Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Васильев, Одна задача теории формаций конечных групп, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 52–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:11:42

УДК 512.542

ОДНА ЗАДАЧА ТЕОРИИ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. Васильев

В 1968 году Картером, Фишером, Хоуксом в классе конечных разрешимых групп был разработан метод экстремальных классов для изучения локальных формаций и их критических групп. В настоящей работе решается задача Л. А. Шеметкова о распространении данного метода на произвольные конечные группы.

Библиография: 6 названий.

Введение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – некоторые классы групп. Класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ определяется следующим образом: группа $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ тогда и только тогда, когда каждая $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Конструкция класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ была введена и изучалась в классе конечных разрешимых групп Картером, Фишером, Хоуксом в [1]. Ими было установлено, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – локальная формация, если $\mathfrak{F}$ – локальная формация и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс. В [1] также доказано, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{F}$, если $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс и $\mathfrak{F}$ – локальная формация, имеющая локальный экран f такой, что $f^{\mathfrak{X}}(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p . Перечисленные выше результаты нашли приложения для изучения минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп, т.е. групп, у которых данному классу $\mathfrak{F}$ принадлежат только собственные подгруппы (подробности см. в [2], [3]).

В 1978 году Л. А. Шеметковым была поставлена задача (см. [2, с. 243, проблема 25]): распространить отмеченные выше утверждения на произвольные (не обязательно разрешимые) локальные формации. В [4] В. Н. Семенчук исследовал эту задачу для S -замкнутых локальных формаций. В настоящей работе получено полное решение данной задачи. Установлено, что в общем случае перенос результатов Картера, Фишера, Хоукса на произвольные формации невозможен. В частности, построен пример локальной формации $\mathfrak{F}$ и экстремального класса $\mathfrak{X}$, для которых формация $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ нелокальна. В то же время нами указываются условия, налагаемые на локальный экран f и группы формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, в которых данная задача решается положительно. Существенность предложенных условий подтверждается примерами.

В работе рассматриваются только конечные группы. Напомним [5], что для любой группы G и ее подгруппы Фиттинга $F(G)$ обобщенная подгруппа Фиттинга $F^*(G)$ определяется следующим образом: $F^*(G)/F(G) = \text{soc}(C_G(F(G))F(G)/F(G))$, где soc означает поколь. Через $E(G)$ обозначается последний член в произвольном ряде группы $F^*(G)$. Нам потребуются следующие хорошо известные свойства подгруппы $F^*(G)$. Для любой группы G имеет место $F^*(G) = F(G)E(G)$ и $C_G(F^*(G)) \subseteq F(G)$ (см. теоремы 13.8 и 13.12 из [5, гл. X]).

Необходимые обозначения, определения и результаты из теории формаций можно найти в [2], [3], [6]. Отдельно отметим, что $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$ означает, что $\mathfrak{F}$ – локальная формация, заданная локальным экраном f . Локальный экран f называется полным, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p . Пересечение всех (локальных) формаций, содержащих некоторое множество групп $\mathfrak{X}$, называется (соответственно локальной) формацией, порожденной $\mathfrak{X}$. Через $\text{form } \mathfrak{X}$ обозначается формация, а через $\text{lform } \mathfrak{X}$ – локальная формация, порожденная множеством $\mathfrak{X}$. Везде в работе $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех групп, $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп и π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_\pi$ – класс всех π -групп, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$. Всюду $\mathcal{P}$ – множество всех простых чисел.

Решение задачи. Центральным моментом работы [1] является понятие экстремального класса. В дальнейшем мы будем использовать предложенное в [2] расширение этого понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый непустой класс групп. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется $\mathfrak{H}$ -экстремальным классом, если выполняются следующие условия:

- 1) $\mathfrak{X}$ – непустой насыщенный гомоморф;
- 2) $\mathfrak{X} \leq \mathfrak{H}$;
- 3) если $\mathfrak{H}$ -группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K и $G/K \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, то в этом определении $\mathfrak{H}$ опускается, и мы получаем понятие экстремального класса. Понятию экстремального класса, рассматриваемому в [1], будет соответствовать случай, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – S -замкнутая формация.

Доказательство следует из определения класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ и леммы 25.4 из [2].

Ключевым в данной работе является следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формацию $\mathfrak{F}$ назовем квазинаследственной, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $G = HF^*(G)$ всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Локальный экран f назовем квазинаследственным, если $f(p)$ является квазинаследственной формацией для любого простого p .

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – квазинаследственная формация. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ – квазинаследственная формация.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = HF^*(G)$ и $G \in \mathfrak{X}$. Тогда

$$G/O_p(G) = HO_p(G)/O_p(G) \cdot F^*(G)/O_p(G) = HO_p(G)/O_p(G) \cdot F^*(G/O_p(G)) \in \mathfrak{F}.$$

Из квазинаследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $HO_p(G)/O_p(G) \simeq H/H \cap O_p(G) \in \mathfrak{F}$. Но тогда $H \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} = \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

В дальнейшем, если $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс и f – локальный экран, то через $f^{\mathfrak{X}}$ будем обозначать локальную функцию, определяемую равенством $f^{\mathfrak{X}}(p) = (f(p))^{\mathfrak{X}}$ для любого простого p .

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – непустой класс и $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс. Если $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, то $\text{LF}(f^{\mathfrak{X}}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \text{LF}(f^{\mathfrak{X}})$ и R – произвольная $\mathfrak{X}$ -подгруппа группы G . По лемме 4.5 из [2] $G/F_p(G) \in f^{\mathfrak{X}}(p)$ для любого простого $p \in \pi(G)$. Так как $RF_p(G)/F_p(G) \in \mathfrak{X}$, то $RF_p(G)/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(R)$. Но тогда $R/R \cap F_p(G) \in f(p)$, а значит, $R/F_p(R) \in Qf(p) = f(p)$ для любого $p \in \pi(R)$. Отсюда по лемме 4.5 из [2] следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, а значит, $\text{LF}(f^{\mathfrak{X}}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – локальная S -замкнутая формация, $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс и $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – квазинаследственный локальный экран. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} = \text{LF}(\varphi^{\mathfrak{X}}) \cap \mathfrak{H}$, где φ – такой локальный экран, что $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – локальный экран такой, что $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p . Так как f – квазинаследственный локальный экран, то по лемме 2 функция φ также является квазинаследственным экраном. По лемме 3.13 из [2] $\mathfrak{F} = \text{LF}(f) = \text{LF}(\varphi)$.

Обозначим $\mathfrak{F}^* = \text{LF}(\varphi^{\mathfrak{X}})$. Из леммы 3 следует, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Тогда $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$.

Докажем обратное включение $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Предположим, что множество $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H})$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как классы $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$ являются формациями, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , совпадающую с $(\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H})$ – корадикалом группы G . Так как формация $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$ локальна, то $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда из $\Phi(G) = 1$ и единственности N следует, что N – абелева p -группа, где p – некоторое простое число и $F^*(G) = F(G) = N$. Пусть C/N – $\mathfrak{X}$ -подгруппа группы C/N . Предположим, что $C = G$. Из S -замкнутости формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ и выбора G следует, что $C \in \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Тогда по лемме 4.5 из [2] $C/F_p(C) \in \varphi^{\mathfrak{X}}(p)$, где $p \in \pi(N)$. так как $N \subseteq F_p(C)$ и $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$, то $C/F_p(C) \in \mathfrak{X}$. Поэтому $C/F_p(C) \in \varphi(p)$. В силу $C_G(F^*(G)) = C_G(N) = N$ получаем, что $O_{p'}(C) = 1$. Тогда $F_p(C)$ – p -группа. Поэтому $C \in \mathfrak{N}_p \varphi(p) = \varphi(p)$, а значит, $C/N \in \varphi(p)$. Предположим теперь, что $C/N \in \mathfrak{X}$. Ввиду единственности N и согласно определению $\mathfrak{H}$ -экстремального класса, $G \in \mathfrak{X}$. Так как $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G/C_G(N) = G/N \in \varphi(p)$. Таким образом, мы доказали, что каждая $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G/N принадлежит $\varphi(p)$. Это означает, что $G/C_G(N) = G/N \in \varphi^{\mathfrak{X}}(p)$. Следовательно, N $\varphi^{\mathfrak{X}}$ -центральна в G . Но тогда $G \in \mathfrak{F}^*$, а значит, $G \in \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Получили противоречие с выбором G .

2. Пусть $F(G) = 1$. Тогда $F^*(G) = \text{soc}(G)$. Из единственности N следует, что $N = F^*(G)$. Тогда из $C_G(F^*(G)) \subseteq F(G) = 1$ имеем, что $C_G(N) = 1$. Пусть D – произвольная $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G . Рассмотрим подгруппу $R = DN$. Вначале покажем, что $F_p(R) = 1$ для любого $p \in \pi(N)$. Зафиксируем $p \in \pi(N)$. Заметим, что $O_{p'}(R) \subseteq F_p(R)$. Так как N – неабелева минимальная нормальная подгруппа из G и $p \in \pi(N)$, то $O_{p'}(N) = O_p(N) = 1$. Поэтому $O_{p'}(R) \cap N = O_p(R) \cap N = 1$. Тогда $[O_{p'}(R), N] = [O_p(R), N] = 1$. Отсюда и из $C_G(N) = 1$ получаем, что $O_{p'}(R) = O_p(R) = 1$. Но тогда $F_p(R) = 1$ для любого $p \in \pi(N)$. Предположим, что $R \neq G$. В силу выбора G и S -замкнутости формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ получаем, что $R \in \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Тогда $R \simeq R/F_p(R) \in \varphi^{\mathfrak{X}}(p)$ для любого $p \in \pi(N)$. Отсюда и из $D \in \mathfrak{X}$ следует, что $D \in \varphi(p)$. Пусть теперь $R = G$. Так как $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс, то из $G \in \mathfrak{H}$ и $G/N = DN/N \simeq D/D \cap N \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \simeq G/F_p(G) \in \varphi(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Отсюда и из $G = DN = DF^*(G)$ ввиду квазинаследственности формации

$\varphi(p)$ следует, что $D \in \varphi(p)$. Итак, установлено, что всякая $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G принадлежит формации $\varphi(p)$ для любого $p \in \pi(N)$, т.е. $G \in \varphi^{\mathfrak{X}}(p)$, $p \in \pi(N)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}^*$ и $G/C_G(N) \simeq G \in \varphi^{\mathfrak{X}}(p)$, $p \in \pi(N)$, следует, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$. Получили противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – полный квазинаследственный локальный экран и $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = \text{LF}(f^{\mathfrak{X}})$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. Если $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – S -замкнутые подклассы из $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ также является S -замкнутым подклассом из $\mathfrak{F}$. Поэтому в $\mathfrak{F}$ всегда имеется наибольший (возможно пустой) замкнутый относительно подгрупп подкласс, который обозначается через $\mathfrak{F}^S$. Заметим, что $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{F}^{\mathfrak{G}}$. Так как класс всех групп $\mathfrak{G}$, очевидно, является экстремальным, то имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – полный квазинаследственный локальный экран. Тогда $\mathfrak{F}^S = \text{LF}(f^S)$.

СЛЕДСТВИЕ 3 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). Пусть $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – полный локальный $\mathfrak{S}$ -экран. Тогда для любого $\mathfrak{S}$ -экстремального класса $\mathfrak{X}$ выполняется $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} = \text{LF}(f^{\mathfrak{X}}) \cap \mathfrak{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $G = HF^*(G)$ и $G \in f(p)$, где p – некоторое простое число. Так как $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$, то из $G \in f(p)$ имеем, что $F^*(G) = F(G)$ и $G = HF(G)$. По теореме 2.3 из [2] получаем, что $H \in f(p)$. Следовательно, $f(p)$ – квазинаследственная формация для любого простого p . Остается применить теорему 1. Следствие доказано.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{H}$ – S -замкнутая формация, $\mathfrak{F}$ – квазинаследственная формация и $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс. Если $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $(\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $((\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}) \setminus (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G . Тогда N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}}$. Пусть R – произвольная $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G . Положим $B = RF^*(G)$, и рассмотрим два случая.

1. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда N – абелева q -группа, где q – некоторое простое число. Если $q = p$, то из $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, N – q -группа, где $q \neq p$.

Предположим, что $B \neq G$. Из S -замкнутости формации $(\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ в силу выбора G следует, что $B \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\pi(N) = \{q\}$, то $F(G)$ является q -группой. Так как $F^*(G) = F(G)E(G) \subseteq B$, то $E(G) \subseteq N_G(O_p(B))$. Поэтому по утверждению б) леммы 13.16 из [5] получаем, что $[E(G), O_p(B)] = 1$. Очевидно, $[F(G), O_p(B)] = 1$. Следовательно, $[F^*(G), O_p(G)] = 1$, а значит, $O_p(B) \subseteq C_G(F^*(G)) \subseteq F(G)$. Отсюда следует, что $O_p(B) = 1$. Но тогда $B \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Из $B = RF^*(G) = RF^*(B)$ и квазинаследственности формации $\mathfrak{F}$ получаем, что $R \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $B = G$. Если $\Phi(G) = 1$, то из единственности N и $N \subseteq F(G)$ следует, что $N = F^*(G) = F(G)$. Тогда $G = RN$. Из $G/N = RN/N \simeq R/R \cap N \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и определения $\mathfrak{H}$ -экстремального класса $\mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Тогда из $G \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}}$ получаем, что $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$. Очевидно, что $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Получили противоречие. Пусть

$\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \subseteq \Phi(G)$. Рассмотрим подгруппу $H = RN$. Если $H = G$, то $R = G \in \mathfrak{X}$. Отсюда и из $G \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ вытекает, что $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Противоречие. Будем считать, что $H \neq G$. Заметим, что $F(G)/N = F(G/N) - q$ -группа, $q \neq p$, следовательно, $O_p(G/N) = 1$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $G/N = HF^*(G)/N = H/N \cdot F^*(G/N) \in \mathfrak{F}$, то из квазинаследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H/N \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $R/R \cap N \simeq RN/N = H/N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, из $R \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ вытекает, что $R/O_p(R) \in \mathfrak{F}$. Тогда $R \simeq R/R \cap N \cap O_p(R) \in R_0 \mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Следовательно, мы установили, что любая $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Так как $G \in \mathfrak{H}$, то из условия $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ следует, что $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Получили противоречие с выбором G .

2. Пусть $F(G) = 1$. Тогда N неабелева. Из единственности N следует, что $F^*(G) = N$ и $B = RF^*(G) = RN$. Ввиду $C_G(F^*(G)) \subseteq F(G)$ получаем, что $C_G(N) = 1$. Если $B = G$, то из $G/N = RN/N \simeq R/R \cap N \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Отсюда и из $G \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ получаем, что $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Противоречие. Будем считать, что $B \neq G$. Тогда из S -замкнутости $(\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$ и выбора G следует, что $B \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как $N \subseteq B$ и $O_p(B) \cap N = 1$, то $O_p(B) \subseteq C_G(N) = 1$. Поэтому $O_p(B) = 1$. Следовательно, $B = RN \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как $N \subseteq F^*(B)$, то $B = RF^*(B)$. Из квазинаследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}$. Тем самым доказано, что любая $\mathfrak{X}$ -подгруппа из G принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{H}$ – локальная S -замкнутая формация, $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс и $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – квазинаследственный локальный экран. Если $f^{\mathfrak{X}}(p) \cap \mathfrak{H} \subseteq f(p) \cap \mathfrak{H}$ для любого простого p , то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим локальный экран φ такой, что $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Тогда по лемме 3.13 из [2] $\mathfrak{F} = \text{LF}(\varphi)$. Ввиду леммы 2 φ – квазинаследственный локальный экран. Из условия теоремы и леммы 4 вытекает, что $\varphi^{\mathfrak{X}}(p) \cap \mathfrak{H} \subseteq \varphi(p) \cap \mathfrak{H}$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс и $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$, где f – квазинаследственный локальный экран. Если $f^{\mathfrak{X}}(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p , то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$, из теоремы 2 получаем соответствующий результат из [1].

Дальше мы рассмотрим примеры, показывающие, что налагаемые нами требования в теореме 1 являются существенными. Нам потребуется следующая

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{H}$ – S -замкнутая формация такая, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{X}$ – $\mathfrak{H}$ -экстремальный класс и $\mathfrak{F} = \text{LF}(h)$, где h – максимальный внутренний локальный экран. Если $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – локальная формация, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = \text{LF}(h^{\mathfrak{X}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – локальная формация и φ – ее максимальный внутренний локальный экран. Так как $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ – S -замкнутая формация, то по теореме 4.7 из [2] φ – S -замкнутый экран. По лемме 3 $\text{LF}(h^{\mathfrak{X}}) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Докажем обратное включение. Для этого нам достаточно показать, что $\varphi(p) \subseteq h^{\mathfrak{X}}(p)$ для любого простого p . Предположим, что найдется простое число p такое, что множество $\varphi(p) \setminus h^{\mathfrak{X}}(p)$ не пусто. Выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\varphi(p)$ и $h^{\mathfrak{X}}(p)$ являются S -замкнутыми формациями, то ввиду выбора G является минимальной не $h^{\mathfrak{X}}(p)$ -группой. Заметим, что

$(h^{\mathfrak{X}}(p))^{\mathfrak{X}} = h^{\mathfrak{X}}(p)$. Поэтому по лемме 25.5 из [2] $G \in \mathfrak{X}$. Отсюда и из $\varphi(p) \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Отметим также, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа. Если $O_p(G) \neq 1$, то $G/O_p(G) \in h^{\mathfrak{X}}(p)$. Тогда для любой $\mathfrak{X}$ -подгруппы H из G выполняется $HO_p(G)/O_p(G) \simeq H/H \cap O_p(G) \in \mathfrak{X} \cap h(p)$. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$, то $H \in h(p)$. Следовательно, $G \in h^{\mathfrak{X}}(p)$. Получили противоречие с выбором G . Таким образом, $O_p(G) = 1$. Тогда по лемме 18.8 из [6] существует точный неприводимый $F_p[G]$ -модуль L , где F_p – поле из p элементов. Рассмотрим группу $E = L \rtimes G$. Из $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}\mathfrak{H}$ получаем, что $E \in \mathfrak{H}$. Так как L – единственная минимальная нормальная подгруппа в E , то из $E/L \simeq G \in \mathfrak{X}$ и того, что $\mathfrak{X}$ – экстремальный класс, вытекает, что $E \in \mathfrak{X}$. Кроме того, из $C_E(L) = L$ следует, что $E/C_E(L) = E/L \simeq G \in \varphi(p) \cap \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, а значит, $E \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Поэтому $E \in \mathfrak{F}$. Но тогда $E/C_E(L) \simeq G \in h(p)$. Отсюда и из $G \in \mathfrak{X}$ в силу выбора G следует, что $G \in h^{\mathfrak{X}}(p)$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что условие квазинаследственности экрана в теореме 1 отбросить нельзя.

ПРИМЕР 1. Возьмем знакопеременную группу A_5 степени 5 и рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех ее подгрупп. Пусть $\mathfrak{F} = \text{lform } \mathfrak{M}$ – локальная формация, порожденная множеством $\mathfrak{M}$. По теореме 8.3 из [6] формация $\mathfrak{F}$ имеет минимальный локальный экран f такой, что $f(p) = \emptyset$, если $p \in \pi'(\mathfrak{M})$, и $f(p) = \text{form}\{A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Отсюда, учитывая строение групп из $\mathfrak{M}$, находим

$$f(p) = \begin{cases} \text{form}\{C_3, A_5\}, & \text{если } p = 2; \\ \text{form}\{C_2, A_5\}, & \text{если } p = 3; \\ \text{form}\{C_2, A_5\}, & \text{если } p = 5; \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathscr{P} \setminus \{2, 3, 5\}, \end{cases}$$

где C_p обозначает циклическую группу порядка p . Применяя следствие 8.6 из [6], строим максимальный внутренний локальный экран φ формации $\mathfrak{F}$ такой, что

$$\varphi(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_2 \text{form}\{C_3, A_5\}, & \text{если } p = 2; \\ \mathfrak{N}_3 \text{form}\{C_2, A_5\}, & \text{если } p = 3; \\ \mathfrak{N}_5 \text{form}\{C_2, A_5\}, & \text{если } p = 5; \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathscr{P} \setminus \{2, 3, 5\}. \end{cases}$$

Заметим, что экран φ – полный, но не является квазинаследственным. Например, $A_5 = C_5 F^*(A_5) = C_5 A_5 \in \varphi(2)$, но $C_5 \notin \varphi(2)$.

Для класса всех конечных групп $\mathfrak{G}$, который является экстремальным, рассмотрим $\mathfrak{F}^* = \text{LF}(\varphi^{\mathfrak{G}})$. Докажем, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{G}} \neq \mathfrak{F}^*$. По лемме 3 $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{G}}$. Поскольку всякая подгруппа из A_5 принадлежит $\mathfrak{F}$, то $A_5 \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{G}}$. Предположим, что $A_5 \in \mathfrak{F}^*$. Тогда по лемме 4.5 из [2]

$$A_5 \simeq A_5/F_2(A_5) \in \varphi^{\mathfrak{G}}(2) = (\mathfrak{N}_2 \text{form}\{C_3, A_5\})^{\mathfrak{G}}.$$

Это означает, что всякая подгруппа из A_5 принадлежит $\varphi(2)$. В частности, $C_5 \in \varphi(2) = \mathfrak{N}_2 \text{form}\{C_3, A_5\}$. Тогда $C_5 \in \text{form}\{C_3, A_5\}$, так как $O_2(C_5) = 1$. Но по теореме 2.2 из [2] $\text{form}\{C_3, A_5\} = Q R_0\{C_3, A_5\}$. Откуда нетрудно заметить, что $C_5 \notin \text{form}\{C_3, A_5\}$.

Противоречие. Таким образом, $A_5 \notin \mathfrak{F}^*$. Следовательно, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}} \neq \mathfrak{F}^*$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}}$ не является локальной формацией. Так как $\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}} = \mathfrak{F}^S$, то $\mathfrak{F}$ – пример локальной формации с нелокальной подформацией $\mathfrak{F}^S$.

В заключении теоремы 1 утверждается, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} = \text{LF}(\varphi^{\mathfrak{X}}) \cap \mathfrak{H}$. Так как по условию $\mathfrak{H}$ – локальная формация и пересечение локальных формаций является локальной формацией, то возникает следующий естественный вопрос: нельзя ли заключение теоремы 1 заменить более сильным утверждением $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = \text{LF}(\varphi^{\mathfrak{X}})$? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}$. Ясно, что $\mathfrak{H}$ является $\mathfrak{S}$ -экстремальным классом. Зададим локальный экран f следующим образом:

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\{2,3\}}, & \text{если } p = 2; \\ \mathfrak{S}_{\{2,3\}}, & \text{если } p = 3; \\ \mathfrak{S}_{\{2,5\}}, & \text{если } p = 5; \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathcal{P} \setminus \{2, 3, 5\}. \end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{F} = \text{LF}(f)$ и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Из $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что $G/F_p(G)$ – разрешимая группа для любого простого $p \in \pi(G)$. Так как $F(G) = \bigcap F_p(G)$, где $p \in \pi(G)$, то $G/F(G) \in \mathfrak{S}$, а значит, G разрешима. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Нетрудно показать, что

$$h(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_{\{2,3\}}, & \text{если } p = 2; \\ \mathfrak{S}_{\{2,3\}}, & \text{если } p = 3; \\ \mathfrak{N}_5(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_{\{2,5\}}), & \text{если } p = 5; \\ \emptyset, & \text{если } p \in \mathcal{P} \setminus \{2, 3, 5\}. \end{cases}$$

Рассмотрим $\text{LF}(h^{\mathfrak{S}})$. Используя теорему Бернсайда о разрешимости бипримарных групп, нетрудно видеть, что $h^{\mathfrak{S}}(p) = h(p)$ для любого простого p . Следовательно, $\text{LF}(h^{\mathfrak{S}}) = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. С другой стороны, заметим, что $A_5 \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{S}}$. Следовательно, $\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}} \neq \text{LF}(h^{\mathfrak{S}})$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{S}}$ нелокальна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carter R., Fischer B., Hawkes T. Extreme classes of finite soluble groups // J. Algebra. 1968. V. 9. №3. P. 285–313.
- [2] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
- [3] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1972.
- [4] Семенчук В. Н. Минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы // Алгебра и логика. 1979. Т. 18. №3. С. 348–382.
- [5] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups. III. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1982.
- [6] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1990.