Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Соболевские емкости множества конфигураций с кратными точками в пространстве Пуассона, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 6, 874–882

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:32:45

УДК 517.98

СОБОЛЕВСКИЕ ЕМКОСТИ МНОЖЕСТВА КОНФИГУРАЦИЙ С КРАТНЫМИ ТОЧКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПУАССОНА

О. В. Пугачев

В данной работе изучается различие между пространством всех конфигураций и пространством конфигураций без кратных точек в смысле топологии, меры и емкостей, порожденных соболевскими классами. Доказывается, что при некоторых условиях конфигурации, имеющие кратные точки, образуют множество нулевой соболевской емкости $C_{r,p}$ в пространстве конфигураций на $\mathbb{R}^d$ с мерой Пуассона.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. В последнее время растет интерес к анализу и теории меры на пространствах конфигураций на римановых многообразиях (см. [1]–[8]). Пространства конфигураций представляют собой интересный пример бесконечномерных многообразий, относительно простых в описании и обладающих разнообразными аналитическими и геометрическими свойствами. В частности, на таких пространствах естественно определяются соболевские классы функций.

В данной работе изучается различие между пространством всех конфигураций и пространством конфигураций без кратных точек, в смысле топологии, меры и емкостей, порожденных соболевскими классами. Доказывается, что при некоторых условиях конфигурации, имеющие кратные точки, образуют множество нулевой соболевской емкости $C_{r,p}$ в пространстве конфигураций на $\mathbb{R}^d$ с мерой Пуассона.

2. Пространство конфигураций. Пусть M – некомпактное связное гладкое полное риманово многообразие размерности d . Через $C_0(M)$ обозначим класс функций из $C(M)$ с компактными носителями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Пространство $\tilde{\Gamma}$ конфигураций (с кратными точками) на M* есть пространство натуральнозначных σ -конечных мер γ на M , удовлетворяющих условию

$$\gamma(A) < \infty \quad \text{для любого компакта } A \subset M.$$

Другими словами, γ имеет вид

$$\gamma = \sum_{i=1}^N k_i \delta_{x_i}, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad x_i \in M, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

где δ_{x_i} – мера Дирака в точке x_i , k_i – кратность точки x_i и последовательность $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ не имеет предельных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Слабая топология w на $\ddot{\Gamma}$ порождена функциями вида

$$\langle \varphi, \gamma \rangle = \int \varphi(x) \gamma(dx), \quad \varphi \in C_0(M). \quad (2.1)$$

Известно, что пространство $\ddot{\Gamma}$ со слабой топологией является польским, т.е. гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пространство Γ конфигураций без кратных точек на M есть следующее подпространство $\ddot{\Gamma}$:

$$\Gamma = \{\gamma \in \ddot{\Gamma} : \forall x \in M \quad \gamma(\{x\}) \leq 1\}.$$

На Γ будем рассматривать ту же слабую топологию w . Пространство Γ со слабой топологией также является польским, что было показано автором в [9].

Следующие две теоремы дают критерии предкомпактности множеств в $\ddot{\Gamma}$ и в Γ . Их доказательства также можно найти в [9].

ТЕОРЕМА 2.4. Подмножество $\mathbf{Q}$ пространства $\ddot{\Gamma}$ предкомпактно в слабой топологии, если и только если для любого компакта $A \subset M$ выполнено

$$\sup_{\gamma \in \mathbf{Q}} \gamma(A) < \infty. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.5. Подмножество $\mathbf{Q}$ пространства Γ предкомпактно в слабой топологии, если и только если для любого компакта $A \subset M$ выполнено условие (2.2) и условие

$$\inf_{\gamma \in \mathbf{Q}} \min_{x, y \in \text{supp } \gamma \cap A} \text{dist}_M(x, y) > 0. \quad (2.3)$$

3. Меры на пространстве конфигураций. Всякая вероятностная мера на Γ , а также и на $\ddot{\Gamma}$, является радоновской в смысле слабой топологии. Это следует (см. [10]) из того, что оба пространства польские.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть σ – локально конечная мера на M , не имеющая атомов, т.е.

$$\sigma(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in M. \quad (3.1)$$

Вероятностная мера $\pi = \pi_\sigma$ на пространстве конфигураций $\ddot{\Gamma}$ называется пуассоновской мерой с интенсивностью σ , если для любых множеств $A, B \subset M$ конечной меры σ мы имеем

(i) выполнено равенство

$$\pi\{\gamma : \gamma(A) = k\} = \frac{\sigma(A)^k}{k!} e^{-\sigma(A)},$$

(ii) если A и B не пересекаются, то случайные величины $\gamma(A)$ и $\gamma(B)$ независимы.

Нам понадобится следующая лемма, связанная с пуассоновскими распределениями.

ЛЕММА 3.2. Пусть ξ – пуассоновская случайная величина на вероятностном пространстве (Ω, P) ; $E\xi = \lambda$. Тогда для всякого $q \in (0; 1)$ и $p > 0$ можно найти константу $a = a(\lambda, p, q)$ такую, что

$$\forall A \subset \Omega \quad E(\xi^p \cdot 1_A) \leq a \cdot (P(A))^q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $E\xi^p < +\infty$, достаточно доказать утверждение только для множеств A с $0 < P(A) < \varepsilon$, где ε – любая константа из $(0; 1)$. При каждом натуральном m мы имеем

$$P\{\xi \geq m\} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{(m+k)!} \leq \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^m}{m!}. \quad (3.2)$$

Существует положительная константа $b = b(\lambda)$ такая, что

$$\frac{\lambda^m}{m!} \leq b \cdot 2^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, если $2b \cdot 2^{-m} > P(A) \geq b \cdot 2^{-m}$ и m достаточно велико для того, чтобы выполнялась оценка $((m+1)/m)^p < 4/3$, то

$$\begin{aligned} E(\xi^p \cdot 1_A) &\leq m^p \cdot P(A) + \sum_{k=m+1}^{\infty} k^p \cdot b \cdot 2^{-k} \\ &< 2b \cdot 2^{-m} \cdot m^p + \sum_{l=1}^{\infty} \left(m^p \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^l \cdot b \cdot 2^{-m} \cdot 2^{-l} \right) \\ &\leq b \cdot 2^{-m} \cdot m^p \left(2 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^l \right) \\ &= 4b \cdot 2^{-m} \cdot m^p < 4P(A) \cdot \left(\log_2 \frac{2b}{P(A)} \right)^p \leq a \cdot (P(A))^q \end{aligned}$$

для $q \in (0; 1)$, поскольку

$$\sup_{0 < t < 1} \frac{t |\log_2(2b) - \log_2 t|^p}{t^q} = \sup_{0 < t < 1} (t^{(1-q)/p} |\log_2(2b) - \log_2 t|)^p < \infty.$$

Многие работы были посвящены аналитическим и геометрическим свойствам пуассоновских мер на конфигурационных пространствах (см. [1], [4]–[7], [11], [12]). При этом мера π могла рассматриваться либо на Γ , либо на $\ddot{\Gamma}$. Во многих случаях нет заметной разницы между этими двумя подходами, поскольку верна

ЛЕММА 3.3. Пусть π – пуассоновская мера. Тогда $\pi(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как σ является σ -конечной и не имеет атомов, существует разбиение

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \sigma(A_n) = \frac{\varepsilon}{n}$$

(см. [13, следствие 1.12.10]). Тогда

$$\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}_n, \quad \text{где} \quad \mathbf{D}_n = \{\gamma : \exists x \in A_n : \gamma(\{x\}) \geq 2\}.$$

Из (3.2) получаем

$$\pi(\mathbf{D}_n) \leq \pi\{\gamma : \gamma(A_n) \geq 2\} \leq \frac{\sigma(A_n)^2}{2!} = \frac{\varepsilon^2}{2n^2},$$

следовательно,

$$\pi(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 \varepsilon^2}{12}.$$

Это верно для произвольного $\varepsilon > 0$, откуда $\pi(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0$.

4. Градиенты и соболевские функции. С этого момента мы будем рассматривать пространства конфигураций на $M = \mathbb{R}^d$, наделенные пуассоновской мерой, порожденной локально конечной мерой σ , имеющей непрерывную плотность ϱ относительно меры Лебега такую, что

$$\sqrt{\varrho} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^d) \quad \text{и} \quad \varrho \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Будем говорить, что функция $f: \ddot{\Gamma} \mapsto \mathbb{R}$ *гладкая цилиндрическая*, и писать $f \in \mathcal{FC}_b^\infty$, если она имеет вид

$$f(\gamma) = u(\langle \varphi_1, \gamma \rangle, \dots, \langle \varphi_n, \gamma \rangle)$$

где $\varphi_j \in C_0^\infty(M)$, $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Касательное тензорное пространство* порядка n в точке $\gamma \in \ddot{\Gamma}$ есть следующее пространство:

$$T_\gamma^n \ddot{\Gamma} := L^2(M^n \mapsto T^n M^n, \gamma^n),$$

где $T^n M^n$ означает векторное расслоение над M^n со слоем в точке $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$, заданным как

$$(T^n M^n)_{(x_1, \dots, x_n)} := T_{x_1} M \otimes \dots \otimes T_{x_n} M \sim (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}.$$

Таким образом, $T_\gamma^n \ddot{\Gamma}$ есть пространство всех измеримых сечений A многообразия $T^n M^n$ таких, что $A(x_1, \dots, x_n) \in (T^n M^n)_{(x_1, \dots, x_n)}$ и следующая норма A конечна:

$$\|A\|_{\mathcal{H}_n}^2 = \int \dots \int \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_n=1}^d A_{i_1, \dots, i_n}^2(x_1, \dots, x_n) \gamma(dx_1) \dots \gamma(dx_n).$$

Пространство $L^p(\pi, T^n \ddot{\Gamma})$ π -измеримых тензорных полей (т.е. сечений $T^n \ddot{\Gamma}$ со слоями $T_\gamma^n \ddot{\Gamma}$ в γ) наделено нормой

$$\|F\|_p = \left(\int \|F(\gamma)\|_{\mathcal{H}_n}^p \pi(d\gamma) \right)^{1/p}$$

(неважно, берется ли интеграл по Γ или по $\ddot{\Gamma}$, так как $\pi(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0$).

Естественно считать $T_\gamma^0 \ddot{\Gamma} = \mathbb{R}$. В случае $n = 1$ введенная $\mathcal{H}_1$ -норма совпадает на всех векторах из $T_\gamma^1 \ddot{\Gamma}$ с нормой, определенной в [1].

Векторное поле $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ порождает поток диффеоморфизмов ψ_t^V многообразия $\mathbb{R}^d$. Этот поток “поднимается” в $\ddot{\Gamma}$ согласно следующей формуле:

$$\text{если } \gamma = \sum_i k_i \delta_{x_i}, \quad \text{то } \psi_t^V(\gamma) = \sum_i k_i \delta_{\psi_t^V(x_i)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. *Градиент* тензорного поля $f: \gamma \mapsto T_\gamma^n \ddot{\Gamma}$ есть тензорное поле

$$\nabla f: \gamma \mapsto T_\gamma^{n+1} \ddot{\Gamma},$$

определенное следующим образом: пусть $x \in \text{supp } \gamma$, пусть V – гладкое векторное поле на M такое, что $V(x) = e_i$ и $V = 0$ в некоторых окрестностях всех точек $\text{supp } \gamma \setminus \{x\}$. Тогда

$$\nabla f(\gamma)_{i, i_1, \dots, i_n}(x, x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial t} \bigg|_{t=0} f(\psi_t^V(\gamma))_{i_1, \dots, i_n}(\psi_t^V(x_1), \dots, \psi_t^V(x_n))$$

для каждого набора индексов $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}$.

В случае $n = 0$ получается то же определение градиента скалярной функции, что и в [1]. С помощью определения 4.3 мы можем определять градиенты высших порядков от скалярных функций, векторных и тензорных полей на $\ddot{\Gamma}$.

ПРИМЕР 4.4. Если $f(\gamma) = \langle \varphi, \gamma \rangle$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то при любых $\gamma \in \Gamma$ и $x_1, \dots, x_k \in \text{supp } \gamma$ получаем

$$\nabla^k f(\gamma)(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \nabla^k \varphi(x), & \text{если } x_1 = \dots = x_k = x, \\ 0, & \text{если } \exists i, j: x_i \neq x_j. \end{cases}$$

По поводу градиентов высших порядков на пространствах конфигураций см. также [14].

Соболевские нормы $\|\cdot\|_{r,p}$, $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, для гладких цилиндрических функций определяются так:

$$\|f\|_{r,p} = \|f\|_p + \sum_{k=1}^r \|\nabla^k f\|_p. \quad (4.1)$$

Гладкие цилиндрические функции имеют конечные соболевские нормы любого порядка (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Говорят, что функция $f \in L^p(\pi)$ принадлежит *соболевскому классу* $W^{r,p}$, если существует последовательность гладких цилиндрических функций f_m , сходящаяся к f в $L^p(\pi)$, такая, что $\{f_m\}$ является последовательностью Коши в смысле нормы $\|\cdot\|_{r,p}$. Для $k = 1, \dots, r$ градиент k -го порядка от f определяется как $L^p(\pi, T^k \ddot{\Gamma})$ -предел соответствующих градиентов от функций f_m .

ЛЕММА 4.6 [4, теорема 1]. *Градиент любого порядка $k = 1, \dots, r$ замыкаем, следовательно, соболевский класс $W^{r,p}$ корректно определен.*

5. Соболевские емкости. Емкости, по сравнению с мерами, являются более тонким средством оценки малости множества. В этом пункте мы изучим проблему, имеет ли множество $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ нулевую емкость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Емкость $C_{r,p}$, $r \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, определяется следующим образом:

$$C_{r,p}(U) := \inf\{\|f\|_{r,p} : f \in W^{r,p}, f \geq 0; f \geq 1 \text{ на } U \text{ } \pi\text{-почти всюду}\},$$

если $U \subset \ddot{\Gamma}$ открытое;

$$C_{r,p}(B) := \inf\{C_{r,p}(U) : B \subset U, U \text{ открытое}\}$$

для произвольного $B \subset \ddot{\Gamma}$.

Такая емкость, в отличие от меры, не аддитивна; но она является субаддитивной, т.е.

$$C_{r,p}(A \cup B) \leq C_{r,p}(A) + C_{r,p}(B) \quad \forall A, B \subset \ddot{\Gamma}.$$

Это следует из определения 5.1 и из неравенства треугольника для соболевских норм.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Если $A \subset \Gamma$, то значение $C_{r,p}(A)$ не изменится, если заменить открытые множества в $\ddot{\Gamma}$ открытыми множествами в Γ в определении 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что для любого открытого множества $B \subset \ddot{\Gamma}$ множество $B \cap \Gamma$ открыто в Γ и

$$C_{r,p}^\Gamma(B \cap \Gamma) = C_{r,p}^{\ddot{\Gamma}}(B). \quad (5.1)$$

Это следует из того, что $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma$ имеет нулевую меру.

С другой стороны, всякое открытое множество $U \subset \Gamma$ имеет вид $U = B \cap \Gamma$, где B – открытое множество в $\ddot{\Gamma}$. Действительно, стандартные окрестности в Γ имеют вид $U_{\gamma_o} \cap \Gamma$, где U_{γ_o} – стандартная окрестность γ_o в $\ddot{\Gamma}$.

Равенство следует из (5.1)

$$\begin{aligned} C_{r,p}^\Gamma(A) &= \inf\{C_{r,p}^\Gamma(U) : A \subset U, U \text{ открыто в } \Gamma\} \\ &= \inf\{C_{r,p}^\Gamma(B \cap \Gamma) : A \subset B, B \text{ открыто в } \ddot{\Gamma}\} = C_{r,p}^{\ddot{\Gamma}}(A). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Емкость C на топологическом пространстве X называется *плотной*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти компакт K_ε такой, что $C(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 5.4 [4, теорема 2]. Емкость $C_{r,p}$, порожденная соболевским классом $W^{r,p}$ на $\ddot{\Gamma}$, плотна при любом $r \in \mathbb{N}$ и $p \geq 1$.

Теперь обобщим результат, полученный Рёкнером и Шмуландом в случае $r = 1$, см. [6].

ТЕОРЕМА 5.5. При любых $r \in \mathbb{N}$, $p \in [1; +\infty)$ таких, что $rp < d$, мы имеем $C_{r,p}(\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем r, p ; пусть $rp < d$. Обозначим через Q_n компакт $[-n; n]^d$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\ddot{\Gamma} \setminus \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}_n$, где

$$\mathbf{D}_n = \{\gamma \in \ddot{\Gamma} : \exists x \in Q_n : \gamma(\{x\}) \geq 2\}.$$

Докажем, что $C_{r,p}(\mathbf{D}_n) = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Возьмем любое натуральное N , $N > n$, и положим $\delta = n/N$. Зафиксируем функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\mathbf{1}_{[-1/2; 1/2]} \leq \psi \leq \mathbf{1}_{[-1; 1]}.$$

На $\mathbb{R}^d$ построим такие функции из класса C_0^∞ :

$$\psi_{k_1, \dots, k_d}(x) := \prod_{i=1}^d \psi\left(\frac{x^i - k_i \delta}{\delta}\right), \quad k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z} \cap [-N; N]. \quad (5.2)$$

Тогда $\sup_{\mathbb{R}^d} \|\nabla^k \psi_{k_1, \dots, k_d}\| \leq C(k, d)/\delta^k$ и

$$\mathbf{1}_{\prod_{i=1}^d [k_i \delta - \delta/2; k_i \delta + \delta/2]} \leq \psi_{k_1, \dots, k_d} \leq \mathbf{1}_{\prod_{i=1}^d [k_i \delta - \delta; k_i \delta + \delta]}.$$

Из последней оценки следуют такие свойства функций (5.2):

- (а) для любой точки $x \in Q_n$ существует функция вида (5.2) такая, что $\psi_{k_1, \dots, k_d}(x) = 1$;
- (б) $\bigcup_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d} \subset Q_{n+1}$;
- (в) для любой точки $x \in Q_{n+1}$ найдутся не более 2^d функций (5.2) с $\psi_{k_1, \dots, k_d}(x) \neq 0$.

В силу (а) множество $\mathbf{D}_n$ содержится в открытом множестве

$$\mathbf{G}_{n,\delta} := \bigcup_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \left\{ \gamma : \langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle > \frac{3}{2} \right\}.$$

В силу (б) и (в) имеем оценку

$$\sum_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \sigma(\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}) \leq 2^d \cdot \sigma(Q_{n+1}),$$

и по неравенству Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} (\sigma(\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}))^2 &= \left(\int_{(k_1-1)\delta}^{(k_1+1)\delta} \cdots \int_{(k_d-1)\delta}^{(k_d+1)\delta} \varrho(x^1, \dots, x^d) dx^1 \cdots dx^d \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2n}{N} \right)^d \cdot \int_{(k_1-1)\delta}^{(k_1+1)\delta} \cdots \int_{(k_d-1)\delta}^{(k_d+1)\delta} \varrho^2(x^1, \dots, x^d) dx^1 \cdots dx^d. \end{aligned}$$

Теперь оценим меру множества

$$\mathbf{G}'_{n,\delta} := \bigcup_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \{\gamma : \gamma(\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}) > 1\}$$

(которое содержит множество $\mathbf{G}_{n,\delta}$): в силу (3.2) мы имеем

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{G}'_{n,\delta}) &\leq \sum_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \pi(\{\gamma : \gamma(\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}) > 1\}) \\ &\leq \sum_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \frac{(\sigma(\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}))^2}{2!} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n}{N}\right)^d \cdot 2^d \cdot \int_{Q_{n+1}} \varrho^2(\vec{x}) d\vec{x} = \text{const}(n) \cdot \delta^d. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Построим гладкую цилиндрическую функцию

$$f_n^\delta := 1 - \prod_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \xi(\langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle),$$

где $\xi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $1_{(-\infty; 1]} \leq \xi \leq 1_{(-\infty; 3/2]}$. Тогда $f_n^\delta = 1$ на $\mathbf{G}_{n,\delta}$, но f_n^δ со всеми своими градиентами обращается в нуль вне $\mathbf{G}'_{n,\delta}$.

Оценим норму $\nabla^k f_n^\delta$, $k = 1, \dots, r$. В каждой $\gamma \in \Gamma$ (т.е. в π -почти каждой $\gamma \in \tilde{\Gamma}$) мы имеем

$$|\nabla^k \langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle(x_1, \dots, x_k)| \leq \frac{C(k, d)}{\delta^k} \cdot \prod_{i=1}^k 1_{\text{supp } \psi_{k_1, \dots, k_d}}(x_i).$$

Такая оценка с большей константой $C(k, d, \xi)$ имеет место для

$$\nabla^k (\xi(\langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle))(x_1, \dots, x_k).$$

Поскольку точка x_k не может лежать в более, чем 2^d носителях функций (5.2) и функции $\xi(\langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle)$ принимают значения в $[0; 1]$, мы получаем

$$\left| \nabla^k \left(\prod_{k_1, \dots, k_d = -N}^N \xi(\langle \psi_{k_1, \dots, k_d}, \gamma \rangle) \right) (x_1, \dots, x_k) \right| \leq \frac{\text{const}(k, d, \xi)}{\delta^k} \cdot \prod_{i=1}^k 1_{Q_{n+1}}(x_i),$$

где $\text{const}(k, d, \xi)$ зависит от $C(j, d, \xi)$, $j = 1, \dots, k$ и может быть вычислена по формуле дифференцирования произведения $d \cdot 2^d$ функций: действительно, в произведении, стоящем в скобках в левой части, не более $k \cdot 2^d < d \cdot 2^d$ множителей имеют ненулевые x_1 -, или x_2 -, ... или x_k -компоненты градиентов.

Итак, мы имеем

$$|\nabla^k f_n^\delta(\gamma)(x_1, \dots, x_k)| \leq \frac{\text{const}(k, d, \xi)}{\delta^k} \cdot \prod_{i=1}^k 1_{Q_{n+1}}(x_i).$$

Следовательно,

$$\|\nabla^k f_n^\delta(\gamma)\|_{\mathcal{H}_k}^2 \leq \frac{\text{const}^2(r, k, d) \cdot (\gamma(Q_{n+1}))^k}{\delta^{2k}},$$

и

$$\begin{aligned} \int \|\nabla^k f_n^\delta(\gamma)\|_{\mathcal{H}_k}^p \pi(d\gamma) &\leq \delta^{-kp} \int_{\mathbf{G}'_{n,\delta}} \text{const}^p(r, k, d) \cdot (\gamma(Q_{n+1}))^{kp/2} \pi(d\gamma) \\ &\leq \delta^{-kp} \cdot \text{const}'(r, p, k, d, n, q) \cdot (\delta^d)^q, \quad 0 < q < 1, \end{aligned}$$

в силу (5.3) и леммы 3.2. Если $rp < d$, то можно выбрать такое q , что $qd > rp$, и тогда $\delta^{qd-kp} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, r$. Кроме того,

$$\|f_n^\delta\|_p \leq (\pi(\mathbf{G}'_{n,\delta}))^{1/p} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\|f_n^\delta\|_{r,p} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Наконец, по определению емкости мы получаем

$$C_{r,p}(\mathbf{D}_n) \leq C_{r,p}(\mathbf{G}_{n,\delta}) \leq \|f_n^\delta\|_{r,p} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

следовательно, $C_{r,p}(\mathbf{D}_n) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. В [4, теорема 2] мы доказали, что (при некоторых условиях гладкости на M , которые выполняются, в частности, для $M = \mathbb{R}^d$) при любых $p \geq 1$ емкость $C_{r,p}$ на $\tilde{\Gamma}$ плотна. Как вытекает из следствия 5.2, этот результат для $p < d/r$ верен также и на Γ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. 1998. V. 154. № 2. P. 444–500.
- [2] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case // J. Funct. Anal. 1998. V. 157. № 1. P. 242–291.
- [3] Bichteler K., Gravereaux J. B., Jacod J., Malliavin Calculus for Processes with Jumps. New York: Gordon and Breach Sci. Publ., 1987.
- [4] Богачев В. И., Пугачев О. В., Рёкнер М. Поверхностные меры и плотность соболевских емкостей на пространстве Пуассона // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 1. С. 7–10.
- [5] Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А., Смородина Н. В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. М.: Физматлит, 1995.
- [6] Röckner M., Schmuland B. A support property for infinite-dimensional interacting diffusion processes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 326. P. 359–364.
- [7] Смородина Н. В. Дифференциальное исчисление в пространстве конфигураций и устойчивые меры. I // Теор. вероятн. и прилож. 1988. Т. 33. С. 522–534.
- [8] Смородина Н. В. Формула Остроградского–Гаусса для пространства конфигураций // Теор. вероятн. и прилож. 1990. Т. 35. № 4. С. 725–736.
- [9] Пугачев О. В. Пространство простых конфигураций является польским // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 4. С. 581–589.
- [10] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [11] Ma Zhi-Ming, Röckner M. Construction of diffusions on configuration spaces // Osaka J. Math. 2000. V. 37. P. 273–314.
- [12] Röckner M. Stochastic analysis on configuration spaces: basic ideas and recent results // New Directions in Dirichlet Forms. AMS/IP Stud. Adv. Math. V. 8. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 157–231.
- [13] Богачев В. И. Основы теории меры. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003.
- [14] Albeverio S., Daletskii A., Lytvynov E. Laplace operators on differential forms over configuration spaces // J. Geom. Phys. 2001. V. 37. P. 15–46.