma(2t), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha^\sigma(2t-1) \cup F_u, & \text{если } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Выполняя эту операцию для каждого 1-симплекса в N , мы построим отображение $g: N^{(1)} \rightarrow 2^X$ одномерного остова N , обладающее свойствами: $g(v) = F_v$ для любой вершины $v \in N^{(0)}$ и

$$\text{diam } g(\sigma) < \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma \quad (3)$$

для каждого 1-симплекса $\sigma \in N^{(1)}$.

Согласно условиям (1)–(3), если $\sigma = \langle v, u \rangle$ – ребро симплекса τ в N , то для любых $x \in \tau$ и $y \in \sigma$

$$\rho(f(x), g(y)) \leq \rho(f(x), f(v)) + \rho(f(v), F_v) + \rho(F_v, g(y)) < \frac{1}{6}\varepsilon_\tau + \frac{1}{6}\varepsilon_v + \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma < \varepsilon_\tau. \quad (4)$$

Пусть $r: N \rightarrow 2^{N^{(1)}}$ – непрерывное отображение, тождественное на $N^{(1)}$ и такое, что $r(\tau) \subset 2^{\tau^{(1)}}$ для любого симплекса τ в N (см. [12]). Тогда из (4) следует, что отображение $h: N \rightarrow 2^X$, определенное формулой $h(x) = \bigcup\{g(y) \mid y \in r(x)\}$, удовлетворяет условию

$$\rho(f(x), h(x)) < \varepsilon_\tau \leq \min\{\varepsilon, d_1(x, \partial I^k)\} \quad \text{для любого } x \in \tau \in N,$$

и, следовательно, может быть продолжено до непрерывного ε -близкого к f отображения $\bar{f}: I^k \rightarrow 2^X$ со свойством $\bar{f}|_{\partial I^k} = f|_{\partial I^k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку каждое Z -множество в $2^Y \cong \ell_2$ является сильным Z -множеством в 2^Y , из следствия 1 вытекает, что каждое Z -множество в 2^X – сильное.

Напомним, что пространства, представляющиеся в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств, называются *пространствами первой категории*.

ЛЕММА 3. Если X – связное локально континуум связное пространство первой категории, то гиперпространство 2^X является счетным объединением сильных Z -множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $X = \bigcup_{p=1}^{\infty} X_p$, где каждое X_p – замкнутое нигде не плотное подмножество в X . Для $p, q \geq 1$ положим

$$Z_{p,q} = \left\{ K \in 2^X \mid \exists x \in K \text{ с } \left\{ x' \in K \mid d(x, x') < \frac{1}{q} \right\} \subset X_p \right\}.$$

Легко видеть, что множества $Z_{p,q}$ замкнуты в 2^X . Кроме того, из теоремы Бэра следует, что $2^X = \bigcup_{p,q=1}^{\infty} Z_{p,q}$.

Доказательство того, что каждое множество $Z_{p,q}$ локально гомотопически пренебрежимо в 2^X , буквально повторяет доказательство леммы 2, за исключением двух дополнительных условий:

- а) $\varepsilon < 1/q$,
- б) $F_v \cap X_p = \emptyset$ для любой вершины $v \in N^{(0)}$.

ЛЕММА 4. Пусть X содержит всюду плотное абсолютное G_δ -множество $G \subset X$ так, что пересечение $U \cap G$ связно для любого связного открытого множества $U \subset X$. Тогда 2^G – абсолютное G_δ -множество с локально гомотопически пренебрежимым дополнением в 2^X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы следует, что польское пространство G связно и локально связно и как следствие локально линейно связно (см. [13, гл. II, § 45]). Тогда для любых точек $x, y \in G$ пересечение $B(x, \varepsilon) \cap G$ открытого ε -шара с G линейно связно, и, следовательно, содержит путь диаметра $< 2\varepsilon$, соединяющий точки x и y . Теперь доказательство локальной гомотопической пренебрежимости дополнения $2^X \setminus 2^G$ проводится совершенно аналогично, как и в лемме 2.

3. Сильная универсальность гиперпространств. В этом пункте пространства $X \subset Y$ такие же, как в предыдущем.

ЛЕММА 5. Пусть M – компакт в Y , $x_0 \in M \cap X$ и $\eta > 0$. Тогда X содержит компакт $L = \{y\} \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n)$, удовлетворяющий условиям:

- 1) $\text{diam } L < \eta$;
- 2) $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ – последовательность континуумов в X , сходящаяся к $\{y\}$;
- 3) $x_0 \in M \cap L = M \cap L_0$;
- 4) $L_n \cap L_{n+1} \neq \emptyset$ для любого $n \geq 0$;
- 5) $L_n \cap (\{y\} \cup \bigcup_{k=n+2}^{\infty} L_k) = \emptyset$ для любого $n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространство Y нигде не локально компактно, открытый $\eta/2$ -шар $B \subset Y$ с центром x_0 содержит точку $y \in X \setminus M$. По выбору метрики на Y шар B – связное локально связное польское пространство. Согласно [13] B – линейно связное пространство, и, следовательно, содержит дугу D , соединяющую точки

x_0 и y . Запишем $D = \{y\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$, где $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность дуг, сходящихся к $\{y\}$, и удовлетворяющая условиям: $x_0 \in D_0$, $M \cap D \subset D_0$, $y \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ и $D_n \cap D_m \neq \emptyset$ – тогда и только тогда, когда $|n - m| \leq 1$. Локальная связность пространства Y позволяет для каждого n найти открытую связную окрестность U_n дуги D_n . Причем множества U_n можно выбрать настолько маленькими, чтобы они сходились к y , и для любых $n, m \geq 0$ $M \cap U_{n+1} = \emptyset$, $y \notin U_n$ и $U_n \cap U_m \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $|n - m| \leq 1$. Поскольку $U_n \cap U_{n+1} \supset D_n \cap D_{n+1} \neq \emptyset$, мы можем найти для каждого $n \geq 0$ точку x_{n+1} в пересечении $U_n \cap U_{n+1} \cap X$. Из леммы 1 следует, что пересечение любого открытого шара с X континуум связно, откуда следует, что континуум связным является пересечение $X \cap U$ для любого открытого связного множества $U \subset Y$. Поэтому, для каждого $n \geq 0$ мы можем найти континуум L_n в $U_n \cap X$, содержащий точки x_n и x_{n+1} . Легко убедиться, что компакт $L = \{y\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ удовлетворяет условиям 1)–5).

Для компакта K через $\text{Con}(K) = [0, 1] \times K \setminus \{0\} \times K$ обозначим конус над K , через w – его вершину и через $[t, x] \in \text{Con}(K)$ – образ точки $(t, x) \in [0, 1] \times K$ при факторизации $[0, 1] \times K \rightarrow \text{Con}(K)$.

ЛЕММА 6. Пусть K – метрический компакт, M – компакт в Y , $x_0 \in M \cap X$ и $\eta > 0$. Тогда существуют компакт $L \subset X$ диаметра $< \eta$, содержащий точку x_0 , и непрерывное отображение $\xi: \text{Con}(K) \rightarrow 2^L$, обладающее свойствами

- i) $\xi(w) = \{x_0\}$;
- ii) если для точек $q, q' \in K$ существуют такие числа $t_1, \dots, t_r, t'_1, \dots, t'_{r'} \in [0, 1]$ с $t_1 = 1$ и компакты $A, A' \subset M$, что

$$A \cup \bigcup_{i=1}^r \xi([t_i, q]) = A' \cup \bigcup_{i=1}^{r'} \xi([t'_i, q']),$$

то $q = q'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать лемму для случая, когда K – гильбертов куб Q . Пусть $L = \{y\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ – компакт, удовлетворяющий условиям 1)–5) предыдущей леммы. Поскольку гиперпространство любого континуума линейно связно, мы можем найти непрерывную функцию $w: I \rightarrow 2^L$ с $w(0) = \{x_0\}$, $w(1) = \{y\}$, ограничение которой на каждый отрезок $[1 - 2^{-n}, 1 - 2^{-(n+1)}]$, $n \geq 0$, является дугой в 2^{L_n} с концами $\{x_n\} = w(1 - 2^{-n})$ и $\{x_{n+1}\}$.

Рассмотрим отображение $\alpha: Q \rightarrow 2^I$, определенное для $q = (q_n) \in Q = [0, 1]^\omega$ через

$$\alpha(q) = \{1\} \cup \{1 - 2^{-(2n+1)}(1 + q_n) \mid n \geq 1\}.$$

Пусть $\beta = \cup_L \circ 2^w \circ \alpha: Q \rightarrow 2^L$. Из выбора отображения w и того, что $L_{2n} \cap L_{2n'} = \emptyset$, если $n \neq n'$, следует, что для $n \geq 1$ $\beta(q) \cap L_{2n} = w(1 - 2^{-(2n+1)}(1 + q_n))$, откуда вытекает, что

- 1) если $\beta(q) \cap L_{2n} = \beta(q') \cap L_{2n}$ для любых $q, q' \in Q$, то $q_n = q'_n$.

Пусть $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ – разбиение множества натуральных чисел на бесконечное число бесконечных непересекающихся множеств. Для каждого $q = (q_k)_{k=1}^{\infty} \in Q$ положим

$f(q) = (f_n(q))_{n=1}^{\infty} \in Q$, где $f_n(q) = q_k$, если $n \in N_k$. Легко видеть, что отображение $h: \text{Con}(Q) \rightarrow 2^I$, определенное формулой

$$h([t, q]) = (\alpha(f(q)) \cap [0, t]) \cup \{t\},$$

непрерывно. Положим, наконец, $\xi = \cup_L \circ 2^w \circ h: \text{Con}(Q) \rightarrow 2^L$.

Покажем, что функция ξ удовлетворяет условиям леммы. Из определения функции ξ следует, что

- 2) $y \in \xi([t, q])$ тогда и только тогда, когда $t = 1$;
- 3) если $t < 1$, то $\xi([t, q]) \cap L_{2n} = \emptyset$ для достаточно больших n .

Очевидно, что $h(w) = \{0\}$ и, таким образом, $\xi(w) = \{x_0\}$. Предположим теперь, что $q, q', t_1, \dots, t_r, t'_1, \dots, t'_r$, A и A' удовлетворяют условию ii) леммы. Поскольку $y \notin M$, из условия 2) и равенства $A \cup \bigcup_{i=1}^r \xi([t_i, q]) = A' \cup \bigcup_{i=1}^r \xi([t'_i, q'])$ следует существование i' с $t'_{i'} = 1$. Тогда, поскольку $M \cap L_n = \emptyset$ для каждого $n \geq 1$, условие 3) гарантирует, что пересечение множества $A \cup \bigcup_{i=1}^r \xi([t_i, q])$ с L_{2n} для достаточно больших n равно, с одной стороны, $\xi([1, x]) \cap L_{2n}$, а с другой стороны, $-\xi([1, x']) \cap L_{2n}$. Поскольку $\xi([1, x]) = \beta(f(x))$, из 1) следует, что $f_n(q) = f_n(q')$ для достаточно больших n . Поскольку для каждого $k \geq 1$ существует как угодно большое n с $x_k = f_n(x) = f_n(x') = x'_k$, мы получаем, что $x = x'$.

Следующая лемма является ключевой в доказательстве основных результатов данной статьи.

ЛЕММА 7. Пусть K – метрический компакт и $C \subset K$ – его подмножество. Пара $(2^Y, 2^X)$ сильно (K, C) -универсальна тогда и только тогда, когда она всюду (K, C) -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Чтобы доказать достаточность, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и отображение $f: K \rightarrow 2^Y$, ограничение $f|_B: B \rightarrow 2^Y$ которого на замкнутое подмножество $B \subset K$ является Z -вложением с $(f|_B)^{-1}(2^X) = B \cap C$.

Наша цель – построить Z -вложение $g: K \rightarrow 2^Y$, которое удовлетворяет условиям $\rho(f, g) < \varepsilon$, $g|_B = f|_B$ и $g^{-1}(2^X) = C$. Поскольку $f(B)$ – Z -множество в ANR -пространстве 2^Y , заменяя если необходимо f достаточно близким отображением, можно предполагать, что $f(K \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$ и отображение $f|_{K \setminus B}$ пропускается через счетный локально-конечный симплициальный комплекс N , т.е. существуют отображения $\pi: K \setminus B \rightarrow N$ и $\mu: N \rightarrow 2^Y$ с $f|_{K \setminus B} = \mu \circ \pi$. Более того, мы можем считать, что отображение π сюръективно [14].

Для каждого симплекса σ в N положим

$$\varepsilon_\sigma = \min \left\{ \varepsilon, \frac{1}{3} \inf \{ \rho(\mu(y), f(B)) \mid y \in \overline{\text{St}}(\sigma) \} \right\} > 0.$$

Мы предполагаем, что триангуляция комплекса N настолько мелкая, что

$$\text{diam } f(\sigma) < \frac{1}{6} \varepsilon_\sigma$$

для любого симплекса σ в N .

Отметим, что для любого $\eta > 0$ множество $\{y \in N \mid \rho(\mu(y), f(B)) \geq \eta\}$ компактно. Предполагая противное, мы найдем бесконечное дискретное подмножество $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$

с $\rho(\mu(y_n), f(B)) \geq \eta$. Используя сюръективность отображения $\pi: K \setminus B \rightarrow N$, для каждого $n \geq 1$ выберем точку $x_n \in K \setminus B$ с $\pi(x_n) = y_n$. В силу компактности K можно считать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x_0 \in K$, которая с необходимостью принадлежит B , поскольку в противном случае последовательность $\{y_n\}$ сходилась бы к точке $\pi(x_0) \in N$ и не была бы дискретной. Но тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0) \in f(B)$. Поскольку $f(x_n) = \mu(y_n)$, получаем противоречие с $\rho(\mu(y_n), f(B)) \geq \eta > 0, n \geq 1$.

Компактность множеств $\{y \in N \mid \rho(\mu(y), f(B)) \geq \eta\}$ позволяет выбрать последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ конечных подкомплексов N так, чтобы для любого $k \geq 1$ выполнялись условия:

$$\text{для любого симплекса } \sigma \text{ в } N_k \quad \overline{\text{St}}(\sigma) \subset \text{Int } N_{k+1}; \quad (5)$$

$$\sup\{\rho(\mu(y), f(B)) \mid y \notin N_{k+1}\} < \frac{1}{3} \inf\{\rho(\mu(y), f(B)) \mid y \in N_k\}. \quad (6)$$

Положим $N_k = \emptyset$ для $k \leq 0$. Для каждой вершины v комплекса N выберем конечное подмножество $F_v \subset X$ с

$$\rho(\mu(v), F_v) < \frac{1}{6}\varepsilon_v.$$

Поскольку X не имеет изолированных точек, мы можем считать, что множества F_v попарно не пересекаются и содержат не менее двух точек. Зафиксируем в каждом множестве F_v две различные точки a_v и b_v . Для каждой вершины $v \in N^{(0)}$ найдем $k \geq 1$ с $v \in N_k^{(0)} \setminus N_{k-1}^{(0)}$ и положим

$$B_v = \left\{ y \in Y \mid d(y, a_v) < \min\left\{ \frac{1}{6}\varepsilon_v, d(a_v, b_{v'}) \mid v' \in N_{k+2}^{(0)} \right\} \right\}. \quad (7)$$

Поскольку пара $(2^Y, 2^X)$ всюду (K, C) -предуниверсальна и 2^{B_v} – открытое подмножество в 2^Y , существует отображение $\varphi: K \rightarrow 2^{B_v}$ с $\varphi^{-1}(2^{B_v \cap X}) = C$. Так как открытый шар B_v является связным локально континуум связным пространством, гиперпространство 2^{B_v} – абсолютный ретракт [4]. Следовательно, отображение φ может быть продолжено до отображения $\varphi^v: \text{Con}(K) \rightarrow 2^{B_v}$ с $\varphi^v(w) = \{a_v\}$ (мы отождествляем компакт K с основой $\{1\} \times K$ конуса $\text{Con}(K)$). Поскольку множество 2^X имеет локально гомотопически пренебрежимое дополнение в 2^Y , можно дополнительно предполагать, что $\varphi^v(\text{Con}(K) \setminus K) \subset 2^X$.

Как в доказательстве леммы 2, для каждого 1-симплекса $\sigma = \langle v, u \rangle$ в N найдем конечное семейство $\mathcal{H}_\sigma$ континуумов в X диаметра $< \varepsilon_\sigma/2$ так, чтобы $F_v \cup F_u \subset \bigcup \mathcal{H}_\sigma$ и для каждого $A \in \mathcal{H}_\sigma$ $A \cap F_v \neq \emptyset$ и $A \cap F_u \neq \emptyset$. Для каждого континуума $A \in \mathcal{H}_\sigma$ зафиксируем путь $\alpha_A: [0, 1] \rightarrow 2^A$, начинающийся в $F_v \cap A$ и заканчивающийся в $F_u \cap A$, и положим

$$\alpha^\sigma = \bigcup_{A \in \mathcal{H}_\sigma} \alpha_A: [0, 1] \rightarrow 2^X.$$

Легко видеть, что α^σ – путь диаметра $< \varepsilon_\sigma/2$, соединяющий множества F_v и F_u .

Для каждого $k \geq 1$ и каждой вершины $v \in N_k^{(0)} \setminus N_{k-1}^{(0)}$ положим

$$M_v = \bigcup \{\mathcal{H}_\sigma \mid \sigma \in N_{k+2}^{(1)}\}.$$

Применяя лемму 6 к $M = M_v$, $x_0 = b_v$ и $\eta_v > 0$, мы найдем компакт $L_v \subset X$ и функцию $\xi^v: \text{Con}(K) \rightarrow 2^{L_v}$, удовлетворяющую условиям леммы 6. Выбирая число η_v достаточно маленьким, мы можем добиться, чтобы

$$\text{diam } L_v < \frac{1}{6}\varepsilon_v; \quad (8)$$

$$\text{если } v \in N_k^{(0)} \setminus N_{k-1}^{(0)}, \text{ то } L_v \cap \left(\bigcup \{ \bigcup \varphi^{v'}(\text{Con}(K)) \mid v' \in N_{k+2}^{(0)} \setminus N_{k-2}^{(0)} \} \right) = \emptyset; \quad (9)$$

$$\text{если } v \in N_k^{(0)} \setminus N_{k-1}^{(0)} \text{ и } v \neq v' \in N_{k+2}^{(0)} \setminus N_{k-2}^{(0)}, \text{ то } L_v \cap L_{v'} = \emptyset. \quad (10)$$

Отметим, что из условия (8) следует, что

$$\text{diam } \xi^v(\text{Con}(K)) < \frac{1}{6}\varepsilon_v. \quad (11)$$

Пусть $C(K, 2^Y)$ – пространство всех непрерывных функций из K в 2^Y , наделенное компактно-открытой топологией. Для компакта $D \in 2^Y$ через $\theta(D) \in C(K, 2^Y)$ обозначим постоянную функцию, отображающую каждую точку K на D ; для функций $\Phi, \Psi \in C(K, 2^Y)$ пусть $\Phi \cup \Psi \in C(K, 2^Y)$ – поточечное объединение Φ и Ψ ; символ $\Phi \subset \Psi$ означает, что $\Phi(x) \subset \Psi(x)$ для любого $x \in K$.

Мы сопоставим каждой точке $z \in N$ функцию $\Phi(z) \in C(K, 2^Y)$ следующим образом: для каждой вершины $v \in N^{(0)}$ положим

$$\Phi(v) = \theta(F_v) \cup \varphi_1^v \cup \xi_1^v,$$

где для $0 \leq t \leq 1$ $\varphi_t^v: K \rightarrow 2^Y$ (соответственно $\xi_t^v: K \rightarrow 2^Y$) – функция, определенная через $\varphi_t^v(x) = \varphi^v([t, x])$ (соответственно $\xi_t^v(x) = \xi^v([t, x])$). Если $\sigma = \langle v, u \rangle$ – 1-симплекс в N и $z = (1-t)v + tu$, то

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi_1^v \cup \xi_1^v \cup \theta(F_v) \cup \alpha^\sigma(4t), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}; \\ \varphi_1^v \cup \xi_1^v \cup \theta(F_v) \cup \theta(F_u) \cup \varphi_{4t-1}^u \cup \xi_{4t-1}^u, & \text{если } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \varphi_{3-4t}^v \cup \xi_{3-4t}^v \cup \theta(F_v) \cup \theta(F_u) \cup \varphi_1^u \cup \xi_1^u, & \text{если } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}; \\ \alpha^\sigma(4t-3) \cup \theta(F_u) \cup \varphi_1^u \cup \xi_1^u, & \text{если } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что определенное таким образом отображение $\Phi: N^{(1)} \rightarrow C(K, 2^Y)$ непрерывно. Пусть $r: N \rightarrow 2^{N^{(1)}}$ – непрерывное отображение, тождественное на $N^{(1)}$ и ставящее в соответствие каждой точке z симплекса $\tau \in N$ конечное множество $r(z) \subset \tau^{(1)}$ (см. [12]). Продолжим Φ до отображения из N в $C(K, 2^Y)$, полагая

$$\Phi(z) = \bigcup \{ \Phi(y) \mid y \in r(z) \}, \quad z \in N.$$

Тогда отображение $\Psi: N \times K \rightarrow 2^Y$, определенное формулой

$$\Psi(z, x) = \Phi(z)(x), \quad (z, x) \in N \times K,$$

непрерывно.

Покажем, что

$$\rho(\mu(z), \Psi(z, x)) < \min \left\{ \varepsilon, \frac{1}{3} \rho(\mu(z), f(B)) \right\} \quad \forall (z, x) \in N \times K. \quad (12)$$

Чтобы доказать этот факт, отметим сперва, что из (7) и (11) следует, что

$$\rho(F_v, \Psi(v, x)) < \frac{\varepsilon_v}{6}$$

для любой вершины $v \in N^{(0)}$. Если $\sigma = \langle v, u \rangle$ – 1-симплекс в N и $y \in \sigma$, то по определению функции $\Phi(y)$

$$\rho(F_v, \Psi(y, x)) < \max\left\{\frac{1}{6}\varepsilon_v, \text{diam } \alpha^\sigma + \frac{1}{6}\varepsilon_u\right\} \leq \frac{3}{6}\varepsilon_\sigma + \frac{1}{6}\varepsilon_u \leq \frac{4}{6}\varepsilon_\sigma.$$

Теперь для любого $z \in N$ найдем симплекс $\tau \ni z$ в N . Тогда для любого $y \in r(z) \subset \tau^{(1)}$ существует вершина $v \in \tau^{(0)}$ с $\rho(F_v, \Psi(y, x)) < 4\varepsilon_\tau/6$, откуда

$$\begin{aligned} \rho(\mu(z), \Psi(y, x)) &\leq \rho(\mu(z), \mu(v)) + \rho(\mu(v), F_v) + \rho(F_v, \Psi(y, x)) \\ &< \frac{1}{6}\varepsilon_\tau + \frac{1}{6}\varepsilon_v + \frac{4}{6}\varepsilon_\tau \leq \varepsilon_\tau \leq \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{3}\rho(\mu(z), f(B))\right\}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Psi(z, x)$ является объединением множеств $\Psi(y, x)$ с $y \in r(z)$, из определения метрики Хаусдорфа следует условие (12).

Определим отображение $g: K \rightarrow 2^Y$ формулой

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in B; \\ \Psi(\pi(x), x), & \text{если } x \in K \setminus B. \end{cases}$$

Поскольку $f|_{K \setminus B} = \mu \circ \pi$, из условия (12) следует

$$\rho(f(x), g(x)) < \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{3}\rho(f(x), f(B))\right\}, \quad x \in K \setminus B,$$

что дает нам непрерывность отображения g и $g(K \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$. Поскольку $g|_B = f|_B$ и $(f|_B)^{-1}(2^X) = B \cap C$, то для доказательства равенства $g^{-1}(2^X) = C$ достаточно проверить, что $(g|_{K \setminus B})^{-1}(2^X) = C \cap (K \setminus B)$. Зафиксируем точку $x \in K \setminus B$ и положим $z = \pi(x)$ и $y \in r(z)$. По конструкции функции $\Phi(y)$ существует вершина $v \in N^{(0)}$ с $\Phi(y) \supset \Phi(v) \supset \varphi_1^v$. Если $x \notin C$, то $\varphi_1^v(x)$ не содержится в X , следовательно, $g(x) = \Psi(z, x) \supset \varphi_1^v(x)$ тоже не содержится в X . Если же $x \in C$, то $\varphi_t^u(x) \subset X$ для любой вершины $u \in N^{(0)}$ и любого $t \in [0, 1]$. Поскольку компакты L_u , $\alpha^\sigma(t)$, F_u суть подмножества X , то $g(x) \subset \Phi(z, x) \subset X$. Таким образом, $g^{-1}(2^X) = C$.

Поскольку $g|_B = f|_B$ – вложение и $g(K \setminus B) \cap g(B) = \emptyset$, то чтобы доказать, что $g: K \rightarrow 2^Y$ – вложение, достаточно проверить инъективность отображения $g|_{K \setminus B}$. Пусть x_1, x_2 – две точки в $K \setminus B$ с $g(x_1) = g(x_2)$. Для $j = 1, 2$ положим $z_j = \pi(x_j)$, откуда $g(x_j) = \Psi(z_j, x_j)$, и выберем k_j так, чтобы $z_j \in N_{k_j} \setminus N_{k_j-1}$. Тогда $|k_1 - k_2| \leq 1$. Предположив противное, для определенности $k_1 < k_2 - 1$, и используя условие (12), заключаем, что

$$\begin{aligned} \rho(g(x_1), f(B)) &= \rho(\Psi(z_1, x_1), f(B)) \geq \rho(\mu(z_1), f(B)) - \rho(\mu(z_1), \Psi(z_1, x_1)) \\ &> \frac{2}{3}\rho(\mu(z_1), f(B)). \end{aligned}$$

Тогда из (6) и (12) мы получаем

$$\begin{aligned}\rho(g(x_2), f(B)) &= \rho(\Psi(z_2, x_2), f(B)) \leq \rho(\Psi(z_2, x_2), \mu(z_2)) + \rho(\mu(z_2), f(B)) \\ &< \frac{4}{3}\rho(\mu(z_2), f(B)) < \frac{4}{9}\rho(\mu(z_1), f(B)) < \frac{2}{3}\rho(g(x_1), f(B)),\end{aligned}$$

но это противоречит равенству $g(x_1) = g(x_2)$.

Поэтому можно предполагать, что либо $k_2 = k_1$, либо $k_2 = k_1 + 1$. Пусть τ_j – минимальный симплекс в N_{k_j} , содержащий z_j . Поскольку $k_1 \leq k_2 \leq k_1 + 1$ и $z_j \in N_{k_j} \setminus N_{k_j-1}$, условие (5) гарантирует, что $\tau_1 \cup \tau_2 \subset N_{k_1+2} \setminus N_{k_1-2}$. Пусть $y_1 \in r(x_1)$ и v_1 – вершина τ_1 такая, что $\Phi(y_1)$ содержит $\Phi(v_1) \supset \xi_1^{v_1}$. Поскольку $\tau_1 \cup \tau_2 \subset N_{k_1+2} \setminus N_{k_1-2}$, условие (9) гарантирует, что $L_{v_1} \cap (\cup \varphi^v(\text{Con}(K))) = \emptyset$ для любой вершины $v \in \tau_1^{(0)} \cup \tau_2^{(0)}$. Из определения отображения Φ и условия (10) следует, что $L_{v_1} \cap g(x_1) = L_{v_1} \cap \Psi(z_1, x_1)$ – объединение подмножества, лежащего в M_{v_1} , и конечного числа множеств вида $\xi^{v_1}([t_i, x_1])$, где как минимум одно t_i равно 1. Аналогично, $L_{v_1} \cap g(x_2)$ – объединение подмножества, лежащего в M_{v_1} , и конечного числа множеств вида $\xi^{v_1}([t'_i, x_2])$. Поскольку $g(x_1) = g(x_2)$, $L_{v_1} \cap g(x_1) = L_{v_1} \cap g(x_2)$, откуда, применяя лемму 6, получаем, что $x_1 = x_2$.

Таким образом, g – вложение компакта в гиперпространство $2^Y \cong \ell_2$. Поскольку каждый компакт в ℓ_2 является Z -множеством, g – Z -вложение.

4. Предуниверсальность гиперпространств. Обозначим через $\mathbb{Q}$ пространство рациональных чисел; пространства $X \subset Y$ – такие же, как и в предыдущих пунктах.

ЛЕММА 8. Пусть K – компакт и $C \subset K$. Если пара $(2^Y, 2^X)$ $(K, K \setminus C)$ -предуниверсальна, то для любого открытого отображения $f: K \rightarrow f(K)$ пара $(2^Y, 2^X)$ $(f(K), f(K) \setminus f(C))$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: K \rightarrow 2^Y$ – отображение с $\varphi^{-1}(2^X) = K \setminus C$. Поскольку отображение $f: K \rightarrow f(K)$ открыто, “обратное” ему $f^{-1}: f(K) \rightarrow 2^K$ непрерывно. Тогда непрерывным является также отображение $\psi = \cup_Y \circ 2^\varphi \circ f^{-1}: f(K) \rightarrow 2^Y$ (напомним, что $\cup_Y: 2^{2^Y} \rightarrow 2^Y$ – отображение объединения). Непосредственно проверяется, что $\psi^{-1}(2^X) = f(K) \setminus f(C)$, т.е. пара $(2^Y, 2^X) - (f(K), f(K) \setminus f(C))$ -предуниверсальна.

ЛЕММА 9. Если пространство X $\mathbb{Q}$ -предуниверсально, то пара $(2^Y, 2^X)$ является $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_2)$ -предуниверсальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем компакт K и его коаналитическое подмножество $C \subset K$. Обозначив через $D = \{0, 1\}^\omega$ канторов дисконтинуум, отметим, что естественная проекция $\text{pr}_K: K \times D \rightarrow K$ является открытым отображением. Поскольку множество $K \setminus C$ аналитическое, существует G_δ -множество $P \subset K \times D$ такое, что $\text{pr}_K(P) = K \setminus C$ [15, гл. IV, § 34].

Лемма 9 следует из леммы 8, если доказать, что пара $(2^Y, 2^X)$ $(K \times D, K \times D \setminus P)$ -предуниверсальна. Введем обозначения: $I = [0, 1]$, $\omega_0 = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ – сходящаяся последовательность в I , $Q = I^\omega$ и $\sigma = \{(t_i) \in Q \mid t_i \neq 0 \text{ для почти всех } i\}$. Через $\mathcal{A}_1$ обозначим класс σ -компактных пространств. Поскольку пара (Q, σ) $(\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$ -предуниверсальна (см., например, [16, 5.4]) и $(K \times D, K \times D \setminus P) \in (\mathcal{M}_0, \mathcal{A}_1)$, для доказательства $(K \times D, K \times D \setminus P)$ -предуниверсальности пары $(2^Y, 2^X)$ достаточно доказать ее (Q, σ) -предуниверсальность.

Рассмотрим отображение $\chi: Q \rightarrow 2^Q$, ставящее в соответствие точке $(t_i) \in Q$ куб $\prod_{i=1}^{\infty} [0, t_i]$. Легко видеть, что $\chi(\sigma) \in 2^\sigma$ и для любого $q \in Q \setminus \sigma$ $\chi(q) \cap (\omega_0^\omega \setminus \sigma) \neq \emptyset$. Отметим, что компакт ω_0^ω гомеоморфен канторовому кубу (как нульмерный компакт без изолированных точек), а $\omega_0^\omega \cap \sigma$ – счетное всюду плотное подмножество в ω_0^ω .

Пусть $f: Q \rightarrow X$ – совершенное отображение. Поскольку каждый компакт в Q нигде не плотен, образ $Z = f(Q)$ является счетным пространством без изолированных точек, и значит, Z гомеоморфно Q . Согласно [17] существует такой компакт $F \subset Y$, гомеоморфный канторовому кубу, что $F \cap Z = F \cap X$ – всюду плотное (счетное) подмножество в F . Согласно [18] существует гомеоморфизм пар $h: (\omega_0^\omega, \omega_0^\omega \cap \sigma) \rightarrow (F, F \cap X)$. Поскольку гиперпространство 2^Y – абсолютный ретракт и 2^X – подмножество с локально гомотопически пренебрежимым дополнением в 2^Y , гомеоморфизм $h: \omega_0^\omega \rightarrow F \subset Y \subset 2^Y$ продолжается до такого отображения $g: Q \rightarrow 2^Y$, что $g(Q \setminus \omega_0^\omega) \subset 2^X$ [8, 2.4]. Отметим, что $g(\sigma) \subset 2^X$ и $g(\omega_0^\omega \setminus \sigma) \subset F \setminus X \subset 2^Y \setminus 2^X$. Покажем, что отображение $\xi: \cup_Y \circ 2^g \circ \chi: Q \rightarrow 2^Y$ искомое, т.е. $\xi^{-1}(2^X) = \sigma$. Действительно, если $q \in \sigma$, то $\chi(q) \in 2^\sigma$ и, следовательно, $\xi(q) = \cup_Y \circ 2^g \circ \chi(q) \in 2^X$. Если же $q \in Q \setminus \sigma$, то существует точка $a \in \chi(q) \cap (\omega_0^\omega \setminus \sigma)$. Следовательно, $\xi(q) = \cup_Y \circ 2^g \circ \chi(q) \ni h(a) \in Y \setminus X$, т.е. $\xi(q) \notin 2^X$. Таким образом, пара $(2^Y, 2^X)$ (Q, σ) -предуниверсальна.

Для $n \geq 0$ и класса $\mathcal{C}$ пространств через $\mathcal{C}(n)$ обозначим подкласс $\mathcal{C}$, состоящий из пространств размерности $\leq n$.

ЛЕММА 10. Пусть $n \geq 1$. Если пространство 2^X $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсально, то пара $(2^Y, 2^X)$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_{2n+2})$ -предуниверсальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва, что $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсальность пространства 2^X влечет $(\mathcal{M}_0(1), \mathcal{P}_{2n-1}(1))$ -предуниверсальность пары $(2^Y, 2^X)$. Зафиксируем 1-мерный компакт K и подмножество $C \subset K$ класса $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$. Обозначим через $Q = \{0, 1\}^\omega \cap \sigma$ множество рациональных чисел в канторовом кубе. Поскольку пространство 2^X $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсально, существует совершенное отображение $f: C \times \{0, 1\}^\omega \cup K \times Q \rightarrow 2^X$. По теореме Лаврентьева оно продолжается до отображения $\bar{f}: G \rightarrow 2^Y$ некоторого G_δ -множества $G \subset K \times \{0, 1\}^\omega$, содержащего $C \times \{0, 1\}^\omega \cup K \times Q$. Поскольку отображение f совершенно, имеем $\bar{f}^{-1}(2^X) = C \times \{0, 1\}^\omega \cup K \times Q$ [19]. Так как дополнение $K \times \{0, 1\}^\omega \setminus G$ σ -компактно, его проекция $\text{pr}(K \times \{0, 1\}^\omega \setminus G)$ на $\{0, 1\}^\omega$ тоже σ -компактна и содержится в $\{0, 1\}^\omega \setminus Q$. Поскольку пространство $\{0, 1\}^\omega \setminus Q$ не является σ -компактным, существует

$$t \in \{0, 1\}^\omega \setminus (Q \cup \text{pr}(K \times \{0, 1\}^\omega \setminus G)).$$

Тогда $K \times \{t\} \subset G$ и отображение $\bar{f}_t: K \rightarrow 2^Y$, определенное формулой $\bar{f}_t(x) = \bar{f}(x, t)$, $x \in K$, обладает свойством $\bar{f}_t^{-1}(2^X) = C$, т.е. пара $(2^Y, 2^X)$ $(\mathcal{M}_0(1), \mathcal{P}_{2n-1}(1))$ -предуниверсальна.

Покажем теперь, что пара $(2^Y, 2^X)$ $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_{2n+2})$ -предуниверсальна. Пусть K – компакт и $K \supset C \in \mathcal{P}_{2n+2}$. Обозначим через $\text{pr}_K: K \times Q \rightarrow K$ естественную проекцию. Поскольку $K \setminus C \in \mathcal{P}_{2n+1}$, существует подмножество $P \subset K \times Q$ класса $\mathcal{P}_{2n}$ с $\text{pr}_K(P) = K \setminus C$. Пусть $\varphi: M \rightarrow K \times Q$ – открытое отображение одномерного компакта M на $K \times Q$ (см. [20]). Поскольку $P \in \mathcal{P}_{2n}$, то $L = \varphi^{-1}(P) \in \mathcal{P}_{2n}(1)$ и $M \setminus L \in \mathcal{P}_{2n-1}(1)$ [15, гл. II, § 34]. Следовательно, пара $(2^Y, 2^X)$ $(M, M \setminus L)$ -предуниверсальна. Так как отображение $f = \text{pr}_K \circ \varphi: M \rightarrow K$ открыто, мы можем использовать лемму 8, из которой следует, что пара $(2^Y, 2^X)$ (K, C) -предуниверсальна.

Из лемм 7, 9, 10 и определения топологии Виеториса вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если пространство X всюду $\mathbb{Q}$ -предуниверсально, то пара $(2^Y, 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_2)$ -универсальна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $n \geq 1$. Если пространство 2^X всюду $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсально, то пара $(2^Y, 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_{2n+2})$ -универсальна.

5. Основные результаты. Известная теорема Гуревича [21] утверждает, что любое коаналитическое не топологически полное пространство содержит замкнутую копию $\mathbb{Q}$ и, следовательно, является $\mathbb{Q}$ -предуниверсальным пространством. Отсюда следует, что всюду $\mathbb{Q}$ -предуниверсальным является любое коаналитическое нигде не топологически полное пространство (т.е. пространство, не содержащее непустого топологически полного открытого подмножества). В [9] доказано, что для любого подмножества $X \subset \ell_2$ с локально гомотопически пренебрежимым дополнением, сильная $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_{2n})$ -универсальность пары (ℓ_2, X) влечет сильную $\mathcal{P}_{2n}$ -универсальность пространства X . Поскольку гиперпространство 2^Y гомеоморфно ℓ_2 , из леммы 2 и предложений 1, 2 вытекает

ТЕОРЕМА 1. Гиперпространство 2^X является коаналитическим сильно $\mathcal{P}_2$ -универсальным абсолютным ретрактом тогда и только тогда, когда X – связное локально континуум связное коаналитическое нигде не топологически полное пространство.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 1$ и X – связное локально континуум связное пространство. Гиперпространство 2^X является сильно $\mathcal{P}_{2n+2}$ -универсальным пространством тогда и только тогда, когда оно всюду $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсально.

Среди сильно $\mathcal{P}_{2n}$ -универсальных абсолютных ретрактов выделяются два пространства: Π_{2n} и $\mathbb{Q} \setminus \Pi_{2n-1}$, для которых существуют на данный момент топологические характеристики. Соответственно, мы имеем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Гиперпространство 2^X гомеоморфно пространству Π_2 тогда и только тогда, когда X – связное локально континуум связное коаналитическое пространство первой категории.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сперва, что 2^X гомеоморфно Π_2 . Поскольку $2^X \cong \Pi_2$ – коаналитический абсолютный ретракт, то X – связное локально континуум связное коаналитическое пространство. Покажем, что X – пространство первой категории. Поскольку X – коаналитическое пространство, $X = G \cup Z$, где G – абсолютное G_δ -множество и Z – счетное объединение нигде не плотных множеств в X (см. [15, гл. II, § 35]). Если предположить, что множество G где-то плотно в X , то мы получим, что абсолютное G_δ -множество 2^G где-то плотно в 2^X , что невозможно, поскольку $2^X \cong \Pi_2$ – пространство первой категории. Таким образом, множество G нигде не плотно в X , т.е. $X = G \cup F$ – пространство первой категории.

Теперь предположим, что X – связное локально континуум связное коаналитическое пространство первой категории. Тогда пространство X нигде не топологически полно, и, следовательно, по теореме Гуревича и предложению 1 пара $(2^Y, 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_2)$ -универсальна, где $Y \supset X$ – пространство, построенное в начале п. 2. Поскольку 2^Y гомеоморфно ℓ_2 , мы можем вложить 2^Y в гильбертов куб так, чтобы дополнение $\mathbb{Q} \setminus 2^Y$ было локально гомотопически пренебрежимым. Тогда согласно [22, 6.2] пара $(\mathbb{Q}, 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_2)$ -универсальна. Поскольку дополнение $\mathbb{Q} \setminus 2^X$ локально гомотопически пренебрежимо в $\mathbb{Q}$, то, применяя леммы 2 и 3, получаем, что 2^X содержится в

Z_σ -множестве в Q . Поскольку пространство X коаналитично, то таковым же является его гиперпространство 2^X [13, гл. II, §38]. Применяя теорему А, получаем, что пара $(Q, 2^X)$ гомеоморфна паре (Q, Π_2) , откуда 2^X гомеоморфно Π_2 .

ТЕОРЕМА 4. *Гиперпространство 2^X гомеоморфно пространству $Q \setminus \Pi_1$, если X – связное локально связное коаналитическое нигде не топологически полное пространство, содержащее всюду плотное абсолютное G_δ -множество $G \subset X$ так, что пересечение $U \cap G$ связно для любого связного открытого множества $U \subset X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из условий теоремы следует, что пространство G тоже связно и локально связно. Поскольку G – абсолютное G_δ -множество, оно локально линейно связно. Рассуждая, как при доказательстве леммы 1, получаем, что X – связное локально линейно связное пространство. Пусть пространство $Y \supset X$ определено как в п. 2. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, вложим гиперпространство 2^Y в гильбертов куб Q так, чтобы дополнение $Q \setminus 2^Y$ было локально гомотопически пренебрежимым. Используя предложение 1, получаем, что пара $(2^Y, 2^X)$, а следовательно, и пара $(Q, 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_2)$ -универсальны. Тогда пара $(Q, Q \setminus 2^X)$ сильно $(\mathcal{M}_0, \mathcal{P}_1)$ -универсальна. Из лемм 2 и 4 следует, что дополнение $Q \setminus 2^G$ является Z_σ -множеством в Q . Поскольку $2^X \in \mathcal{P}_2$, то $Q \setminus 2^X \in \mathcal{P}_1$, и по теореме А пара $(Q, Q \setminus 2^X)$ гомеоморфна паре (Q, Π_1) , откуда пространство 2^X гомеоморфно $Q \setminus \Pi_1$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $n \geq 1$ и $X \in \mathcal{P}_{2n+2}$ – связное локально континуум связное всюду $\mathcal{P}_{2n-1}(1)$ -предуниверсальное пространство. Гиперпространство 2^X гомеоморфно*

- 1) Π_{2n+2} , если X – пространство первой категории;
- 2) $Q \setminus \Pi_{2n+1}$, если X содержит всюду плотное абсолютное G_δ -множество так, что пересечение $U \cap G$ связно для любого открытого связного множества $U \subset X$.

Доказательство теоремы 5 опирается на теорему А и предложение 2 и ничем не отличается от доказательства теорем 3 и 4.

Поскольку пространства Π_{2n-1} , Π_{2n+2} , $Q \setminus \Pi_{2n+1}$ и $Q \setminus \Pi_{2n}$ всюду $\mathcal{P}_{2n-1}$ -предуниверсальны [6], из теоремы 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ гиперпространства $2^{\Pi_{2n-1}}$ и $2^{\Pi_{2n+2}}$ гомеоморфны Π_{2n+2} , а $2^{Q \setminus \Pi_{2n}}$ и $2^{Q \setminus \Pi_{2n+1}}$ гомеоморфны $Q \setminus \Pi_{2n+1}$.*

Фактически, используя ход доказательства теорем 2–5, можно доказать большее: для любого $n \in \mathbb{N}$ пары $(2^Q, 2^{\Pi_{2n-1}})$, $(2^Q, 2^{\Pi_{2n+2}})$ гомеоморфны паре (Q, Π_{2n+2}) , а пары $(2^Q, 2^{Q \setminus \Pi_{2n}})$ и $(2^Q, 2^{Q \setminus \Pi_{2n+1}})$ гомеоморфны паре $(Q, Q \setminus \Pi_{2n+1})$.

6. Заключительные замечания и открытые вопросы. Поскольку теорема 4 в отличие от теоремы 3 дает лишь достаточные условия, при которых 2^X гомеоморфно $Q \setminus \Pi_1$, интересной представляется

ПРОБЛЕМА 1. Охарактеризовать пространства, экспонента которых гомеоморфна $Q \setminus \Pi_1$. Более общо, охарактеризовать пространства, экспонента которых содержит абсолютное G_δ -множество с локально гомотопически пренебрежимым дополнением.

Отметим, что для того чтобы 2^X было гомеоморфным $Q \setminus \Pi_1$ необходимо, чтобы пространство X было коаналитическим, связным, локально континуум связным, нигде не

топологически полным и нигде не первой категории. Эти условия, однако, не являются достаточными, как показывает

ПРИМЕР 1. Обозначим через P множество иррациональных чисел в отрезке $[0, 1]$ и рассмотрим пространство $X = \sigma \cup P^\omega \subset [0, 1]^\omega = Q$. Легко видеть, что

- i) X – абсолютный ретракт;
- ii) X – абсолютное борелевское множество;
- iii) X – нигде не топологически полное пространство нигде не первой категории.

Следовательно, по теореме 1 гиперпространство $2^{\sigma \cup P^\omega}$ – коаналитическое и сильно $\mathcal{P}_2$ -универсальное. Вместе с тем оно не гомеоморфно ни Π_2 , ни $Q \setminus \Pi_1$. Тот факт, что $2^{\sigma \cup P^\omega}$ не гомеоморфно Π_2 вытекает из теоремы 3, поскольку X не является пространством первой категории. Если предположить, что $2^{\sigma \cup P^\omega}$ гомеоморфно $Q \setminus \Pi_1$, мы получим, что $2^{\sigma \cup P^\omega}$ содержит абсолютное G_δ -подмножество $G \subset 2^{\sigma \cup P^\omega}$ с локально гомотопически пренебрежимым дополнением. Поскольку дополнение $2^{\sigma \cup P^\omega}$ в гиперпространстве 2^Q локально гомотопически пренебрежимо, $2^Q \setminus G$ является Z_σ -подмножеством в 2^Q . Теперь отметим, что $2^{\sigma \cup P^\omega} \setminus 2^{P^\omega}$ содержится в Z_σ -множестве $Z = \{K \in 2^Q \mid K \cap \sigma \neq \emptyset\}$ в 2^Q . Тогда дополнение $2^Q \setminus 2^{P^\omega} \subset 2^{\sigma \cup P^\omega} \setminus 2^{P^\omega} \cup 2^Q \setminus 2^{\sigma \cup P^\omega}$ содержится в Z_σ -множестве $Z \cup (2^Q \setminus G)$ в 2^Q и, следовательно, 2^{P^ω} является абсолютным ретрактом, что противоречит тому, что 2^{P^ω} нульмерно.

ВОПРОС 1. Является ли гиперпространство $2^{\sigma \cup P^\omega}$ топологически однородным?

Можно доказать, что $2^{\sigma \cup P^\omega}$ гомеоморфно объединению $\Pi_2 \cup N \subset Q$, где $N \subset Q \setminus \Pi_2$ – всюду плотное подмножество, гомеоморфное пространству P иррациональных чисел. Поэтому вопрос 1 связан со следующей проблемой.

ПРОБЛЕМА 2. Охарактеризовать пару (I^ω, P^ω) . В частности, для каждого ли всюду плотного локально гомотопически пренебрежимого нульмерного топологически полного подпространства $X \subset I^\omega$ пара (I^ω, X) гомеоморфна паре (I^ω, P^ω) ?

ЗАМЕЧАНИЕ. Конструкция примера 1 проходит в следующей более общей ситуации. Пусть $G \subset Q \setminus \sigma$ – всюду плотное абсолютное G_δ -подмножество, объединение $\sigma \cup G$ которого с σ нигде не топологически полно. Предположим, что гиперпространство 2^G не является абсолютным ретрактом, т.е. либо G не связно, либо не локально связно (см. [2]). Тогда гиперпространство $2^{\sigma \cup G}$ является коаналитическим сильно $\mathcal{P}_2$ -универсальным абсолютным ретрактом, не гомеоморфным ни Π_2 , ни $Q \setminus \Pi_1$.

ВОПРОС 2. Пусть $G \subset Q \setminus \sigma$ – всюду плотное абсолютное G_δ -множество, не содержащее нетривиальных континуумов, объединение $G \cup \sigma$ которого с σ нигде не топологически полно. Гомеоморфны ли гиперпространства $2^{\sigma \cup G}$ и $2^{\sigma \cup P^\omega}$?

Что касается топологической однородности гиперпространств, отметим, что по теореме 3 топологически однородным является любое гиперпространство, являющееся коаналитическим абсолютным ретрактом первой категории. Это, однако, неверно для гиперпространств нигде не первой категории.

ПРИМЕР 2. Рассуждая как в примере 1, можно доказать, что гиперпространство 2^X пространства $X = (-1, 1) \times \sigma \cup (-1, 0) \times (0, 1)^\omega \cup P \times P^\omega \subset [-1, 1] \times Q$ является коаналитическим сильно $\mathcal{P}_2$ -универсальным абсолютным ретрактом нигде не первой категории, который топологически неоднороден (он содержит открытые множества, гомеоморфные как $Q \setminus \Pi_1$, так и $2^{\sigma \cup P^\omega}$).

В связи с предложением 2 и теоремой 5 интересным представляется

ВОПРОС 3. Пусть $n \geq 1$ и X – связное локально континуум связное пространство. Будет ли гиперпространство 2^X сильно $\mathcal{P}_{2n+2}$ -универсальным, если пространство X всюду $\mathcal{P}_{2n-1}(0)$ -предуниверсально?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wojdyslawski M. Rétractes absolus et hyperspaces des continus // Fund. Math. 1939. V. 32. P. 184–192.
- [2] Тапшметов У. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств // Сиб. матем. ж. 1974. Т. 15. № 5. С. 1115–1130.
- [3] Curtis D. W., Schori R. M. Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes // Fund. Math. 1978. V. 101. № 1. P. 19–38.
- [4] Curtis D. W. Hyperspaces of noncompact metric spaces // Compositio Math. 1980. V. 40. P. 139–152.
- [5] Curtis D. W. Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 75. P. 126–130.
- [6] Cauty R. Ensembles absorbants pour les classes projectives // Fund. Math. 1993. V. 143. P. 203–206.
- [7] Banach T. Descriptive classes of sets and topological functors // Укр. матем. ж. 1995. Т. 47. С. 408–411.
- [8] Toruńczyk H. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of ℓ_2 -manifolds // Fund. Math. 1978. V. 101. P. 93–110.
- [9] Banach T., Cauty R. Interplay between strongly universal spaces and pairs // Fund. Math. (to appear).
- [10] Whyburn G. T. Analytic Topology. Providence: AMS, 1942.
- [11] Nadler S. B. Hyperspaces of sets. New York: Marcel Dekker, 1978.
- [12] Curtis D. W., Nhu N. T. Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$ -dimensional linear metric spaces // Topology Appl. 1985. V. 19. № 3. P. 251–260.
- [13] Kuratowski C. Topologie. V. II. Warszawa: PWN, 1961.
- [14] Mardešić S., Uglešić N. On irreducible mappings into polyhedra // Topology Appl. 1995. V. 61. P. 187–203.
- [15] Kuratowski C. Topologie. V. I. Warszawa: PWN, 1958.
- [16] Dobrowolski T., Marciszewski W., Mogilski J. On topological classification of function spaces $C_p(X)$ of low Borel complexity // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 328. P. 307–324.
- [17] Engelen van F., Mill van J. Borel sets in compact spaces: some Hurewicz type theorems // Fund. Math. 1984. V. 124. P. 271–286.
- [18] Bennett R. Countable dense homogeneous spaces // Fund. Math. 1972. V. 74. P. 189–194.
- [19] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [20] Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения, повышающие размерность // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 55–95.
- [21] Hurewicz W. Relative perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A) // Fund. Math. 1928. V. 12. P. 78–109.
- [22] Baars J., Gladdines H., Mill van J. Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds // Topology Appl. 1993. V. 50. P. 147–182.

Львовский университет
 Университет Париж VI
 E-mail: topos@franko.lviv.ua

Поступило
 14.04.95
 Исправленный вариант
 05.12.95