Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, Бильярды в рациональных многоугольниках: периодические траектории, симметрии, d -устойчивость, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 66–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:37:27

УДК 517.938

БИЛЬЯРДЫ В РАЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ: ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ, СИММЕТРИИ, d -УСТОЙЧИВОСТЬ

Я. Б. Воробец

В статье рассматриваются периодические траектории бильярдов в рациональных многоугольниках, удовлетворяющих альтернативе Вича, в том числе в прямоугольных треугольниках с одним острым углом вида π/n , где n – целое.

Среди затрагиваемых вопросов: симметричность периодических траекторий, асимптотика числа траекторий, не превышающих заданной длины, устойчивость периодических бильярдных траекторий к малым деформациям многоугольника.

Библиография: 5 названий.

Введение. *Бильярдный поток* в многоугольнике Q описывает прямолинейное движение точки внутри Q с единичной скоростью, с отражением от границы многоугольника по закону “угол падения равен углу отражения”. Фазовым пространством потока является прямое произведение Q на окружность “единичных скоростей” S^1 , с необходимыми отождествлениями на его границе, вытекающими из закона отражения. Проекция фазовой кривой на многоугольник называется *бильярдной траекторией*. Бильярдная траектория, попадающая в вершину Q , называется *особой*, ее дальнейшее продолжение, вообще говоря, не определено. Траектория, выходящая из одной вершины многоугольника и заканчивающаяся в другой вершине (т.е. двусторонне особая), называется *обобщенной диагональю*.

В дальнейшем предполагается, что многоугольник Q *рационален*, т.е. угол между любыми двумя его сторонами рационально соизмерим с π . При этом все звенья фиксированной бильярдной траектории параллельны лишь конечному числу направлений. В результате фазовое пространство $Q \times S^1$ разбивается на инвариантные поверхности, “склеенные” из конечного числа копий многоугольника Q (вида $Q \times \{\bar{v}\}$, $\bar{v} \in S^1$). Все эти поверхности, кроме двух исключительных, гомеоморфны одной и той же связанной компактной ориентируемой поверхности M и согласованным образом задают на ней *плоскую структуру*, т.е. риманову метрику нулевой кривизны с конечным числом конических особых точек, угол в каждой особой точке кратен 2π (подробнее см., например, в [1]).

О бильярдных потоках в многоугольниках общего вида известно немного. В то время как бильярды в рациональных многоугольниках изучены достаточно хорошо.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00713, и Международного научного фонда, грант M1E300.

В этой статье рассматривается ряд вопросов о периодических бильярдных траекториях в рациональном многоугольнике, для которого соответствующая поверхность с плоской структурой имеет богатую группу аффинных симметрий (подробнее см. в п. 1). Такие многоугольники рассматривались в работе [1]. Их важнейшим свойством является обнаруженная Вичем [2] альтернатива: каждая неособая траектория бильярда либо периодична, либо равномерно распределена в многоугольнике.

Среди рассматриваемых ниже вопросов – симметричность периодических траекторий, асимптотика числа периодических траекторий длины не больше R , деформационная устойчивость периодических траекторий в многоугольнике (т.е. устойчивость к малым деформациям многоугольника). Один из результатов статьи (о деформационной неустойчивости всех периодических бильярдных траекторий в прямоугольном треугольнике с острым углом вида $\pi/(2n)$, где n – целое) был анонсирован в [3].

Автор благодарен А. М. Стёпину за полезные замечания и обсуждения.

1. Аффинные симметрии. Уточним определение плоской структуры, данное во введении. Итак, мы имеем на поверхности M риманову метрику нулевой кривизны с конечным числом особых точек, в каждой из которых – коническая особенность с углом $2\pi t$, где t – натуральное число (*кратность* особой точки). При этом у произвольной неособой точки $x \in M$ найдется окрестность U_x , изометричная некоторой области в $\mathbb{R}^2$. Каждое изометрическое вложение окрестности в $\mathbb{R}^2$ задает в U_x локальную систему декартовых координат. Системы координат, задаваемые разными вложениями, отличаются на поворот, сдвиг и, возможно, отражение. Ввиду того, что группа голономии рассматриваемой римановой метрики на M тривиальна, можно выбрать локальные декартовы координаты в окрестности каждой неособой точки так, чтобы в пересечении любых двух окрестностей соответствующие системы координат отличались только сдвигом. Такой набор локальных систем координат назовем *декартовыми координатами* на поверхности M . В дальнейшем под *плоской структурой* подразумевается риманова метрика указанного выше вида, снабженная декартовыми координатами.

Каждую кривую на поверхности M посредством декартовых координат можно перенести в $\mathbb{R}^2$, получив ее *развертку* – плоскую кривую, определенную однозначно с точностью до всевозможных сдвигов в $\mathbb{R}^2$. Далее будут рассматриваться периодические геодезические на M и *седловязки* – геодезические отрезки, соединяющие особые точки. Их развертки являются отрезками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Аффинной симметрией* плоской структуры ω на поверхности M называется гомеоморфизм поверхности M на себя, который переводит особые точки плоской структуры в особые, а в окрестности каждой неособой точки является аффинным отображением в локальных декартовых координатах, соответствующих ω .

Для любой аффинной симметрии однозначно определена ее линейная (однородная) часть – некоторая матрица размера 2×2 с определителем ± 1 . *Стабилизатором* $\Gamma(\omega)$ плоской структуры ω называется группа, состоящая из линейных частей аффинных симметрий, сохраняющих ориентацию поверхности. Стабилизатор является дискретной подгруппой в $SL(2, \mathbb{R})$ (см. [1], [2]). Принято говорить, что плоская структура ω имеет большое число аффинных симметрий, если $\Gamma(\omega)$ – решетка в группе $SL(2, \mathbb{R})$, т.е. однородное пространство $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma(\omega)$ имеет конечный объем.

Пусть известно, что $\Gamma(\omega)$ содержит некоторую решетку Γ . Поскольку стабилизатор – дискретная подгруппа в $SL(2, \mathbb{R})$, он также является решеткой, и Γ – подгруппа конечного индекса в $\Gamma(\omega)$. Ниже будет сформулировано достаточное условие для того, чтобы Γ совпадала со всем стабилизатором $\Gamma(\omega)$. Предварительно введем некоторые определения. Пусть $\vec{v} \in S^1$ – вектор, параллельный седлосвязке плоской структуры ω . Согласно альтернативе Вича (см. [1], [2]) все неособые геодезические, параллельные $\vec{v}$, периодичны и образуют конечное число пучков, разделяемых седлосвязками. *l-последовательностью* для направления $\vec{v}$ назовем набор длин указанных пучков, *r-последовательностью* для $\vec{v}$ назовем набор отношений длины к ширине для тех же пучков. При этом все элементы *r-последовательности* соизмеримы друг с другом (см. [1]).

Далее, напомним, что важной характеристикой произвольной решетки $\Gamma \in SL(2, \mathbb{R})$ является число ее *параболических вершин* (каспов), т.е. наибольшее число вершин на абсолюте у фундаментального многоугольника для действия Γ на плоскости Лобачевского (см. [4]), попарно не отождествляемых этим действием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть стабилизатор $\Gamma(\omega)$ плоской структуры ω содержит решетку Γ , имеющую k параболических вершин. Предположим, что нашлось в точности k направлений $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in S^1$, параллельных седлосвязкам структуры ω , таких, что для каждой пары направлений $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$ ($i \neq j$) соответствующие им *r-последовательности* или *l-последовательности* не совпадают с точностью до перестановки членов и умножения их всех на одно и то же число. Тогда $\Gamma(\omega) = \Gamma$, если всякий элемент $a \in \Gamma(\omega)$ такой, что $a\vec{v}_1 = \pm\vec{v}_1$, содержится в Γ . Последнее условие имеет место, например, при одновременном выполнении следующих требований:

- i) Γ содержит оператор b такой, что $b\vec{v}_1 = \vec{v}_1$, $b\vec{u}_1 = \vec{u}_1 + r\vec{v}_1$, где $\vec{u}_1$ – единичный вектор, ортогональный $\vec{v}_1$, r – наименьшее положительное число, которое делится нацело на каждый элемент *r-последовательности* для направления $\vec{v}_1$;
- ii) для некоторого $l \neq 0$ аффинными симметриями ω с линейными частями из Γ можно реализовать любую перестановку на (непустом) множестве седлосвязок с разверткой $l\vec{v}_1$;
- iii) хотя бы одна седлосвязка с разверткой $l\vec{v}_1$ принадлежит общей части границы двух неконгруэнтных периодических пучков, или же все такие седлосвязки переводятся в себя некоторой аффинной симметрией с линейной частью -1 , $-1 \in \Gamma$;
- iv) все седлосвязки, параллельные $\vec{v}_1$, входят в множество U , полученное из поверхности M после удаления из нее тех пучков периодических геодезических, параллельных $\vec{v}_1$, компонента границы которых содержит две седлосвязки равной длины, а также удаления особых точек; вдобавок, каждая компонента связности множества U содержит седлосвязку с разверткой $l\vec{v}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем со следующего замечания. Пусть $\vec{v}$ – вектор, параллельный седлосвязке структуры ω , γ – элемент $\Gamma(\omega)$. Тогда пучки периодических геодезических, параллельные $\vec{v}$, аффинной симметрией с линейной частью γ переводятся в пучки периодических геодезических, параллельные $\gamma\vec{v}$. Отсюда следует, что *l-последо-*

вательности для направлений $\bar{v}$ и $\gamma\bar{v}$ совпадают с точностью до перестановки членов и умножения их всех на одно и то же число. Тем же свойством обладают и r -последовательности для $\bar{v}$ и $\gamma\bar{v}$.

Поскольку Γ – решетка в $SL(2, \mathbb{R})$ с k параболическими вершинами, можно выбрать k ненулевых векторов $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ так, что любой вектор, который переходит в себя под действием нетождественного элемента решетки, некоторым элементом Γ переводится в вектор, коллинеарный одному из выбранных (см. [1, п. 3.4]). Согласно альтернативе Вича [1, теорема 3.4] для вектора $\bar{v}$, параллельного седлосвязке, найдется элемент $a \in \Gamma(\omega)$, $a \neq 1$, такой, что $a\bar{v} = \bar{v}$. Группа Γ имеет конечный индекс в $\Gamma(\omega)$, поэтому среди смежных классов $\Gamma, a\Gamma, a^2\Gamma, \dots$ только конечное число различных. Тогда $a^n \in \Gamma$ для некоторого целого $n > 0$. Имеем $a^n\bar{v} = \bar{v}$, $a^n \neq 1$, и, следовательно, вектор $\bar{v}$ оператором из Γ переводится в вектор, коллинеарный некоторому $\bar{e}_s$. Ввиду приведенного выше свойства l - и r -последовательностей векторы $\bar{v}_i$ и $\bar{v}_j$ ($i \neq j$) не могут переводиться в векторы, коллинеарные одному и тому же $\bar{e}_s$. Отсюда следует, что в качестве $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k$ можно взять векторы $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$.

Пусть φ – произвольная аффинная симметрия плоской структуры ω , a – ее линейная часть. Как показано выше, вектор $(\gamma a)\bar{v}_1$ при некотором $\gamma \in \Gamma$ коллинеарен некоторому $\bar{v}_i$. Из условия предложения следует, с учетом свойств l - и r -последовательностей, что $\bar{v}_i = \bar{v}_1$, т.е. $(\gamma a)\bar{v}_1 = \lambda\bar{v}_1$. Оператор γa переводит развертку седлосвязки в развертку седлосвязки, а так как седлосвязок, параллельных $\bar{v}_1$, конечное число, имеем $\lambda = \pm 1$. Поскольку $\gamma a \notin \Gamma$, если $a \notin \Gamma$, утверждение 1) доказано.

Перейдем к утверждению 2). Пусть φ – аффинная симметрия с линейной частью a , $a\bar{v}_1 = \pm\bar{v}_1$. Докажем, что $a \in \Gamma$. Ввиду условия ii) найдется аффинная симметрия φ_1 с линейной частью $a_1 \in \Gamma$ такая, что $\varphi_1\varphi$ переводит в себя каждую седлосвязку с разверткой $l\bar{v}_1$. При этом $(a_1 a)\bar{v}_1 = \pm\bar{v}_1$. Более того, симметрию φ_1 можно выбрать так, чтобы $(a_1 a)\bar{v}_1 = \bar{v}_1$. Действительно, если $(a_1 a)\bar{v}_1 = -\bar{v}_1$, то любые два пучка периодических геодезических, имеющих на границе общую седлосвязку с разверткой $l\bar{v}_1$, переходят друг в друга при аффинной симметрии $\varphi_1\varphi$, что влечет конгруэнтность этих пучков. В этом случае можно “подправить” симметрию φ_1 , воспользовавшись условием iii).

Теперь рассмотрим произвольный пучок периодических траекторий, параллельных $\bar{v}_1$. Если на его границе есть седлосвязка, неподвижная относительно симметрии $\varphi_1\varphi$, то таковыми будут все седлосвязки, ограничивающие пучок с той же стороны. А если среди седлосвязок, ограничивающих пучок с другой стороны, нет равных по длине, $\varphi_1\varphi$ оставляет на месте и их. Отсюда с учетом условия iv) и того, что $\varphi_1\varphi$ оставляет неподвижными седлосвязки с разверткой $l\bar{v}_1$, получаем, что $\varphi_1\varphi$ оставляет неподвижными вообще все седлосвязки, параллельные $\bar{v}_1$. В этом случае симметрия $\varphi_1\varphi$ переводит в себя каждый пучок геодезических, параллельных $\bar{v}_1$, поэтому ее линейная часть есть степень оператора b из условия i), т.е. принадлежит Γ . Тогда и $a \in \Gamma$. Предложение доказано.

Ниже будут рассматриваться плоские структуры, каноническим образом построенные по рациональным треугольникам с двумя углами вида π/n и π/m , где n, m – натуральные числа. Соответствующая плоская структура обозначается через $\tilde{\omega}_{n,m}$, поверхность, на которой она задана, – через $M_{n,m}$. Поверхность $M_{n,m}$ “склеена” из правильных n - и m -угольников с равной стороной таким образом, что каждая сторона произвольного n -угольника отождествляется со стороной некоторого m -угольника

(см. [1]). При этом все вершины правильных многоугольников отождествляются, образуя одну особую точку плоской структуры $\tilde{\omega}_{n,m}$. Кроме указанной особой точки, есть и другие – центры многоугольников. Все последние имеют кратность 1, поэтому их можно объявить неособыми точками. В результате получаем новую плоскую структуру, которую обозначим $\omega_{n,m}$. Стороны правильных многоугольников являются кратчайшими седлосвязками плоской структуры $\omega_{n,m}$. Декартовы координаты на поверхности $M_{n,m}$ выберем таким образом, чтобы одна из этих кратчайших седлосвязок была горизонтальной.

На первый взгляд, различие между плоскими структурами $\omega_{n,m}$ и $\tilde{\omega}_{n,m}$ чисто формальное. Тем не менее, их стабилизаторы могут сильно различаться (см. п. 3).

Пусть k – целое число, а l – целое число или ∞ , причем оба числа не меньше 2 и хотя бы одно из них строго больше 2. Через $\Gamma_{k,l}$ обозначим подгруппу в $SL(2, \mathbb{R})$, порожденную элементами

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{k} & -\sin \frac{\pi}{k} \\ \sin \frac{\pi}{k} & \cos \frac{\pi}{k} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tau_{k,l} = \begin{pmatrix} 1 & 2L_{k,l} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$L_{k,l} = \frac{\cos \frac{\pi}{k} + \cos \frac{\pi}{l}}{\sin \frac{\pi}{k}}, \quad L_{k,\infty} = \frac{\cos \frac{\pi}{k} + 1}{\sin \frac{\pi}{k}} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2k}.$$

Группа $\Gamma_{k,l}$ является решеткой (см. [1]). Она имеет одну параболическую вершину, если l конечно, и две вершины при $l = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Справедливы равенства:*

- 1) $\Gamma(\omega_{n,n}) = \Gamma(\omega_{2,n}) = \Gamma_{n,2}$ при нечетном n ;
- 2) $\Gamma(\omega_{n,n}) = \Gamma(\omega_{2,n}) = \Gamma_{n/2,\infty}$ при четном $n \geq 6$;
- 3) $\Gamma(\omega_{n,2n}) = \Gamma_{n,3}$ при любом n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что каждый из перечисленных стабилизаторов содержит соответствующую решетку, показано в [1, теорема 4.4]. Для доказательства утверждения о равенстве соответствующих групп воспользуемся предложением 1.1. В качестве $\bar{v}_1$ во всех случаях выбираем горизонтальное направление. Решетка $\Gamma_{n/2,\infty}$ имеет две параболические вершины, поэтому для плоских структур $\omega_{n,n}$ и $\omega_{2,n}$ (n – четное) выберем направление $\bar{v}_2$ под углом π/n к горизонтальному. При этом для плоских структур вида $\omega_{2,n}$, где n делится на 4, в r -последовательности, соответствующей направлению $\bar{v}_2$, все члены равны, а в r -последовательности, соответствующей направлению $\bar{v}_1$, один из членов вдвое меньше остальных, если $n \geq 8$. Что касается плоских структур $\omega_{n,n}$ (n – четное) и $\omega_{2,n}$ (n – четное, не делящееся на 4), то для них r -последовательности, соответствующие направлениям $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, имеют разную длину (а именно, первая последовательность на единицу короче второй). Тем самым, проверено одно из условий предложения 1.1.

Проверим теперь выполнение условий i)–iv). Условие i) во всех рассматриваемых случаях было установлено в [1], а именно, там показано, что в качестве оператора b можно взять оператор $\tau_{n,m}$ – одну из порождающих соответствующей решетки $\Gamma = \Gamma_{n,m}$. Далее, положим l равным длине кратчайшей седлосвязки. Тогда $\omega_{2,n}$ (n – любое) имеет одну седлосвязку с разверткой $l\bar{v}_1$, а $\omega_{n,n}$ (n – четное) и $\omega_{n,2n}$ – две седлосвязки, которые переводятся друг в друга аффинной симметрией с линейной частью ± 1 . Заметим, что

$-1 \in \Gamma_{n,m}$. При этом у плоской структуры $\omega_{n,2n}$ седлосвязки с разверткой $l\bar{v}_1$ ограничивают два неконгруэнтных пучка, у всех остальных – переходят в себя при аффинной симметрии с линейной частью -1 . Наконец, параллельный $\bar{v}_1$ периодический пучок, компонента границы которого содержит две седлосвязки равной длины, есть только у плоской структуры $\omega_{n,n}$ при n , делящемся на 4. Это пучок, содержащий центры правильных n -угольников, образующих поверхность $M_{n,n}$; после его удаления поверхность (без особой точки) распадается на две связанные компоненты, каждая из которых содержит по седлосвязке с разверткой $l\bar{v}_1$. Итак, условия i)–iv) проверены.

2. Симметричные периодические траектории. Как заметил Стёпин (см., например, [5]), бильярдная траектория в рациональном многоугольнике, запущенная перпендикулярно какой-нибудь стороне, либо периодична, либо является обобщенной диагональю. Соответствующее рассуждение можно перенести с бильярдных траекторий на траектории (т.е. геодезические) плоских структур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Аффинное отражение* плоской структуры – это аффинная симметрия, линейная часть которой является оператором отражения относительно прямой (не обязательно ортогональным) и которая имеет хотя бы одну неособую неподвижную точку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Траектория плоской структуры называется *симметричной*, если найдется аффинное отражение, которое переводит вектор, параллельный этой траектории, в противоположный и оставляет неподвижной хотя бы одну точку траектории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Симметричная траектория плоской структуры либо периодична, либо является седлосвязкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – симметричная траектория, $\bar{v}$ – ее направляющий вектор, а точка $x \in L$ и аффинное отражение S таковы, что $Sx = x$ и $S\bar{v} = -\bar{v}$. Пусть, далее, $\bar{u}$ – вектор, переводящийся отражением S в себя, и L_1 – траектория, проходящая через точку x параллельно вектору $\bar{u}$. Каждую точку $y \in L_1$ отражение S оставляет неподвижной (отсюда, кстати, следует, что замыкание L_1 не имеет внутренних точек, т.е. L_1 конечна). Траектория L пересекает L_1 в точке x . Если L не седлосвязка, то она пересечет L_1 еще раз, скажем, в некоторой точке y . Обозначим через $[x, y]$ отрезок траектории L от точки x до точки y . Так как $S\bar{v} = -\bar{v}$, отрезки $S([x, y])$ и $[x, y]$ являются смежными отрезками траектории L . При этом вся L есть объединение этих отрезков, следовательно, она периодична.

Утверждение о бильярдных траекториях, выпущенных перпендикулярно стороне многоугольника, оказывается частным случаем доказанного. Действительно, пусть x – точка на стороне a рационального многоугольника Q и L – бильярдная траектория, выпущенная из x перпендикулярно стороне a . Рассмотрим поверхность M с плоской структурой, в которую вкладывается многоугольник Q . Бильярдная траектория L выпрямляется до траектории L_1 плоской структуры. Отражение относительно стороны a порождает аффинное (ортогональное) отражение S плоской структуры. Траектория L_1 очевидным образом симметрична относительно отражения S , и по доказанному она либо периодична, либо является седлосвязкой. Отсюда следует, что бильярдная траектория L либо периодична, либо является обобщенной диагональю.

Для плоских структур со стабилизатором-решеткой, рассмотренных в п. 1, предложение 2.1 допускает обращение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для плоских структур вида $\omega_{n,n}$, $\omega_{2,n}$, $\omega_{n,2n}$ каждая периодическая траектория и каждая седлосвязка является симметричной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – аффинное отражение, а T – аффинная симметрия плоской структуры, и L – траектория, симметричная относительно отражения S . Тогда TST^{-1} – аффинное отражение, относительно которого симметрична траектория $T(L)$. Таким образом, аффинная симметрия переводит симметричную траекторию в симметричную. Между тем, из доказательств предложений 1.1 и 1.2 вытекает, что любая конечная траектория (периодическая или седлосвязка) плоской структуры, из тех, что упомянуты в условии, переводится аффинной симметрией либо в траекторию, параллельную кратчайшей седлосвязке, либо для плоских структур $\omega_{n,n}$ и $\omega_{2,n}$, где n четно, – в траекторию, параллельную или идущую под углом π/n к кратчайшей седлосвязке. А все такие траектории симметричны, причем соответствующее аффинное отражение можно выбрать ортогональным.

3. Пучки периодических бильярдных траекторий. Пусть Q – рациональный многоугольник, ω – соответствующая ему плоская структура на поверхности M . В [1] рассматривались величины $N_0(R)$, $N(R)$, $S(R)$, $N^*(R)$, $S^*(R)$, обозначающие соответственно число седлосвязок ω длины не более R , число и суммарную площадь некрatных пучков периодических траекторий длины не более R , затем то же число и суммарную площадь – уже с учетом кратных пучков (траектории в кратном пучке суть несколько раз пройденные траектории меньшей длины). По аналогии с этим введем в рассмотрение величины $\tilde{N}_0(R)$, $\tilde{N}(R)$, $\tilde{S}(R)$, $\tilde{N}^*(R)$, $\tilde{S}^*(R)$, характеризующие бильярдный поток в Q . Вместо седлосвязок здесь подсчитываются обобщенные диагонали, вместо пучков периодических геодезических – пучки периодических бильярдных траекторий. Площадь некрatного пучка периодических траекторий при этом называем произведение его длины на ширину (оно больше, чем площадь подмножества Q , занимаемого траекториями пучка). Площадь кратного пучка есть по определению площадь соответствующего некрatного пучка.

Пусть k – порядок группы K , порожденной линейными частями отражений относительно сторон многоугольника Q . Естественная проекция $\pi: M \rightarrow Q$ является k -листной, поэтому обобщенная диагональ многоугольника, как правило, является образом k седлосвязок плоской структуры ω . Аналогично, пучок периодических бильярдных траекторий есть образ k периодических пучков траекторий геодезического потока на M (имеющих такую же площадь). Исключение составляют обобщенные диагонали и периодические траектории, чьи звенья направлены вдоль неподвижных векторов отражений из K . Такие обобщенные диагонали и периодические пучки (их конечное число) могут иметь $k/2$ или k прообразов. (Заметим, что периодический пучок, имеющий $k/2$ прообразов, содержит внутри себя одну траекторию длины вдвое меньшей, нежели длина пучка, – нечетнозвенную периодическую траекторию [5].) Таким образом, с точностью до постоянного слагаемого $N_0(R) = k\tilde{N}_0(R)$, $N(R) = k\tilde{N}(R)$ и т.д. Если стабилизатор $\Gamma(\omega)$ – решетка, то согласно [1, теорема 3.13] все величины $\tilde{N}_0(R)$, $\tilde{N}(R)$, $\tilde{S}(R)$, $\tilde{N}^*(R)$, $\tilde{S}^*(R)$ имеют при $R \rightarrow \infty$ асимптотику вида $cR^2 + o(R^2)$, где c – положительная постоянная. Если же стабилизатор-решетку имеет плоская структура, отличающаяся от ω лишь устранимыми особыми точками, то указанную асимптотику, по-прежнему, имеют величины $\tilde{S}(R)$ и $\tilde{S}^*(R)$ (так как соответствующие плоской структуре величины $S(R)$ и $S^*(R)$ не зависят от устранимых особых точек); об остальных этого утверждать нельзя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Стабилизаторы плоских структур $\tilde{\omega}_{2,n}$ и $\tilde{\omega}_{n,n}$ являются решетками при четном $n > 2$ и не являются решетками при нечетном $n > 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n четно. Покажем, что решетка $\Gamma_{n/2,\infty}$ – стабилизатор плоских структур $\omega_{2,n}$ и $\omega_{n,n}$ – будет стабилизатором и для $\tilde{\omega}_{2,n}$ и $\tilde{\omega}_{n,n}$. То, что плоские структуры $\tilde{\omega}_{2,n}$ и $\tilde{\omega}_{n,n}$ допускают аффинную симметрию с линейной частью $\sigma_{n/2}$, следует из их построения. Далее, пусть φ – аффинная симметрия плоской структуры $\omega_{2,n}$ (или $\omega_{n,n}$) с линейной частью $\tau_{n/2,\infty}$, оставляющая неподвижными горизонтальные седлосвязки. Достаточно показать, что она также является аффинной симметрией структуры $\tilde{\omega}_{2,n}$ (соответственно $\tilde{\omega}_{n,n}$), т.е. переводит друг в друга особые точки последней. Плоская структура $\tilde{\omega}_{n,n}$ отличается от $\omega_{n,n}$ двумя особыми точками – центрами n -угольников, составляющих поверхность $M_{n,n}$. Если n не делится на 4, они лежат на горизонтальных седлосвязках $\omega_{n,n}$ и φ оставляет их на месте. Если же n делится на 4, они принадлежат траектории, делящей пополам один из горизонтальных пучков траекторий $\omega_{n,n}$; расстояние между точками равно половине длины пучка, поэтому φ меняет их местами. Точно так же особые точки $\tilde{\omega}_{2,n}$, не лежащие на горизонтальных седлосвязках плоской структуры $\omega_{2,n}$, размещаются по две на траекториях, делящих пополам пучки горизонтальных траекторий $\omega_{2,n}$; расстояние между точками в паре равно половине длины траектории, и симметрия φ меняет местами точки в каждой паре.

При нечетном n особые точки $\tilde{\omega}_{n,n}$ – центры правильных n -угольников, составляющих $M_{n,n}$, – расщепляют горизонтальный пучок траекторий плоской структуры $\omega_{n,n} = \omega_{2,n}$, которому они оба принадлежат, на три части, ширины которых равны $d \sin(\pi/(2n))$, $d(\sin(3\pi/(2n)) - \sin(\pi/(2n)))$ и $d \sin(\pi/(2n))$, где d – расстояние от центра правильного n -угольника до его вершины. Отношение первых двух из этих величин равно

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = 2 \cos \frac{\pi}{n},$$

что иррационально при $n > 3$. Особые точки плоской структуры $\tilde{\omega}_{2,n}$, отличные от особых точек $\tilde{\omega}_{n,n}$, делят пополам все пучки горизонтальных траекторий плоской структуры $\omega_{n,n}$, поэтому для $\tilde{\omega}_{2,n}$, равно как и для $\tilde{\omega}_{n,n}$, отношения длины к ширине горизонтальных пучков не являются попарно соизмеримыми. Тем самым, альтернатива Вича не выполнена, и стабилизаторы $\Gamma(\tilde{\omega}_{2,n})$ и $\Gamma(\tilde{\omega}_{n,n})$ не являются решетками.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для прямоугольного треугольника с острым углом π/n и равнобедренного – с углом при основании π/n , где n – четное число, величины $\tilde{N}_0(R)$, $\tilde{N}(R)$, $\tilde{S}(R)$, $\tilde{N}^*(R)$, $\tilde{S}^*(R)$ имеют при $R \rightarrow \infty$ асимптотику вида $cR^2 + o(R^2)$, где c – положительная постоянная.*

4. d -НЕУСТОЙЧИВЫЕ БИЛЬЯРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ. В связи с изучением бифуркаций периодических траекторий бильярдных в многоугольниках Стёпин ввел понятие деформационной устойчивости (d -устойчивости) таких траекторий. В статье [5] был доказан ряд утверждений о деформационной устойчивости или неустойчивости периодических бильярдных траекторий в различных многоугольниках. Ниже доказывается результат в этом направлении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Периодическая бильярдная траектория в многоугольнике Q называется d -устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ в каждом многоугольнике, полученном

из Q достаточно малым шевелением сторон и углов, найдется периодическая бильярдная траектория с тем же числом звеньев, которая целиком лежит в ε -окрестности исходной траектории.

ЛЕММА 4.1 [5]. Пусть $a_1, \dots, a_l$ – стороны многоугольника Q и $W = a_{i_1} \cdots a_{i_m}$ – циклическое слово, сопоставляемое периодической бильярдной траектории (т.е. последовательность сторон, проходимых точкой, движущейся вдоль траектории). Если m четно, то эта траектория d -устойчива в том и только том случае, когда альтернированная сумма $+a_{i_1} - a_{i_2} + \cdots - a_{i_m}$ равна 0 (как элемент свободного $\mathbb{Z}$ -модуля с базисом $a_1, \dots, a_l$).

ЛЕММА 4.2. Пусть оба конца обобщенной диагонали, ограничивающей пучок периодических бильярдных траекторий в многоугольнике, лежат в вершинах углов величины вида $\pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда все траектории в этом пучке d -неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим каким-то образом стороны многоугольника. Пусть L – рассматриваемая обобщенная диагональ, A, B – ее начало и конец соответственно, а $x_1, x_2, \dots, x_m$ – стороны, последовательно посещаемые точкой, движущейся по L в направлении от A к B . Пусть углы многоугольника при вершинах A и B равны соответственно $\pi/(2n)$ и $\pi/(2l)$. Опишем, как расположена в многоугольнике периодическая бильярдная траектория из пучка, ограниченного обобщенной диагональю L . Начав движение из точки вблизи вершины A , бильярдный шар движется параллельно обобщенной диагонали L до ее конца, затем он $2l$ раз поочередно отражается относительно сторон c и d многоугольника, выходящих из вершины B . После этого шар возвращается обратно, двигаясь опять-таки параллельно L , но уже с другой стороны от нее. В конце пути он $2n$ раз отражается относительно сторон a и b , выходящих из вершины A , после чего возвращается в исходное положение. Таким образом, периодической траектории соответствует слово

$$W = x_1 x_2 \cdots x_m (cd)^l x_m \cdots x_2 x_1 (ab)^n$$

(здесь возведение подслова в i -ю степень обозначает его i -кратное повторение). Альтернированная сумма букв слова W равна: $S = (-1)^m l(c - d) + n(a - b)$. Если вершины A и B не совпадают, то $S \neq 0$, так как в этом случае среди сторон a, b, c, d не менее трех различных. Если же $A = B$, то заметим следующее. Первое звено периодической траектории и ее $(m + 1)$ -е звено, параллельные соответственно первому и $(m + 1)$ -му (т.е. последнему) звену L , расположены слева или справа от соответствующих звеньев L (левая и правая сторона определены первоначальной ориентацией L). При этом оба звена траектории расположены по одну сторону (оба слева или оба справа) от звеньев обобщенной диагонали, если m четно, и по разные стороны, если m нечетно. Так как начало первого звена бильярдной траектории находится на стороне b , конец $(m + 1)$ -го звена – на стороне c , первое звено L выходит из вершины A , а $(m + 1)$ -е входит в нее, мы получаем, что $a = c, b = d$ при четном m и $a = d, b = c$ при нечетном. В любом случае, $(-1)^m(c - d) = a - b$ и $S = 2n(a - b) \neq 0$.

Итак, $S \neq 0$, и согласно лемме 4.1 периодическая бильярдная траектория в пучке, ограничиваемом обобщенной диагональю L , d -неустойчива.

ТЕОРЕМА 4.1. В прямоугольном треугольнике с острым углом $\pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, все периодические бильярдные траектории d -неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что поверхность с плоской структурой, соответствующая прямоугольному треугольнику с острым углом $\pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, получается из правильного $2n$ -угольника отождествлением его противоположных сторон. Вершинам треугольника соответствуют особые точки плоской структуры. При этом вершинам углов $\pi/2$ и $\pi/(2n)$ соответствуют $n+1$ особых точек кратности 1 (центр $2n$ -угольника и середины его сторон), а третьей вершине треугольника – еще одна особая точка p , кратность которой больше 1 при $n > 3$. Из предложений 1.2 и 3.1 (и их доказательств) следует, что любой пучок периодических геодезических рассматриваемой плоской структуры некоторой аффинной симметрией φ переводится в пучок, параллельный стороне или диагонали $2n$ -угольника. Каждый из последних, как легко видеть, имеет на границе седловую связку, ни один конец которой не совпадает с p . Заметим теперь, что при $n > 3$ симметрия φ переводит точку p в себя (так как в этом случае p – единственная особая точка, кратность которой больше 1), а при $n = 2$ или 3 ее можно выбрать так, чтобы точка p переходила в себя. Следовательно, любой пучок периодических геодезических имеет на границе подобную седловую связку. Отсюда получаем, что каждый пучок периодических бильярдных траекторий в исходном треугольнике имеет на границе обобщенную диагональ, оба конца которой находятся в вершинах углов величины $\pi/2$ или $\pi/(2n)$. Ввиду леммы 4.2 это завершает доказательство.

В статье [5] другим методом было доказано отсутствие d -устойчивых периодических бильярдных траекторий в трех многоугольниках: в прямоугольнике и в прямоугольных треугольниках с острым углом $\pi/4$ или $\pi/6$. Как видим, для первых двух многоугольников это утверждение следует из леммы 4.2, кроме того, для треугольников оно оказывается частным случаем теоремы 4.1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воробец Я. Б. Плоские структуры и бильярды в рациональных многоугольниках: альтернатива Вича // УМН. 1996. Т. 51. № 5. С. 3–42.
- [2] Veech W. A. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards // Invent. Math. 1989. V. 97. № 4. P. 553–583.
- [3] Воробец Я. Б. Плоские структуры и бильярды в рациональных многоугольниках // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 145–146.
- [4] Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
- [5] Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Стёпин А. М. Периодические бильярдные траектории в многоугольниках: механизмы рождения // УМН. 1992. Т. 47. № 3. С. 9–74.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vorobets@nw.math.msu.su

Поступило
18.02.97