Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Дербенёв, З. Б. Цалюк, Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 88–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:37:52

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ НЕУСТОЙЧИВОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

В. А. Дербенёв, З. Б. Цалюк

Указана структура резольвенты разностного ядра, позволяющая находить асимптотику решения уравнения восстановления по заданной асимптотике свободного члена. Асимптотическое представление резольвенты получено при минимальных требованиях на моменты ядра. Аналогичные результаты приведены и для интегро-дифференциальных уравнений.

Библиография: 12 названий.

В работе изучается асимптотическое поведение решений уравнений

$$x(t) = K * x(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x'(t) = Ax(t) + K * x(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где свертка $K * x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds$, и K и f предполагаются непрерывными при $t \geq 0$.

1. Рассмотрим сначала уравнение (1). Пусть R – резольвента ядра K . Тогда, как известно, R удовлетворяет равенству

$$R(t) = K(t) + K * R(t), \quad (3)$$

а решение уравнения (1) представимо в виде

$$x(t) = f(t) + R * f(t).$$

Из этого представления видно, что асимптотическое поведение x при заданном поведении f определяется асимптотикой резольвенты.

Пусть

$$\hat{q}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} q(t) dt$$

– преобразование Лапласа функции q . В силу (3)

$$\hat{R}(z) = \frac{\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)}.$$

Естественно ожидать, что свойства R зависят от особых точек $\hat{R}$, т.е. от нулей функции $1 - \hat{K}(z)$. Н. Винер и Р. Пэли показали (см. [1]), что если $K \in L_1(0, \infty)$, то $R \in L_1$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\hat{K}(z) - 1 = 0 \quad (4)$$

не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Случай, когда $K \geq 0$ и $z = 0$ является корнем уравнения (4) изучали У. Л. Смит [2], В. Феллер [3], Б. А. Севастьянов [4], З. Б. Цалюк [5], [6], В. А. Дербенёв [7]. Случай, когда уравнение (4) имеет корни на мнимой оси, рассматривали И. И. Левин и Д. Ф. Шиа [8], а общий случай конечного числа корней в правой полуплоскости В. А. Дербенёв [9]. При этом использовались либо тауберовы теоремы для преобразования Лапласа, либо $\hat{R} = \hat{K}/(1 - \hat{K})$ представлялась в виде $\hat{R}_1(z) + \hat{R}_2(z)$, где $\hat{R}_1$ – правильная дробь, имеющая те же полюсы, что и $\hat{R}$, а $\hat{R}_2(z)$ регулярна при $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Полученные на этом пути результаты либо содержали явно завышенные требования, либо давали не полную информацию. Для изучения допустимости относительно уравнения различных пар пространств З. Б. Цалюком был предложен метод, подобный методу регуляризации. Здесь этот метод применяется для выяснения асимптотики резольвенты. В его основе лежит следующая простая идея.

Если I – тождественный, а $\tilde{K}$ – линейный оператор, то, умножая $(I - \tilde{K})$, например, справа на $(I + \tilde{Q})$, найдем $(I - \tilde{K})(I + \tilde{Q}) = I - \tilde{K}_1$, где $\tilde{K}_1 = \tilde{K} - \tilde{Q} + \tilde{K}\tilde{Q}$, а резольвента $\tilde{R}$ оператора $\tilde{K}$ связана с резольventой $\tilde{R}_1$ оператора $\tilde{K}_1$ равенством $\tilde{R} = \tilde{R}_1 + \tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{R}_1$. Таким образом, подбирая $\tilde{Q}$ так, чтобы резольвента $\tilde{R}_1$ имела определенное свойство, мы выясним свойство $\tilde{R}$. В частности, если $\tilde{K}$ и $\tilde{Q}$ операторы свертки, то $\tilde{K}_1$ – также оператор свертки с ядром

$$K_1 = K - Q + K * Q, \quad (5)$$

и его резольвента R_1 в силу теоремы Винера–Пэли будет абсолютно интегрируема на $[0, \infty)$, если $K_1 \in L_1$ и $1 - \hat{K}_1 = (1 - \hat{K})(1 + \hat{Q})$ не обращается в нуль при $\operatorname{Re} z \geq 0$, т.е. если Q выбрать так, чтобы $1 + \hat{Q}$ имела, например, полюсы, уничтожающие нули $1 - \hat{K}$. Тогда

$$R = Q + R_1 + Q * R_1, \quad (6)$$

где $R_1 \in L_1(0, \infty)$.

Предположим, что уравнение (4) имеет в области $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратности $n_1, \dots, n_k$ соответственно. Чтобы $K_1(z) \neq 1$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$ необходимо принять

$$1 + \tilde{Q}(z) = u(z) \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{-n_j},$$

где $u(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$, т.е. принять

$$Q(z) = \frac{u(z) - \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{n_j}}{\prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{n_j}}.$$

Чтобы $\hat{Q}(z)$ было преобразованием Лапласа элементарной функции, достаточно считать $\hat{Q}(z)$ правильной рациональной дробью, для чего достаточно принять, например,

$u(z) = (z + 1)^n$, где $n = \sum_{j=1}^k n_j$. (В качестве $u(z)$ можно выбрать любой устойчивый многочлен степени n с коэффициентом 1 при z^n .) Тогда $\hat{Q}(z)$ можно разложить на элементарные дроби

$$\hat{Q}(z) = \frac{(z + 1)^n - \prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{n_j}}{\prod_{j=1}^k (z - \lambda_j)^{n_j}} = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{n_m} \frac{(j-1)! A_{mj}}{(z - \lambda_m)^j},$$

что приводит к

$$Q(t) = \sum_{m=1}^k \sum_{j=0}^{n_m-1} A_{mj} t^j e^{-\lambda_m t}.$$

Из предыдущего видно, что при таком выборе Q в правой полуплоскости $\hat{K}_1(z) \neq 1$. Осталось выяснить, когда $K_1 \in L_1(0, \infty)$ или, более обще, $t^q K_1 \in L_1(0, \infty)$, где $q \geq 0$ — целое число.

Пусть

$$p = \max_{\operatorname{Re} \lambda_m = 0} \{n_m\}$$

и $t^{p+q} K \in L_1$. Тогда, так как λ_m — корень уравнения (4) кратности n_m , имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_m s} K(s) ds = 1, \quad \int_0^\infty e^{-\lambda_m s} s^j K(s) ds = 0, \quad j = 1, \dots, n_m - 1.$$

Поэтому, при $j = 0, \dots, n_m$

$$\psi_{jm}(t) = \int_0^t (t-s)^j e^{\lambda_m(t-s)} K(s) ds - t^j e^{\lambda_m t} = - \int_t^\infty (t-s)^j e^{\lambda_m(t-s)} K(s) ds$$

и

$$\int_0^\infty t^q |\psi_{jm}(t)| dt \leq \int_0^\infty s^q |K(s)| \int_0^s t^q e^{-\operatorname{Re} \lambda_m t} dt ds < \infty,$$

так как

$$\int_0^s t^j e^{-\operatorname{Re} \lambda_m t} dt \leq C(s^p + 1).$$

Из (5) следует, что $t^q K_1 \in L_1$, а значит (см., например, [10]), и $t^q R_1 \in L_1$. Таким образом, в соответствии с (6), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть уравнение (4) имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число корней λ_m , $m = 1, \dots, k$, кратности n_m соответственно. Если $t^{p+q} K \in L_1(0, \infty)$, где

$$p = \max_{\operatorname{Re} \lambda_m = 0} \{n_m\}$$

и q — целое неотрицательное число, то резольвента R ядра K представима в виде

$$R(t) = Q(t) + R_1(t) + Q * R_1(t), \quad (7)$$

где

$$Q(t) = \sum_{m=1}^k P_{n_m-1}(t) e^{\lambda_m t},$$

$P_r(t)$ — многочлен степени $\leq r$, а R_1 такова, что $t^q R_1 \in L_1(0, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_m > 0$, $m = 1, \dots, k$. Тогда

$$R(t) = \sum_{m=1}^k P_{n_m-1}(t) e^{\lambda_m t} + R_2(t),$$

где $t^q R_2 \in L_1(0, \infty)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} Q * R_1(t) &= \int_0^\infty Q(t-s) R_1(s) ds - \int_t^\infty Q(t-s) R_1(s) ds \\ &= \sum_{m=1}^k P_{n_m-1}(t) e^{\lambda_m t} - \int_t^\infty Q(t-s) R_1(s) ds, \end{aligned}$$

а

$$t^q \int_t^\infty Q(t-s) R_1(s) ds \in L_1$$

(см. доказательство того, что $t^q \psi_{jm} \in L_1$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\operatorname{Re} \lambda_m = 0$, $\lambda_m \neq 0$, $m = 1, \dots, k$, $t^{p+q} K \in L_1(0, \infty)$ и $f(t) = f(\infty) + \varphi(t)$, где $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $t^q \varphi \in L_1(0, \infty)$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = C + \sum_{m=1}^k \sum_{j=0}^{n_m-1} C_{mj} t^j e^{\lambda_m t} + \psi(t),$$

где $\psi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $q \geq p-1$, и $t^{q-p} \psi \in L_1(0, \infty)$, если $q \geq p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать все константы буквой C , а все функции

$$\sum_{m=1}^k P_{n_m-1}(t) e^{\lambda_m t}$$

независимо от многочленов P_{n_m-1} через $Q(t)$. Согласно (7)

$$\begin{aligned} x &= f + R * f = C - f(\infty) \int_t^\infty R_1(s) ds + \varphi + R_1 * \varphi \\ &\quad + f(\infty) * Q + f(\infty) * R_1 * Q + Q * (\varphi + R_1 * \varphi). \end{aligned}$$

Заметим, что если $t^q u, t^q v \in L_1$, то $t^q(u * v) \in L_1$, а

$$Q * u = \int_0^\infty Q(t-s) u(s) ds - \int_t^\infty Q(t-s) u(s) ds = Q(t) + \psi(t),$$

где ψ линейная комбинация

$$\psi_{jm}(t) = \int_t^\infty (t-s)^j e^{\lambda_m(t-s)} u(s) ds, \quad j \leq n_m - 1 \leq p - 1.$$

Так как

$$|\psi_{jm}(t)| \leq \int_t^\infty s^j |u(s)| ds \rightarrow 0,$$

если $q \geq p - 1 \geq j$, и

$$\int_0^\infty t^{q-p} |\psi_{im}(t)| ds \leq \int_0^\infty \int_t^\infty s^{q-p+j} |u(s)| ds dt = \int_0^\infty s^{q-p+j+1} |u(s)| ds < \infty,$$

если $q \geq p$, то $\psi \rightarrow 0$ при $q \geq p - 1$ и $t^{q-p}\psi \in L_1$ при $p \leq q$.

Наконец,

$$1 * Q = \int_0^t Q(s) ds = C + Q(t).$$

Поэтому $t^q(\varphi + R_1 * \varphi) \in L_1$ и так как $R_1 \in L_1$, $\varphi + R_1 * \varphi \rightarrow 0$. Далее, $Q * (\varphi + R_1 * \varphi) = Q + \psi$,

$$f(\infty) * Q * R_1 = (C + Q) * R_1 = C - C \int_t^\infty R_1(s) ds + Q * R_1 = C + Q + \psi.$$

Это доказывает утверждение следствия.

Из этого следствия при $p = 1$ и $q = 0$ получаем утверждение И. И. Левина и Д. Ф. Шиа [8], но при более слабых условиях (в [8] требуется, чтобы $t^k K, t^k \psi \in L_1$).

Подобным же образом может быть доказано

СЛЕДСТВИЕ 3. Если уравнение (4) имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ единственный корень $z = 0$ кратности n и $t^{n+q}K \in L_1(0, \infty)$, где $q \geq n$, то $t^{q-n}(R - P_{n-1}) \in L_1(0, \infty)$.

При $n = 1, q = 2$ отсюда вытекает результат Б. А. Севастьянова [4].

2. Перейдем теперь к изучению уравнения (2). Как известно, решение уравнения (2) дается равенством $x(t) = R(t)x(0) + R * f(t)$, где R — решение задачи

$$R' = AR + K * R, \quad R(0) = 1. \quad (8)$$

Поэтому достаточно получить асимптотическое представление R .

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение

$$M(z) \equiv z - A - \hat{K}(z) = 0$$

имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число корней λ_m , $m = 1, \dots, k$, кратности n_m соответственно. Если $t^{p+q}K \in L_1(0, \infty)$, где

$$p = \max_{\operatorname{Re} \lambda_m = 0} \{n_m\}$$

и $q \geq 0$ — целое число, то

$$R(t) = Q(t) + Q * R_1(t),$$

где

$$Q(t) = \sum_{m=1}^k P_{n_m-1}(t) e^{\lambda_m t},$$

$P_r(t)$ — многочлен степени $\leq r$, а R_1 такова, что $t^q R_1 \in L_1(0, \infty)$ и $t^q R_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$Q(t) = \sum_{m=1}^k \sum_{j=0}^{n_m-1} A_{mj} t^j e^{\lambda_m t},$$

где коэффициенты A_{mj} определяются из разложения

$$\frac{(z+1)^{n_1+\dots+n_k}}{(z-\lambda_1)^{n_1} \dots (z-\lambda_k)^{n_k}} = \sum_{m=1}^k \sum_{j=0}^{n_m-1} \frac{A_{mj} j!}{(z-\lambda_m)^{j+1}}.$$

Тогда

$$\widehat{Q}(z) = \frac{(z+1)^{n_1+\dots+n_k}}{\prod_{m=1}^k (z-\lambda_m)^{n_m}}$$

и

$$Q(0) = \sum_{m=1}^k A_{m0} = \lim_{z \rightarrow \infty} z \widehat{Q}(z) = 1.$$

Применяя к обеим частям (8) операцию свертки с ядром Q и учитывая равенство $Q * R' = R - Q + Q' * R$, получим

$$R = \{AQ + Q * K - Q'\} * R + Q. \quad (9)$$

Покажем, что $t^q K_1 = t^q \{AQ + Q * K - Q'\} \in L_1$ и $\widehat{K}_1(z) \neq 1$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Так как $\widehat{K}_1(z) = A\widehat{Q} + \widehat{Q}\widehat{K} - z\widehat{Q} + 1$, то $1 - \widehat{K}_1(z) = \widehat{Q}(z)M(z) \neq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Из $M(\lambda_m) = M'(\lambda_m) = \dots = M^{(n_m-1)}(\lambda_m) = 0$ следует при любом λ_m и $j \leq n_m$

$$\begin{aligned} \psi_{mj}(t) &= (t^j e^{\lambda_m t})' - A t^j e^{\lambda_m t} - \int_0^t (t-s)^j e^{\lambda_m(t-s)} K(s) ds \\ &= e^{\lambda_m t} \sum_{i=0}^j C_j^i t^{j-i} M^{(i)}(\lambda_m) - \int_t^\infty (t-s)^j e^{\lambda_m(t-s)} K(s) ds \\ &= (-1)^{j+1} \int_t^\infty (s-t)^j e^{-\lambda_m(s-t)} K(s) ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$t^q |\psi_{mj}(t)| \leq \int_t^\infty s^q (s-t)^j e^{-\operatorname{Re} \lambda_m(s-t)} K(s) ds \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ и

$$\int_0^\infty t^q |\psi_{mj}(t)| dt \leq \int_0^\infty s^q K(s) \int_0^s t^j e^{-\operatorname{Re} \lambda_m t} dt ds < \infty.$$

Из (9) имеем $R = Q + R_1 * Q$, где R_1 резольвента ядра K_1 , а так как $t^q K_1 \in L_1$ и $\widehat{K}_1(z) \neq 1$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$, то [11] $t^q R_1 \in L_1$. Осталось показать, что $t^q R_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{t+1}{s+1} \right)^q |R_1(t-s)| ds &\leq 2^q \int_0^t [(t-s)^q + 1] |R_1(t-s)| ds \\ &= 2^q \int_0^t [s^q + 1] |R_1(s)| ds \leq C < \infty \end{aligned}$$

и при любом $T > 0$

$$\int_0^T \left(\frac{t+1}{s+1} \right)^q |R_1(t-s)| ds \leq 2^q \int_{t-T}^t [s^q + 1] |R_1(s)| ds \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$. Поэтому [12] интегральный оператор Вольтерра с ядром

$$r(t, s) = \left(\frac{t+1}{s+1} \right)^q R_1(t-s)$$

переводит функции, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$, в функции, стремящиеся к нулю. А так как $v(t) = (t+1)^q K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$(t+1)^q R_1(t) = v(t) + \int_0^t r(t, s) v(s) ds \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.
- [2] Smith W. L. Asymptotic renewal theorems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1954. V. 64. P. 9–48.
- [3] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
- [4] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
- [5] Цалюк З. Б. Об асимптотике решений уравнения восстановления // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 6. С. 1112–1114.
- [6] Цалюк З. Б. Асимптотические оценки решений уравнения восстановления // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 2. С. 320–325.
- [7] Дербенёв В. А. К вопросу об асимптотике уравнения восстановления // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 4. С. 743–746.
- [8] Levin I. I., Shea D. F. On the asymptotic behavior of the bounded solutions of some integral equations // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 42–82, 288–326, 537–575.
- [9] Дербенёв В. А. Асимптотика решения неустойчивого уравнения восстановления // Изв. вузов. Матем. Казань, 1976.
- [10] Дербенёв В. А. Асимптотические свойства решения уравнения восстановления // Матем. анализ. № 2. Краснодар, 1974. С. 43–49.
- [11] Дербенёв В. А., Цалюк З. Б. К вопросу об асимптотическом разложении решений уравнения восстановления // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 4. С. 335–341.
- [12] Цалюк З. Б. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2096–2098.

Кубанский государственный университет,
г. Краснодар

Поступило
17.07.95