Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Представление одномерных аттракторов A -диффеоморфизмов поверхностей гиперболическими гомеоморфизмами, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 76–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:54:56

УДК 513.83

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ АТТРАКТОРОВ А-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ГОМЕОМОРФИЗМАМИ

В. З. Гринес

В работе дается представление ограничений A -диффеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей рода, большего единицы, из гомотопического класса, содержащего псевдоаносовский диффеоморфизм, на все одномерные аттракторы, не содержащие специальных пар граничных периодических точек, посредством ограничения гиперболического гомеоморфизма на инвариантное нульмерное множество, являющееся пересечением двух трансверсальных геодезических ламинаций. Показывается, как этот результат распространяется на представление ограничений A -диффеоморфизмов, заданных на замкнутой поверхности любого рода, на произвольные одномерные аттракторы.

Библиография: 14 названий.

1. Введение и формулировка результатов. Согласно классификации Я. Нильсена [1] и У. Терстена [2] множество всех гомотопических классов $\{f\}$ гомеоморфизмов на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M рода $g \geq 2$ представляется в виде объединения четырех непересекающихся множеств T_1, T_2, T_3, T_4 , выделяемых следующими условиями:

- 1) если $\{f\} \in T_1$, то $\{f\}$ содержит периодический гомеоморфизм;
- 2) если $\{f\} \in T_2$, то $\{f\}$ содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
- 3) если $\{f\} \in T_3$, то $\{f\}$ содержит приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
- 4) если $\{f\} \in T_4$, то $\{f\}$ содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

Определения объектов, упомянутых в 1)–4), а также определение приводимости имеется, например, в обзорах [3], [4].

Представим M в виде фактора U/G , где U – плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z -плоскости с метрикой постоянной отрицательной кривизны и G – дискретная группа движений на U , изоморфная фундаментальной группе многообразия M . Обозначим через π естественную проекцию U на M и через $E: |z| = 1$ – абсолют плоскости U .

Согласно [3]–[6] автоморфизм τ группы G называется *гиперболическим*, если для любых $\beta, \gamma \in G$ ($\gamma \neq \text{id}$) $n \neq 0$ имеет место соотношение $\beta\tau^n(\gamma)\beta^{-1} \neq \gamma$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00236, и программы INTAS–RFBR, грант № 95-0418.

Пусть f – произвольный гомеоморфизм, принадлежащий гомотопическому классу $\{f\}$. Обозначим через $\bar{f}$ отображение на $\mathbf{U}$, накрывающее отображение f , и через $\bar{f}_*$ автоморфизм группы G , заданный формулой $\bar{f}_*(\gamma) = \bar{f}\gamma\bar{f}^{-1}$, $\gamma \in G$.

Из работ Нильсена [1] следует, что гомотопический класс $\{f\}$ принадлежит множеству N_4 тогда и только тогда, когда автоморфизм $\bar{f}_*$ гиперболичен.

В [5], [6] (см. также обзоры [3], [4]) С.Х. Арансон и автор настоящей работы предложили конструкцию построения в каждом гомотопическом классе из множества N_4 канонического представителя – гиперболического гомеоморфизма.

Гомеоморфизм $f_0: M \rightarrow M$ называется *гиперболическим*, если

- 1) f_0 удовлетворяет аксиоме A^* (понятие аксиомы A^* введено Р. Боуэном [3], в гладком случае аксиома A^* является следствием аксиомы А С. Смейла);
- 2) существуют две трансверсальные инвариантные относительно f_0 геодезические ламинации Ω^s, Ω^u такие, что $M \setminus \Omega^u$ и $M \setminus \Omega^s$ есть объединение конечного числа областей, являющихся непрерывной иммерсией открытого диска в многообразии M ;
- 3) неблуждающее множество гомеоморфизма f_0 состоит из объединения конечного числа изолированных периодических точек и одного замкнутого инвариантного нульмерного локально максимального множества $\Omega_0 = \Omega^s \cap \Omega^u$, устойчивые и неустойчивые многообразия точек которых лежат соответственно на слоях геодезических ламинаций Ω^s, Ω^u .

Геодезической ламинацией на M называется замкнутое подмножество многообразия M , которое является объединением попарно непересекающихся простых геодезических, т.е. замкнутых или незамкнутых геодезических без самопересечений. В работах [3]–[6] вместо термина “геодезическая ламинация” употребляется термин “геодезическое распределение”. Однако, Д.В. Аносов обратил наше внимание на то, что термин “геодезическая ламинация” точнее определяет данный объект.

Достижимая изнутри граница каждой области из $M \setminus \Omega^u$ и $M \setminus \Omega^s$ состоит из конечного множества геодезических, которые называются *граничными геодезическими*. Геодезические из Ω^s, Ω^u , не являющиеся граничными, называются *внутренними*.

Пусть теперь $f: M \rightarrow M$ – A -диффеоморфизм (т.е. f удовлетворяет аксиоме А Смейла), неблуждающее множество $NW(f)$ которого содержит просторно расположенный аттрактор Ω . Согласно [7] нетривиальное базисное множество Ω называется *просторно расположенным*, если не существует гомотопной нулю петли, образованной парой отрезков устойчивого и неустойчивого многообразия какой-либо точки из Ω .

Из результатов работ [8], [9] следует, что если неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит просторно расположенный одномерный аттрактор, то гомотопический класс $\{f\}$ принадлежит либо N_3 , либо N_4 . С другой стороны, в работе [10] установлено существование в каждом гомотопическом классе $\{f\} \in N_4$ A -диффеоморфизма, неблуждающее множество которого содержит просторно расположенный аттрактор.

Согласно [7], [8] периодическая точка $p \in \Omega$ называется *граничной периодической точкой*, если одна из компонент связности множества $W^s(p) \setminus p$ не пересекается с Ω . Периодическая точка $p \in \Omega$, не являющаяся граничной, называется *внутренней*. Для граничной периодической точки $p \in \Omega$ обозначим через $W_\infty^s(p)$ ($W_\infty^u(p)$) компоненту связности множества $W^s(p) \setminus p$, пересекающуюся (не пересекающуюся) с Ω .

Из определения, данного в [8], следует, что пара различных граничных периодических точек $p, q \in \Omega$ является *специальной*, если объединение $W^u(p) \cup W^u(q)$ есть достижимая изнутри граница области, являющаяся непрерывной иммерсией открытого

диска в многообразии M и принадлежащая множеству $M \setminus \Omega$. Число специальных пар граничных периодических точек может быть любым для аттрактора диффеоморфизма в данном гомотопическом классе. В то же время число и распределение (в смысле принадлежности достижимой изнутри границе области из множества $M \setminus \Omega$) других граничных периодических точек жестко определяется данным гомотопическим классом.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – A -диффеоморфизм, для которого автоморфизм $\bar{f}_*$ гиперболический, и $\Omega \in \text{NW}(f)$ – просторно расположенный аттрактор, не содержащий специальных пар граничных периодических точек. Тогда существует гомотопное тождественному непрерывное отображение $h: M \rightarrow M$ такое, что

- 1) $h(\Omega_0) = \Omega$, $fh|_{\Omega_0} = hf_0|_{\Omega_0}$;
- 2) множество $B \subset \Omega$, для каждой точки b которого полный прообраз $h^{-1}(b)$ состоит более чем из одной точки, состоит из тех и только тех точек, которые принадлежат объединению устойчивых многообразий всех граничных периодических точек, и $h^{-1}(b)$ состоит в точности из двух точек, принадлежащих различным граничным геодезическим из множества Ω^s .

В случае, когда A -диффеоморфизм задан на двумерном торе в [11] получено представление одномерных просторно расположенных аттракторов посредством алгебраических гиперболических автоморфизмов тора.

В работе также показывается, как теорема 1 обобщается на случай произвольных одномерных аттракторов A -диффеоморфизмов, заданных на замкнутом ориентируемом многообразии любого рода.

2. Вспомогательные леммы. Пусть Ω – одномерный просторно расположенный аттрактор A -диффеоморфизма f , заданного на замкнутом ориентируемом многообразии M рода $g > 1$, и Ω_* – C -плотная компонента аттрактора Ω , $p \in \Omega_*$ – внутренняя периодическая точка.

Согласно Аносову и Боуэну аттрактор Ω представляется в виде конечного объединения $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_m$ связных замкнутых подмножеств ($m \geq 1$), называемых C -плотными компонентами множества Ω , таких, что $f^m(\Omega_i) = \Omega_i$, $f(\Omega_i) = \Omega_{i+1}$ ($\Omega_{m+1} = \Omega_1$). Для каждой точки x , принадлежащей C -плотной компоненте Ω_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, множество $W^\sigma(x) \cap \Omega_i$ плотно в Ω_i , $\sigma \in \{s, u\}$. В силу [9] $W^u(x) \subset \Omega_i$, в силу [8] каждая компонента множества $W^u(x) \setminus x$ плотна в Ω_i и каждая компонента множества $W^s(x) \setminus x$, не содержащая граничной периодической точки, также содержит множество, плотное в Ω_i .

Так как неустойчивое многообразие точки p содержится в своем замыкании и Ω просторно расположено, то существует точка $x \in \Omega_*$ такая, что

- 1) кривая C , составленная из дуг $[p, x]^u \subset W^u(p)$, $[x, p]^s \subset W^s(p)$, является простой замкнутой негомотопной нулю кривой;
- 2) дуга $[p, x]^u$ ($[p, x]^s$) является трансверсалью для устойчивых (неустойчивых) многообразий точек из Ω_* , причем $(p, x)^u \cap \Omega_* \neq \emptyset$, $(p, x)^s \cap \Omega_* \neq \emptyset$;
- 3) индекс пересечения ориентированных дуг $[p, x]^u$, $[p, x]^s$ в точках пересечения p , x один и тот же.

Будем называть кривую C квазитрансверсалью для устойчивых и неустойчивых многообразий точек, принадлежащих C -плотной компоненте Ω_* .

В силу свойств накрытия и группы G полный прообраз кривой C на U разбивается на счетное множество кривых $\{c\}$ без самопересечений таких, что

- 1) любые две различные кривые $c, c' \in \{c\}$ не пересекаются;
- 2) для каждой кривой $c \in \{c\}$ существует элемент $\gamma_c \in G$, отличный от тождественного, относительно которого c инвариантна, такой, что для любой точки $z \in c$ дуга $(z, \gamma(z)) \subset c$ не содержит конгруэнтных точек;
- 3) каждая кривая $c \in \{c\}$ имеет в точности две граничные точки на абсолюте, которые являются притягивающей и отталкивающей неподвижными точками элемента γ_c , и любые две различные кривые $c, c' \in \{c\}$ не имеют общих граничных точек на абсолюте.

Следующая лемма, доказательство которой содержится в [12] (лемма 2), является следствием просторной расположенности множества Ω .

ЛЕММА 1. Пусть $z \in \Omega \cap (p, x)^u$ ($z \in \Omega \cap (p, x)^s$) и $\bar{z}$ – прообраз точки z на U , принадлежащий $w^s(\bar{z}) \cap c$ ($w^u(\bar{z}) \cap c$), где $c \in \{c\}$ и $w^s(\bar{z})$ ($w^u(\bar{z})$) – прообраз многообразия $W^s(z)$ ($W^u(z)$), проходящий через точку $\bar{z}$, тогда $w^s(\bar{z}) \cap c$ ($w^u(\bar{z}) \cap c$) состоит из единственной точки $\bar{z}$.

Обозначим через $\bar{\Omega}$ полный прообраз при отображении π множества Ω на накрывающей U . Для точки $\bar{x} \in \bar{\Omega}$ обозначим через $w^\sigma(\bar{x})$ прообраз многообразия $W^\sigma(x)$, проходящий через точку $\bar{x}$, где $x = \pi(\bar{x})$. В силу [1] автоморфизм $\bar{f}_*$ индуцирует единственным образом гомеоморфизм $\bar{f}^*$ абсолюта E , совпадающий с продолжением гомеоморфизма $\bar{f}$ на абсолюте.

Доказательство утверждений следующей леммы 2 является непринципиальной модификацией аналогичных утверждений для ориентируемых аттракторов, установленных автором в [8, лемма 3.3 и следствие 4.1].

ЛЕММА 2. 1) Кривая $w^u(\bar{x})$ имеет в точности две различные граничные точки σ^{u+} , σ^{u-} , которые принадлежат множеству E и являются иррациональными точками (точка абсолюта называется иррациональной, если она не является неподвижной ни для какого, отличного от тождественного, элемента группы G).

2) Если многообразие $W^s(x)$ не содержит граничной периодической точки множества Ω , то кривая $w^s(\bar{x})$ имеет в точности две различные граничные точки σ^{u+} , σ^{u-} , которые принадлежат E и являются иррациональными точками, при этом пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{x})$ состоит в точности из одной точки $\bar{x}$.

3) Если многообразие $W^s(x)$ содержит граничную периодическую точку p , то прообраз $w_\infty^s(\bar{p})$ ($p = \pi(\bar{p})$), содержащий точку $\bar{x}$, компоненты $W_\infty^s(p)$ имеет в точности две граничные точки, одна из которых есть точка $\bar{p}$, а другая – s_∞ , принадлежит E и является иррациональной точкой, при этом пересечение $w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{p})$ состоит в точности из одной точки $\bar{x}$.

4) Граничные точки кривой $w^u(\bar{x})$ не совпадают с граничными точками кривой $w^s(\bar{x})$ в случае 2) и с граничной точкой s_∞ кривой $w_\infty^s(\bar{p})$ в случае 3).

5) Если $w^u(\bar{x})$ не содержит прообраза граничной периодической точки, то в $\bar{\Omega}$ не существует точки $\bar{z}$ такой, что $w^u(\bar{z}) \cap w^u(\bar{x}) = \emptyset$, и кривые $w^u(\bar{z})$, $w^u(\bar{x})$ имеют хотя бы одну общую граничную точку на E .

6) Если $w^u(\bar{x})$ содержит прообраз $\bar{p}$ граничной периодической точки, то существует прообраз $\bar{q}^+$ ($\bar{q}^-$) граничной периодической точки такой, что σ^{u+} (σ^{u-}) является одной из граничных точек кривой $w^u(\bar{q}^+)$ ($w^u(\bar{q}^-)$), $\bar{q}^+$ может совпадать с $\bar{q}^-$, при этом не существует точки $\bar{y} \in \bar{\Omega}$ такой, что $w^u(\bar{x}) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$,

$w^u(\bar{q}^+) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$ ($w^u(\bar{q}^-) \cap w^u(\bar{y}) = \emptyset$), и $w^u(\bar{y})$ имеет σ^{u+} (σ^{u-}) одной из своих граничных точек.

7) Если $w_*^s(\bar{x})$, $w_*^s(\bar{y})$ – компоненты связности множеств $w^s(\bar{x}) \setminus \bar{x}$, $w^s(\bar{y}) \setminus \bar{y}$ – не содержат прообразов граничных периодических точек и $w^s(\bar{x}) \cap w^s(\bar{y}) = \emptyset$, то кривые $w_*^s(\bar{x})$, $w_*^s(\bar{y})$ имеют различные граничные точки на E .

8) Если p – внутренняя периодическая точка аттрактора Ω периода k и $\bar{f}_k$ – отображение $\mathbf{U}$ на себя, накрывающее отображение f^k , для которого некоторый прообраз $\bar{p}$ точки p является неподвижной точкой, то либо гомеоморфизм $\bar{f}_k^*$, либо гомеоморфизм $\bar{f}_k^{*2}$ имеет на E в точности четыре неподвижные точки: притягивающие u_1 , u_2 и отталкивающие s_1 , s_2 , где u_1 , u_2 являются граничными точками кривой $w^u(\bar{p})$, а s_1 , s_2 являются граничными точками кривой $w^s(\bar{p})$.

Предположим теперь, что автоморфизм $\bar{f}_*$, индуцированный накрывающим диффеоморфизмом $\bar{f}$, гиперболичен.

Обозначим через l^u (l^s) геодезические на плоскости $\mathbf{U}$, для которой точки u_1 , u_2 (s_1 , s_2), введенные в условии 8) леммы 2, являются граничными точками на абсолюте.

Положим $L^u = \pi(l^u)$, $L^s = \pi(l^s)$ и обозначим через Ω^u (Ω^s) геодезическую ламинацию, являющуюся замыканием геодезической L^u (L^s) на M . Положим $\Omega_0 = \Omega^u \cap \Omega^s$ и обозначим через f_0 гиперболический гомеоморфизм, построенный в работах [5], [6] (см. также [3], [4]). Обозначим через $\bar{\Omega}^u$, $\bar{\Omega}^s$, $\bar{\Omega}_0$ полные прообразы множеств Ω^u , Ω^s , Ω_0 на $\mathbf{U}$.

ЛЕММА 3. Пусть Ω – пространно расположенный аттрактор, не содержащий специальных пар граничных периодических точек A -диффеоморфизма f , для которого автоморфизм $\bar{f}_*$ гиперболичен. Тогда для каждой кривой $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$ найдется в точности одна геодезическая $\tilde{l}^u \subset \bar{\Omega}^u$, имеющая с $w^u(\bar{x})$ общие граничные точки на абсолюте, и, обратно, для каждой геодезической $\tilde{l}^u \subset \bar{\Omega}^u$ найдется в точности одна кривая $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$, имеющая с $\tilde{l}^u$ общие граничные точки на абсолюте. При этом если кривая $w^u(\bar{x})$ содержит прообраз граничной периодической точки множества Ω , то геодезическая $\tilde{l}^u$ является прообразом граничной геодезической множества Ω , и, обратно, если геодезическая $\tilde{l}^u$ является прообразом граничной геодезической множества Ω^u , то кривая $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$ содержит прообраз граничной периодической точки множества Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Ω_* C -плотную компоненту связности множества Ω , содержащую внутреннюю периодическую точку p , и через $\bar{\Omega}_*$ полный прообраз Ω_* на накрывающей $\mathbf{U}$. Предположим, что $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}_*$. Введем на кривой $w^u(\bar{x})$ параметр t , $-\infty < t < \infty$, и обозначим через $w(t)$ точку на $w^u(\bar{x})$, соответствующую параметру t ($w(0) = \bar{x}$). Так как в силу [8] обе компоненты связности множества $W^u(x) \setminus x$ ($x = \pi(\bar{x})$, $W^u(x) = \pi(w^u(\bar{x}))$) плотны в множестве Ω_* , то при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) каждая из них пересекается в счетном множестве точек с квазитрансверсалью C . Тогда в силу леммы 1 кривая $w^u(\bar{x})$ пересекает при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) счетное множество кривых $\{c_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ($n \in \mathbb{Z}^-$), $\pi(c_n) = C$. Обозначим через c_n^+ , c_n^- граничные точки кривой c_n . В силу [8]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n^- = \sigma^{u+}, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} c_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n^- = \sigma^{u-},$$

где σ^{u+} , σ^{u-} – граничные точки кривой $w^u(\bar{x})$.

Положим $\bar{y} = w^u(\bar{x}) \cap c_1$. Так как замыкание многообразия $W^u(p) = \pi(w^u(\bar{p}))$ ($\pi(\bar{p}) = p$) совпадает с Ω_* и кривая C является квазитрансверсалью для неустойчивых многообразий точек из Ω_* , то существует последовательность точек $\bar{y}_k \in c_1$, $k \in \mathbb{Z}^+$, сходящаяся к точке $\bar{y}$, такая, что $\pi(\bar{y}_k) \in W^u(p)$. Но тогда каждая кривая $w^u(\bar{y}_k)$ конгруэнтна кривой $w^u(\bar{p})$ в силу некоторого элемента $\gamma_k \in G$. Для $n > 0$ ($n < 0$) обозначим через λ_n^+ (λ_n^-) дугу абсолюта с граничными точками c_n^+ , c_n^- , содержащую точку σ^{u+} (σ^{u-}). Из C^1 -близости неустойчивых многообразий точек из Ω_* на компактных множествах и свойств накрытия следует, что для любого $N > 0$ найдется N_* такое, что для всех n , удовлетворяющих неравенству $|n| > N_*$, граничные точки кривой $w^u(\bar{y}_n)$ принадлежат объединению дуг $\lambda_N \cup \lambda_{-N}$. Отсюда следует, что топологический предел кривых $w^u(\bar{y}_k)$ при $k \rightarrow \infty$ есть кривая $w^u(\bar{x})$. По построению геодезическая $l_n^u = \gamma_n(l^u)$ имеет общие граничные точки с кривой $w^u(\bar{y}_n)$. Но тогда топологический предел последовательности l_n^u при $n \rightarrow \infty$ есть геодезическая $\tilde{l}^u \subset \bar{\Omega}^u$, имеющая точки σ^{u+} , σ^{u-} своими граничными точками.

Пусть $\tilde{l}^u$ – произвольная геодезическая из $\bar{\Omega}^u$ и $\bar{z}$ – любая точка, принадлежащая $\tilde{l}^u$. Так как замыкание геодезической $L^u = \pi(l^u)$ совпадает с ламинацией Ω^u , то существует последовательность точек $\{\bar{z}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, сходящаяся к точке $\bar{z}$, такая, что $\pi(\bar{z}_n) \in L^u$. Тогда каждая геодезическая $l_n^u \in \bar{\Omega}^u$, проходящая через точку $\bar{z}_n$, конгруэнтна геодезической l^u в силу некоторого элемента $\tilde{\gamma}_n \in G$. Так как геодезические из последовательности $\{l_n^u\}$ попарно не пересекаются, то геодезическая $\tilde{l}^u$ является топологическим пределом последовательности $\{l_n^u\}$. Обозначим через $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ граничные точки геодезической $\tilde{l}^u$. Положим $w_n^u = \tilde{\gamma}_n(w^u(\bar{p}))$ и обозначим через w^u топологический предел последовательности кривых $\{w_n^u\}$. По построению точки $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ принадлежат топологическому пределу w^u . Покажем, что множество w^u содержит по крайней мере одну точку, не принадлежащую абсолюту. Предположим противное. Тогда множество w^u содержит открытую дугу абсолюта λ с граничными точками $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Так как орбита точки u_1 в силу группы G плотна на абсолюте, то существует кривая $\tilde{w}^u$, конгруэнтная кривой $w^u(\bar{p})$, граничная точка которой принадлежит дуге λ . Но тогда найдется номер n_0 такой, что кривая $w_{n_0}^u$ пересекается с кривой $\tilde{w}^u$, что невозможно.

Пусть $\bar{x}$ – любая точка из w^u , не принадлежащая абсолюту. Тогда точка $\bar{x}$ принадлежит Ω_* и кривая $w^u(\bar{x})$ принадлежит w^u . Покажем, что множество граничных точек кривой $w^u(\bar{x})$ совпадает с объединением точек $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Предположим противное, тогда по крайней мере одна граничная точка σ^u кривой $w^u(\bar{x})$ не совпадает ни с одной из точек $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Обозначим через $w_{\sigma^u}^u(\bar{x})$ компоненту связности множества $w^u(\bar{x}) \setminus \bar{x}$, для которой точка σ^u является граничной точкой абсолюта.

Так как замыкание множества $\pi(w_{\sigma^u}^u(\bar{x}))$ совпадает с Ω_* , то существует последовательность кривых $\{\tilde{c}_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\tilde{c}_n \cap w_{\sigma^u}^u(\bar{x}) \neq \emptyset$, $\pi(\tilde{c}_n) = C$, с граничными точками $\tilde{c}_n^+$, $\tilde{c}_n^-$, и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{c}_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{c}_n^- = \sigma^u.$$

Зафиксируем номер $\tilde{N}$ такой, что дуга абсолюта $\tilde{\lambda} = (\tilde{c}_{\tilde{N}}^+, \tilde{c}_{\tilde{N}}^-)$, содержащая точку σ^u , не содержит точек $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Так как точка $\bar{x}$ принадлежит топологическому пределу кривых $\{w_n^u\}$, то из C^1 -близости неустойчивых многообразий точек из Ω на компактных множествах и свойств накрытия следует, что найдется подпоследовательность $\{w_{n_k}^u\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, различных кривых из множества $\{w_n^u\}$ такая, что одна из граничных точек каждой кривой $w_{n_k}^u$ принадлежит дуге $\tilde{\lambda}$, что невозможно, так как предельное множество граничных точек всех кривых из $\{w_n^u\}$ есть объединение точек $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$.

Из приведенного выше доказательства следует, что если кривая $w^u(\bar{x})$ содержит прообраз граничной периодической точки множества Ω_* , то геодезическая $\tilde{l}^u$, имеющая с $w^u(\bar{x})$ общие граничные точки на абсолюте, является прообразом граничной геодезической множества Ω^u , и наоборот, если геодезическая $\tilde{l}^u$ является прообразом граничной геодезической множества Ω^u , то соответствующая кривая $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}_*$ содержит прообраз граничной периодической точки множества Ω_* .

Так как множество $M \setminus \Omega^u$ состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску, то из доказанного выше следует, что множество $M \setminus \Omega_*$ обладает тем же свойством. Но тогда получаем, что множество Ω состоит из одной C -плотной компоненты Ω_* . Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для каждой кривой $w^s(\bar{x})$, принадлежащей кривой $w_\infty^s(\bar{q})$, где $\bar{q}$ – прообраз граничной периодической точки q аттрактора Ω , найдутся в точности две граничные геодезические $\tilde{l}_1^s, \tilde{l}_2^s \in \bar{\Omega}^s$, для которых граничная точка $s_\infty(\bar{q})$ кривой $w^s(\bar{x})$ является их общей граничной точкой на абсолюте, и наоборот, для каждой пары граничных геодезических $\tilde{l}_1^s, \tilde{l}_2^s$, имеющих общую граничную точку $\tilde{s}$ на абсолюте, найдется точка $\bar{q} \in \bar{\Omega}$ такая, что кривая $w_\infty^s(\bar{q})$ имеет точку $\tilde{s}$ своей граничной точкой на абсолюте;

2) для каждой кривой $w^s(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$, не содержащей прообраза граничной периодической точки аттрактора Ω , найдется в точности одна внутренняя геодезическая $\tilde{l}^s \subset \bar{\Omega}^s$, имеющая с $w^s(\bar{x})$ общие граничные точки на абсолюте, и наоборот, для каждой внутренней геодезической $\tilde{l}^s \subset \bar{\Omega}^s$ найдется в точности одна кривая $w^s(\bar{x})$, $\bar{x} \subset \bar{\Omega}$, не содержащая прообраза граничной периодической точки и имеющая с $\tilde{l}^s$ общие граничные точки на абсолюте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Пусть $\bar{p}$ – прообраз граничной периодической точки p аттрактора Ω некоторого периода k . Обозначим через σ^{u-}, σ^{u+} граничные точки кривой $w^u(\bar{p})$ и через $s_\infty(\bar{p})$ граничную точку кривой $w_\infty^s(\bar{p})$. В силу утверждения 6) леммы 2 существуют точки $\bar{q}^+, \bar{q}^-$, которые являются прообразами граничных периодических точек из Ω , такие, что $w^u(\bar{q}^+)$ ($w^u(\bar{q}^-)$) имеет σ^{u+} (σ^{u-}) одной из своих граничных точек (так как множество Ω не содержит специальных пар граничных периодических точек, то $\bar{q}^+ \neq \bar{q}^-$). Обозначим через $s_\infty(\bar{q}^+), s_\infty(\bar{q}^-)$ граничные точки кривых $w_\infty^s(\bar{q}^+), w_\infty^s(\bar{q}^-)$, принадлежащие абсолюту. Рассмотрим диффеоморфизм $\bar{f}_{2k}$, накрывающий f_{2k}^2 , для которого точка $\bar{p}$ является неподвижной и обе компоненты связности множества $w^u(\bar{p}) \setminus \bar{p}$ являются инвариантными. Тогда точки σ^{u+}, σ^{u-} являются неподвижными точками гомеоморфизма $\bar{f}_{2k}^*$, и, следовательно, точки $\bar{q}^+, \bar{q}^-$ являются неподвижными точками диффеоморфизма $\bar{f}_{2k}$. Но тогда точки $s_\infty(\bar{p}), s_\infty(\bar{q}^+), s_\infty(\bar{q}^-)$ также являются неподвижными точками гомеоморфизма $\bar{f}_{2k}^*$. Рассмотрим гомеоморфизм $\bar{f}_{02k}$, накрывающий гомеоморфизм f_0^{2k} , такой, что $\bar{f}_{02k}^*$ совпадает с гомеоморфизмом $\bar{f}_{2k}^*$. В силу леммы 3 существуют граничные геодезические $\tilde{l}^u, \tilde{l}_1^u, \tilde{l}_2^u$ из множества $\bar{\Omega}^u$, имеющие общие граничные точки соответственно с кривыми $w^u(\bar{p}), w^u(\bar{q}^+), w^u(\bar{q}^-)$. По построению гиперболического гомеоморфизма f_0 (см. [6]) существуют граничные геодезические $\tilde{l}_1^s, \tilde{l}_2^s$ из множества $\bar{\Omega}^s$, имеющие соответственно $s_\infty(\bar{q}^+)$ и $s_\infty(\bar{p}), s_\infty(\bar{q}^-)$ своими граничными точками на абсолюте (рис. 1).

Пусть теперь $\tilde{l}_1^s, \tilde{l}_2^s$ – граничные геодезические из множества $\bar{\Omega}^s$, для которых точка $\tilde{s}$ является общей граничной точкой на абсолюте. По построению гиперболического

Рис. 1

гомеоморфизма f_0 существуют точки u_1, u_2 на абсолюте, число $r \in \mathbb{Z}^+$ и гомеоморфизм $\bar{f}_{r0}$, накрывающий гомеоморфизм f_0^r , такой, что точка $\tilde{s}$ является отталкивающей, а точки u_1, u_2 являются притягивающими точками гомеоморфизма $\bar{f}_{r0}^*$, и на дуге абсолюта $[u_1, u_2]$, содержащей точку $\tilde{s}$, нет других неподвижных точек гомеоморфизма $\bar{f}_{r0}^*$. Но тогда геодезическая $\tilde{l}^u$ с граничными точками u_1, u_2 принадлежит $\bar{\Omega}^u$, и в силу леммы 3 существует кривая $w^u(\bar{x}) \subset \bar{\Omega}$, которая содержит прообраз $\bar{q}$ граничной периодической точки множества Ω и имеет с $\tilde{l}^u$ общие граничные точки на абсолюте. По построению точка $\tilde{s}$ является граничной точкой кривой $w_{\infty}^s(\bar{q})$.

Утверждение 2) доказывается аналогично доказательству леммы 3. Лемма 4 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $\bar{x}_0$ – любая точка, принадлежащая множеству $\bar{\Omega}_0$ и лежащая на пересечении геодезических $l^s(\bar{x}_0) \subset \bar{\Omega}^s$ и $l^u(\bar{x}_0) \subset \bar{\Omega}^u$. Могут быть следующие случаи:

- 1) $l^s(\bar{x}_0)$ – прообраз внутренней геодезической множества Ω^s ;
- 2) $l^s(\bar{x}_0)$ – прообраз граничной геодезической множества Ω^s .

В первом случае в силу лемм 3, 4 существуют кривые $w^s(\bar{x}), w^u(\bar{y})$, имеющие общие граничные точки соответственно с геодезическими $l^s(\bar{x}_0), l^u(\bar{x}_0)$. Так как пары граничных точек геодезических $l^s(\bar{x}_0), l^u(\bar{x}_0)$ разделены на абсолюте, то кривые $w^s(\bar{x}), w^u(\bar{y})$ пересекаются на $\mathbb{U}$, причем в силу леммы 2 в точности в одной точке, которую обозна-

чим через $\bar{x}'$.

Во втором случае обозначим через s_1, s_2 граничные точки геодезической $l^s(\bar{x}_0)$. В силу конструкции ламинации Ω^s существует геодезическая $l_1^s, (l_2^s)$, отличная от $l^s(\bar{x}_0)$, для которой точка s_1 (s_2) является граничной точкой на абсолюте. В силу конструкции гиперболического гомеоморфизма f_0 существуют число $k \in \mathbb{Z}^+$ и гомеоморфизм $\bar{f}_{0k}$, накрывающий гомеоморфизм f_0^k , такой, что точки s_1, s_2 являются отталкивающими неподвижными точками гомеоморфизма абсолюта $\bar{f}_{0k}^*$, и на дуге $\lambda = (s_1, s_2)$ абсолюта, не содержащей граничных точек геодезических l_1^s, l_2^s , отличных от s_1, s_2 , существует в точности одна (притягивающая) неподвижная точка гомеоморфизма $\bar{f}_{0k}^*$, которую обозначим через u . Тогда в силу конструкции геодезической ламинации Ω^u существуют прообразы l_1^u, l_2^u различных граничных геодезических из Ω^u , имеющие u общей граничной точкой на абсолюте, такие, что l_1^u пересекается с геодезическими $l^s(\bar{x}_0), l_1^s$, а l_2^u пересекается с геодезическими $l^s(\bar{x}_0), l_2^s$. Положим $\bar{p}_0^1 = l_1^u \cap l^s(\bar{x}_0), \bar{p}_0^2 = l_2^u \cap l^s(\bar{x}_0)$. В силу леммы 4 найдется точка $\bar{p}_1 \in \bar{\Omega} (\bar{p}_2 \in \bar{\Omega})$, являющаяся прообразом граничной периодической точки p_1 (p_2), такая, что кривая $w_\infty^s(\bar{p}_1)$ ($w_\infty^s(\bar{p}_2)$) имеет точку s_1 (s_2) своей граничной точкой на абсолюте. Из доказательства, проведенного в лемме 4, следует, что кривая $w^u(\bar{p}_1)$ ($w^u(\bar{p}_2)$) имеет общие граничные точки на абсолюте с геодезической l_1^u (l_2^u).

Далее, могут быть две возможности:

- 2а) точка $\bar{x}_0$ принадлежит дуге $[\bar{p}_0^1, s_1]^s \subset l^s$;
- 2б) точка $\bar{x}_0$ принадлежит дуге $[\bar{p}_0^2, s_2]^s \subset l^s$.

В силу леммы 3 существует кривая $w^u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \bar{\Omega}$, имеющая общие граничные точки с геодезической $l^u(x_0)$ на абсолюте. Тогда в случае 2а) положим $\bar{x}' = w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{p}_1)$, а в случае 2б) положим $\bar{x}' = w^u(\bar{x}) \cap w^s(\bar{p}_2)$ (рис. 2).

Обозначим через $\bar{\varphi}$ отображение, ставящее в соответствие точке $\bar{x}_0$ точку $\bar{x}'$, найденную в случаях 1), 2а) и 2б).

Отметим, что в случае 2а) для точки $\bar{x}_0$ найдется в точности одна точка $\bar{y}_0^1 = l_1^s \cap l^u(\bar{x}_0)$ такая, что $\bar{\varphi}(\bar{y}_0^1) = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) = \bar{x}'$, а в случае 2б) для точки $\bar{x}_0$ найдется в точности одна точка $\bar{y}_0^2 = l_2^s \cap l^u(\bar{x}_0)$ такая, что $\bar{\varphi}(\bar{y}_0^2) = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) = \bar{x}'$.

В силу лемм 3, 4 $\bar{\varphi}$ отображает множество $\bar{\Omega}_0$ на множество $\bar{\Omega}$. В силу конструкции гомеоморфизма $\bar{f}_0$ отображение $\bar{\varphi}$ удовлетворяет соотношениям

$$\bar{\varphi}\bar{f}_0|_{\bar{\Omega}_0} = \bar{f}\bar{\varphi}|_{\bar{\Omega}_0}, \quad \bar{\varphi}\gamma|_{\bar{\Omega}_0} = \gamma\bar{\varphi}|_{\bar{\Omega}_0}, \quad \gamma \in G,$$

где накрывающие отображения $\bar{f}_0, \bar{f}$ удовлетворяют условию $\bar{f}_0^* = \bar{f}^*$. Из конструкции непосредственно следует, что отображение $\bar{\varphi}$ непрерывно на множестве $\bar{\Omega}_0$.

Обозначим через $\bar{B}$ множество из $\bar{\Omega}$, для каждой точки $\bar{b}$ которого прообраз $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{b})$ состоит более чем из одной точки. Из конструкции отображения $\bar{\varphi}$ следует, что множество $\bar{B}$ представляется в виде

$$\bigcup_{\bar{p} \in \bar{\Gamma}} w^s(\bar{p}) \cap \bar{\Omega},$$

где $\bar{\Gamma} = \pi^{-1}(\Gamma)$ есть полный прообраз множества Γ – объединения всех граничных точек аттрактора Ω . Если точка $\bar{b} \in w^s(\bar{p}) \cap \bar{\Omega}$, то $\bar{\varphi}^{-1}(\bar{b})$ состоит в точности из двух точек $\bar{b}_0^1, \bar{b}_0^2$, принадлежащих прообразам различных граничных геодезических из множества Ω^s , имеющих общую граничную точку на абсолюте.

Рис. 2

Построим теперь непрерывное отображение $\bar{h}: U \rightarrow U$ такое, что $\bar{h}\gamma = \gamma\bar{h}$ и $\bar{h}|_{\bar{\Omega}_0} = \bar{\varphi}|_{\bar{\Omega}_0}$.

Построим вначале непрерывное отображение $\bar{h}_0$ множества $\bar{\Omega}^u$ на множество $\bar{\Omega}$ такое, что $\bar{h}_0|_{\bar{\Omega}_0} = \bar{\varphi}|_{\bar{\Omega}_0}$. Пусть $\bar{z}$ – произвольная точка, принадлежащая геодезической $l^u(\bar{z}) \subset \bar{\Omega}^u$. Если $\bar{z} \in \bar{\Omega}_0$, то положим $\bar{h}_0(\bar{z}) = \bar{\varphi}(\bar{z})$, если $z \notin \bar{\Omega}_0$, то по построению отображения $\bar{\varphi}$ существуют точки $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in l^u \cap \bar{\Omega}_0$ такие, что дуга $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)^u \subset l^u$ не содержит точек из $\bar{\Omega}_0$ и $\bar{\varphi}(\bar{z}_1) = \bar{\varphi}(\bar{z}_2)$. Положим в этом случае $\bar{h}_0(\bar{z}) = \bar{\varphi}(\bar{z}_1) = \bar{\varphi}(\bar{z}_2)$.

Для каждой области $D_i \subset M \setminus \Omega^u$, $i = \overline{1, k}$, зафиксируем в точности один прообраз $\bar{D}_i^u$ на накрывающей U и обозначим через $l_i^{u,j}$, $j = \overline{1, r_i}$, геодезическую из $\bar{\Omega}^u$, входящую в границу $\bar{D}_i^u$. В силу леммы 3 для каждой геодезической $l_i^{u,j}$ найдется в точности одна точка $\bar{p}_i^j$, являющаяся прообразом граничной периодической точки множества Ω , такая, что кривая $w^u(\bar{p}_i^j)$ имеет общие граничные точки на абсолюте с геодезической $l_i^{u,j}$. Обозначим через $\bar{D}_i^{'u}$ область на U, ограниченную объединением кривых $\bigcup_{j=1}^{r_i} w^u(\bar{p}_i^j)$ вместе с их граничными точками, лежащими на абсолюте.

При каждом i легко строится непрерывное отображение $\bar{h}_i$ замыкания области $\bar{D}_i^u$ на замыкание области $\bar{D}_i^{'u}$ такое, что $\bar{h}_i$ совпадает с отображением $\bar{h}_0$ на каждой геодезической $l_i^{u,j}$, принадлежащей границе области $\bar{D}_i^u$. Пусть теперь $\bar{z}$ – любая точка на $U \setminus \bar{\Omega}^u$. Тогда существует элемент $\gamma \in G$ такой, что точка $\gamma(\bar{z})$ принадлежит замыканию одной из областей $\bar{D}_i^u$. Положим $\bar{h}(\bar{z}) = \gamma^{-1}(\bar{h}_i(\gamma(\bar{z})))$. По построению $\bar{g}$ есть

непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям $\bar{h}\gamma = \gamma\bar{h}$ и $\bar{h}|_{\bar{\Omega}_0} = \bar{\varphi}|_{\bar{\Omega}_0}$.

Положим $B = \pi(\bar{B})$. Тогда отображение $h: M \rightarrow M$, для которого отображение $\bar{h}$ является накрывающим, является искомым. Теорема 1 доказана.

4. Обобщение теоремы 1. Предположим, что M – гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие рода $g \geq 0$ и f – A -диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит произвольный одномерный аттрактор Ω , состоящий из m C -плотных компонент $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Тогда, несколько модифицируя конструкцию из [13] (см. также обзоры [3], [4]), построим окрестность V множества Ω , являющуюся объединением m окрестностей V_i компонент Ω_i , компактное подмногообразие N_Ω , являющееся объединением m компактных двумерных подмногообразий с краем $N_1, \dots, N_m$, и диффеоморфизм f_Ω подмногообразия N_Ω на себя такие, что

- 1) $\Omega_i \subset V_i \subset N_i$, $f_\Omega|_V = f|_V$;
- 2) каждое подмногообразие N_i имеет $k > 0$ компонент края, род $q \geq 0$ и отрицательную эйлерову характеристику $\chi(N_i) = 2 - 2q - k$ (числа q и k однозначно определяются по Ω);
- 3) множество $N_\Omega \setminus (\Omega \cup \partial N_\Omega)$ состоит из блуждающих точек диффеоморфизма f_Ω и является объединением mk не пересекающихся между собой областей, гомеоморфных кольцу;
- 4) каждая компонента края ∂N_Ω многообразия N_Ω содержит конечное число седловых и источников периодических точек диффеоморфизма f_Ω .

Обозначим через f_i ограничение диффеоморфизма f_Ω^m на подмногообразие N_i . Следуя [14], представим подмногообразие N_i в виде H_F/F , где H_F – подмножество плоскости Лобачевского $\mathbf{U}$, F – дискретная группа гиперболических движений, оставляющих инвариантным множество H_F . Обозначим через $\pi_i: H_F \rightarrow N_i$ естественную проекцию. Полный прообраз $\pi_i^{-1}(L)$ каждой компоненты L края многообразия N_i состоит из счетного множества геодезических на плоскости Лобачевского (в метрике постоянной отрицательной кривизны), принадлежащих границе множества H_F и являющихся осями элементов группы F . Напомним, что ось l_γ элемента $\gamma \in F$ есть геодезическая на H_F , граничные точки которой являются неподвижными точками элемента γ .

Автоморфизм τ_i группы F назовем *обобщенным гиперболическим автоморфизмом*, если для любых целых $n \neq 0$ и любых $\beta, \gamma \in F$ таких, что $\gamma \neq \text{id}$ и $\pi_i(l_\gamma)$ не является компонентой края подмногообразия N_i , выполняется условие $\beta\tau_i^n(\gamma)\beta^{-1} \neq \gamma$.

Пусть $\bar{f}_i$ – отображение H_F на себя, накрывающее отображение f_i , $\tau_i = \bar{f}_{i*}$ – автоморфизм группы F , который задается формулой $\bar{f}_{i*}(\gamma) = \bar{f}_i\gamma\bar{f}_i^{-1}$, $\gamma \in F$.

В работе [13] (см. также [3, теорема 6]) установлено, что автоморфизм τ_i является обобщенным гиперболическим автоморфизмом.

Как и в случае гиперболического автоморфизма, по обобщенному гиперболическому автоморфизму τ_i строятся две трансверсальные геодезические ламинации $\Omega_i^s \cap \Omega_i^u$ и обобщенный гиперболический гомеоморфизм $f_{i0}: N_i \rightarrow N_i$, обладающий инвариантным множеством $\Omega_{i0} = \Omega_i^s \cap \Omega_i^u$. Обобщенный гиперболический гомеоморфизм удовлетворяет условиям 1), 3) для гиперболического гомеоморфизма, а условие 2) переформулируется следующим образом: существуют две трансверсальные, инвариантные относительно f_{i0} , геодезических ламинации (в метрике постоянной отрицательной кривизны) Ω_i^s, Ω_i^u такие, что $N_i \setminus \Omega_i^u$ и $N_i \setminus \Omega_i^s$ есть объединение конечного числа областей, являющихся непрерывной иммерсией открытого кольца в подмногообразии N_i .

Аналогично теореме 1 устанавливается

ТЕОРЕМА 2. *Существует гомотопное тождественному непрерывное отображение $h_i: N_i \rightarrow N_i$ такое, что*

- 1) $h_i(\Omega_{i0}) = \Omega_i$, $f_i h_i|_{\Omega_{i0}} = h_i f_{i0}|_{\Omega_{i0}}$;
- 2) *множество $B_i \subset \Omega_i$, для каждой точки b которого полный прообраз $h_i^{-1}(b)$ состоит более чем из одной точки, состоит из тех и только тех точек, которые принадлежат объединению устойчивых многообразий всех граничных периодических точек, и $h^{-1}(b)$ состоит в точности из двух точек, принадлежащих различным граничным геодезическим из множества Ω_i^s .*

Доказательство теоремы 2 является непринципиальным обобщением доказательства теоремы 1, однако описание новых моментов вывело бы за рамки дозволенного объема статьи, поэтому мы его не приводим.

Автор благодарит А. Ю. Жирова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. I // Acta Math. 1927. V. 50. P. 189–358; III // Acta Math. 1932. V. 58. P. 87–167.
- [2] Thurston W. On geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1988. V. 19. № 2. P. 417–431.
- [3] Арансон С. Х., Гринес В. З. Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 3–32.
- [4] Арансон С. Х., Гринес В. З. Каскады на поверхностях // Динамические системы с гиперболическим поведением. Гл. 3. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 66. М.: ВИНТИ, 1991. С. 148–187.
- [5] Арансон С. Х., Гринес В. З. Гомеоморфизмы с минимальной энтропией на двумерных многообразиях // УМН. 1981. Т. 36. № 2(218). С. 175–176.
- [6] Арансон С. Х., Гринес В. З. Динамические системы с минимальной энтропией на двумерных многообразиях. Деп. ВИНТИ № 3181–В80. Горький: ГГУ им. Н. И. Лобачевского, 1980.
- [7] Плыкин Р. В. Источники и стоки A -диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 94. № 2. С. 243–264.
- [8] Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. I // Тр. ММО. 1975. Т. 32. С. 35–61.
- [9] Плыкин Р. В. О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН. 1984. Т. 39. № 6(240). С. 75–113.
- [10] Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 149–152.
- [11] Гринес В. З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. II // Тр. ММО. 1977. Т. 34. С. 243–252.
- [12] Grines V. Z. Structural stability and the asymptotic behaviour of invariant manifolds of A -diffeomorphisms of surfaces // J. Dynam. Control Systems. 1997. V. 3. № 1. P. 91–110.
- [13] Гринес В. З., Калай Х. Х. Топологическая классификация базисных множеств без пар сопряженных точек A -диффеоморфизмов на поверхностях. Деп. ВИНТИ № 1137–В88. Горький: ГГУ им. Н. И. Лобачевского, 1988.
- [14] Nielsen J. Surface transformation classes of algebraically finite type // Det. Kgl. Dansk Videnskabernes Selskab. Math.-Phys. Meddelelser. 1944. V. 21. P. 1–89.