Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Теоремы единственности для некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:12:30

УДК 517

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

В. В. Волчков

Изучаются различные классы функций, имеющих нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса. Для таких функций получено описание в виде ряда по специальным функциям и полностью решена задача о существовании ненулевой функции заданного роста с указанным свойством.

Библиография: 8 названий.

Введение. Пусть $n \geq 2$ – фиксированное натуральное число, $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$, f – локально суммируемая в $\mathbb{R}^n$ функция. Предположим, что при некотором фиксированном $r > 0$ и почти всех (по мере Лебега) $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int_{S(x,r)} f d\sigma = 0, \quad (1)$$

где $S(x, r)$ – сфера с центром x и радиусом r в $\mathbb{R}^n$ с ее нормированной поверхностной мерой $d\sigma$. Верно ли, что f – нулевая функция? В общем случае ответ отрицательный, однако при некоторых дополнительных предположениях равенство $f = 0$ имеет место. Одним из таких предположений является ограничение роста f на бесконечности. Первые результаты в этом направлении принадлежат Ф. Йону и Д. Смиту (см. [1], а также [2, с. 102]), которые установили, что если $f \in C(\mathbb{R}^n)$ с условием

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{(n-1)/2} f(x) = 0$$

удовлетворяет (1), то $f = 0$.

Отметим недавний результат С. Тангавелу: если при некотором $1 \leq p \leq 2n/(n-1)$ функция f с условием (1) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$, то $f = 0$. При $p > 2n/(n-1)$ это утверждение уже не имеет места (см. [3]).

Другой тип ограничений, обеспечивающих равенство $f = 0$, связан с увеличением числа возможных значений r в условии (1). Одним из наиболее ярких результатов в этом направлении является теорема о двух радиусах (см. [4]), утверждающая, что для выполнения равенства $f = 0$ достаточно, чтобы (1) имело место лишь при $r = r_1, r_2$, где r_1, r_2 – фиксированные положительные числа, отношение которых не равно отношению корней функции Бесселя $J_{n/2-1}$. При этом указанное условие для r_1, r_2 является, вообще говоря, необходимым.

Теоремы 1–3 данной работы являются существенным усилением сформулированных выше результатов, доказываются единым методом и носят окончательный характер.

1. Основные результаты. Всюду в дальнейшем p – фиксированное число из отрезка $[1, 2n/(n-1)]$, $R > 0$. Обозначим $\mu_p(R) = R^{n-(n-1)p/2}$ при $1 \leq p < 2n/(n-1)$ и $\mu_p(R) = \ln R$ при $p = 2n/(n-1)$. Пусть

$$M_R(f)_p = \int_{|x| \leq R} |f|^p dx.$$

Как обычно, $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – класс функций f , для которых $M_R(f)_p < \infty$ при всех R .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ – фиксировано и для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено (1). Тогда

1) если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(f)_p}{\mu_p(R)} = 0,$$

то $f = 0$;

2) существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с условием (1), для которой $M_R(f)_p/\mu_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

В частности, если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, из теоремы 1 следует результат С. Тангавелу [3]. При $p = 1$ получаем сформулированные выше теоремы Ф. Йона и Д. Смита [1], [2, с. 102].

Пусть E – множество чисел вида α/β , где

$$J_{n/2-1}(\alpha) = J_{n/2-1}(\beta) = 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f, g \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяют (1) при фиксированных $r = r_1, r_2$ соответственно и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- 1) если $r_1/r_2 \notin E$ и $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R(f-g)_p/\mu_p(R) = 0$, то $f = g = 0$;
- 2) если $r_1/r_2 \in E$ и $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R(f-g)_p/\mu_p(R) = 0$, то $f = g$ и существуют ненулевые функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие условию теоремы;
- 3) при любых фиксированных $r_1, r_2 > 0$ существуют ненулевые и различные функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие условию теоремы, для которых $M_R(f-g)_p/\mu_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

В частности, при $f = g$ отсюда следует теорема о двух радиусах [4]. Полагая $g = 0$, получим первое утверждение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет (1) при фиксированном $r = r_1$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что при фиксированном $r_2 > 0$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ определена функция $F \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами:

$$\text{а) } F(x) = \int_{S(x, r_2)} f d\sigma, \quad \text{б) } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(F)_p}{\mu_p(R)} = 0.$$

Тогда

- 1) если $r_1/r_2 \notin E$, то $f = 0$;
- 2) если $r_1/r_2 \in E$, то существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условию теоремы;
- 3) для любых фиксированных $r_1, r_2 > 0$ существует ненулевая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с условием (1) при $r = r_1$ такая, что $M_R(F)_p/\mu_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

В частности, если $F = 0$, из первого утверждения снова получаем теорему о двух радиусах [4].

Результаты данной работы докладывались на семинаре профессора Л. Зальцмана во время визита автора в университет Бар-Илана (Израиль). Автор благодарит профессора Л. Зальцмана за приглашение и теплый прием, а также профессоров М. Л. Аграновского, Л. А. Айзенберга за полезные обсуждения.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, ρ, σ – полярные координаты в $\mathbb{R}^n$ (для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $|x| = \rho$, а если $x \neq 0$, то $x/\rho = \sigma \in S$). Как обычно, $SO(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$ с нормированной мерой Хаара dg . Обозначим $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq l \leq a_k$, – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k (см. [5, с. 160]), которое рассматривается как подпространство $L^2(S, d\sigma)$. Всякой функции $f \in C(\mathbb{R}^n)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (2)$$

$$f_{kl}(\rho) = \int_S f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (3)$$

Отметим также равенство

$$f_{kl}(\rho) Y_m^{(k)}(\sigma) = a_k \int_{SO(n)} f(g^{-1}x) \overline{t_{lm}^k(g)} dg, \quad (4)$$

где $t_{lm}^k(g)$ – элементы матрицы квазирегулярного представления группы $SO(n)$ (см. [6]).

Далее, как обычно, Δ – оператор Лапласа, $\text{supp } f$ – носитель функции f , $\varphi * \psi$ – свертка функций φ и ψ , $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – множество функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем. Для фиксированного $r > 0$ обозначим V_r – множество функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых выполнено (1) при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть еще $\Lambda = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ – возрастающая последовательность всех положительных корней $J_{n/2-1}$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда при всех $k \geq 0$, $1 \leq l \leq a_k$

$$\int_0^R |f_{kl}(\rho)|^p \rho^{n-1} d\rho < c M_R(f)_p,$$

где постоянная c не зависит от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) и неравенства Гёльдера имеем

$$|f_{kl}(\rho)|^p < c \int_S |f(\rho\sigma)|^p d\sigma.$$

Отсюда и из определения $M_R(f)_p$ следует требуемое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } \varphi \subset B_\varepsilon$. Тогда $M_R(f * \varphi)_p < M_{R+\varepsilon}(f)_p$, где постоянная c не зависит от R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$M_R(f * \varphi)_p < c_1 \int_{B_\varepsilon} \left(\int_{B_R} |f(x-y)|^p dx \right) dy < c M_{R+\varepsilon}(f)_p,$$

что и требовалось.

ЛЕММА 3. Пусть $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ – последовательность попарно различных действительных чисел, $u_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |u_m| < \infty \quad u \quad u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m e^{i\alpha_m t}.$$

Тогда если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_p(R)} \int_1^R |u(t)|^4 d\mu_p(t) = 0,$$

то все $u_m = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t) = |u(t)|^2$, тогда

$$v(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m e^{i\beta_m t},$$

где $\{\beta_m\}$ – последовательность попарно различных действительных чисел, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |v_m|$ конечна и одно из чисел v_m равно $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2$. Имеем

$$\int_1^R |v(t)|^2 d\mu_p(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |v_m|^2 \int_1^R d\mu_p(t) + \sum_{k \neq l} v_k \bar{v}_l \int_1^R e^{i(\beta_k - \beta_l)t} d\mu_p(t).$$

Поскольку при $k \neq l$

$$\int_1^R e^{i(\beta_k - \beta_l)t} d\mu_p(t) = o(\mu_p(R))$$

при $R \rightarrow \infty$, из условия леммы 3 и полученного равенства следует $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |v_m|^2 = 0$, откуда $u_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{Z}$.

3. Свойства функций класса V_r .

ЛЕММА 4. Пусть $f \in V_r$. Тогда

- 1) $f_{kl}(\rho) Y_m^{(k)}(\sigma) \in V_r$ при всех $k \geq 0$;
- 2) все частные производные от функции f принадлежат V_r , в частности, если $f = f(\rho)$, то при любом $m \in \mathbb{N}$

$$(\Delta^m f)(\rho) = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^m f(\rho) \in V_r$$

$$u(\Delta^m f)(r) = 0;$$

- 3) если f имеет вид $f(x) = u(\rho)Y(\sigma)$ при некотором $Y \in \mathcal{H}_k$, $k \geq 1$, то

$$\left(u'(\rho) + \frac{n+k-1}{\rho} u(\rho) \right) Y_l^{(k-1)}(\sigma) \in V_r$$

при всех $1 \leq l \leq a_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из (4) и определения V_r . Для доказательства второго утверждения достаточно продифференцировать (1). Далее, если в (1) заменить f на $\Delta^m f$ и положить $x = 0$, то для радиальных f получим $(\Delta^m f)(r) = 0$.

Третье утверждение следует из утверждений 1, 2 (см. [6]).

ЛЕММА 5. Пусть $f = f(\rho) \in V_1$. Тогда

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_{n/2-1}(\nu_m \rho) \rho^{1-n/2},$$

где $c_m = O(\nu_m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $f(t)t^{n/2-1}$ на $[0, 1]$ в ряд Фурье–Бесселя (см. [7, с. 270]):

$$f(t)t^{n/2-1} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_{n/2-1}(\nu_m t).$$

Из определения c_m [7, с. 270] и утверждения 2 леммы 4 следует (см. [7, с. 280]), что

$$2(-1)^q \nu_m^{-2q} \int_0^1 \rho^{n/2} (\Delta^q f)(\rho) J_{n/2-1}(\nu_m \rho) d\rho = c_m J_{n/2}^2(\nu_m)$$

при любом $q \in \mathbb{N}$. Отсюда $c_m = O(\nu_m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$ (см. [7, с. 282]). Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_{n/2-1}(\nu_m \rho) \rho^{1-n/2}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}^n$ и его сумма (которую обозначим $g(\rho)$) удовлетворяет (1) при $r = 1$ (см. [8, с. 289]) и совпадает с $f(\rho)$ в B_1 . Более того, этот ряд допускает почленное дифференцирование любое число раз (см. [7, с. 286]), откуда $g \in V_1$. Тогда функция $h = f - g \in V_1$ и равна нулю в B_1 . По теореме единственности Ф. Йона [1] (см. также [2, с. 103] для случая $n = 3$) имеем $h = 0$ в $\mathbb{R}^n$, откуда следует утверждение леммы 5.

ЛЕММА 6. Пусть $f \in V_r$. Тогда каждый коэффициент ряда (2) имеет вид

$$f_{kl}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} \frac{J_{n/2+k-1}(\nu_m \rho/r)}{\rho^{n/2-1}}, \quad (5)$$

где $c_{m,k,l} = O(\nu_m^{-\alpha})$ при $m \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 $f_{kl}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r$. Отсюда и из леммы 5 имеем (5) при $k = 0$. При $k \geq 0$ утверждение леммы 6 получается индукцией по k с использованием утверждения 3 леммы 4 и соотношений между бесселевыми функциями с различными индексами (см. [7, с. 250]).

4. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть сначала $f \in V_r$. По лемме 6 для f_{kl} имеем разложение (5). Используя асимптотику для функций Бесселя (см. [7, с. 259]), из (5) получаем

$$f_{kl}(\rho)\rho^{n/2-1} = u(\rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где

$$u(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{m,k,l}}{\sqrt{\nu_m}} \operatorname{Re}(\alpha e^{i\nu_m \rho}), \quad \alpha = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e^{-i\pi(n+2k-1)/4}.$$

При $R > 1$ отсюда следует, что

$$\int_1^R |u(\rho)|^4 d\mu_p(\rho) \leq \|u\|_{\infty}^{4-p} \int_1^R |u(\rho)|^p d\mu_p(\rho) \leq c_1 \int_1^R \rho^{n-1} |f_{kl}(\rho)|^p d\rho + c_2(R),$$

где постоянная c_1 не зависит от R , а $c_2(R) = o(\mu_p(R))$ при $R \rightarrow \infty$. Если

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(f)_p}{\mu_p(R)} = 0,$$

из этой оценки и лемм 1, 3 получаем $c_{m,k,l} = 0$, откуда $f_{kl} = 0$. Отсюда следует первое утверждение теоремы 1 для $f \in V_r$.

В случае $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим функцию $f * \varphi$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * \varphi \in V_r$ и по лемме 2 $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R(f * \varphi)_p / \mu_p(R) = 0$. По доказанному выше $f * \varphi = 0$ и из произвольности φ имеем $f = 0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 рассмотрим функцию

$$f(\rho) = J_{n/2-1}(\alpha\rho)\rho^{1-n/2}, \quad \alpha r \in \Lambda.$$

Из теоремы о среднем для уравнения Гельмгольца получаем, что $f \in V_r$. Кроме того, из известных оценок для функций Бесселя [7, с. 259] следует, что $M_R(f)_p / \mu_p(R) = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится совершенно аналогично. Как и выше, можно считать $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для разности $f_{kl} - g_{kl}$ имеем разложение вида (5), и если $r_1/r_2 \notin E$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(f - g)_p}{\mu_p(R)} = 0,$$

то, как и выше, получаем $f_{kl} = g_{kl} = 0$. Отсюда следует, что $f = g = 0$. Если же $r_1/r_2 \in E$, то таким же образом получаем $f_{kl} - g_{kl} = 0$ и $f = g$. В этом случае $r_1/r_2 = \alpha/\beta$ при некоторых $\alpha, \beta \in \Lambda$. Полагая $\lambda = \alpha/r_1 = \beta/r_2$, как и выше получаем, что функции $f = g = J_{n/2-1}(\lambda\rho)\rho^{1-n/2}$ удовлетворяют условиям второго утверждения теоремы 2.

Всем требованиям третьего утверждения теоремы 2 удовлетворяют функции

$$f = J_{n/2-1}\left(\frac{\alpha\rho}{r_1}\right)\rho^{1-n/2}, \quad g = J_{n/2-1}\left(\frac{\beta\rho}{r_2}\right)\rho^{1-n/2},$$

где $\alpha, \beta \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Второе утверждение теоремы известно даже в случае $F = 0$ (см. [4]). Условием третьего утверждения удовлетворяет функция

$$f = \rho^{1-n/2} J_{n/2-1} \left(\frac{\alpha \rho}{r_1} \right),$$

где $\alpha \in \Lambda$. Докажем первое утверждение. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Тогда $F * \varphi = f * \psi$, где

$$\psi(x) = \int_{S(x, r_2)} \varphi d\sigma.$$

Отсюда следует, что $F * \varphi \in V_{r_1}$. Кроме того, из условия и леммы 2 получаем

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{M_R(F * \varphi)_p}{\mu_p(R)}.$$

По теореме 1 $F * \varphi = 0$ и $F = 0$ в силу произвольности φ . Поскольку $r_1/r_2 \notin E$, из [4] следует, что $f = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
- [2] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
- [3] Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group. Preprint: Cornell Univ. (Ithaca, NY 14850), 1984.
- [4] Zalcman L. Offbeat integral geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 37. № 161–175.
- [5] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [6] Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 41–49.
- [7] Толстов Г. П. Ряды Фурье. 3-е изд. М.: Наука, 1980.
- [8] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Донецкий государственный университет

Поступило
23.08.94