Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Крючков, Инъективные и проективные объекты в категории локально компактных модулей над кольцом целых величин глобального поля, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 118–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1594>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 08:08:31

УДК 519.48

ИНЪЕКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ МОДУЛЕЙ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ВЕЛИЧИН ГЛОБАЛЬНОГО ПОЛЯ

Н. И. Крючков

В статье описаны инъективные и проективные объекты в категории локально компактных модулей над кольцом целых величин глобального поля, а также объекты этой категории, обладающие инъективными или проективными резольвентами.

Библиография: 7 названий.

В статье описываются инъективные и проективные объекты в категории отделимых локально компактных модулей над кольцом целых величин глобального поля, а также объекты этой категории, обладающие инъективными и проективными резольвентами. Основные результаты, изложенные в настоящей работе, анонсированы в [1].

Приведем необходимые определения (см., например, [2]). Пусть $\mathbb{k}$ – глобальное поле, т.е. конечное расширение поля рациональных чисел или поля рациональных дробей $\mathbb{F}(t)$ над конечным полем $\mathbb{F}$ (t трансцендентен над $\mathbb{F}$) и $\mathcal{O}$ – целое замыкание в $\mathbb{k}$ кольца целых чисел или кольца полиномов $\mathbb{F}[t]$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ категорию отделимых локально компактных $\mathcal{O}$ -модулей с непрерывными гомоморфизмами в качестве морфизмов. Категория $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ как категория локально компактных модулей над дискретным коммутативным кольцом $\mathcal{O}$ обладает двойственностью, являющейся обобщением классической двойственности Л. С. Понтрягина [3]. Точнее, если $M \in \text{Ob}(\mathcal{L}_{\mathcal{O}})$, то через $M^{\wedge}$ обозначим группу характеров аддитивной группы модуля M [3, § 34] и снабдим ее структурой $\mathcal{O}$ -модуля следующим образом: для произвольных $\chi \in M^{\wedge}$, $r \in \mathcal{O}$, $a \in M$ полагаем $(r\chi)(a) = \chi(ra)$. Известно (см., например, [2] или [4]), что $\wedge$ – контрвариантный функтор $\wedge: \mathcal{L}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, квадрат которого естественно эквивалентен тождественному функтору.

Наличие топологической структуры на объектах категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ приводит к некоторым осложнениям, связанным с употреблением некоторых стандартных терминов гомологической алгебры, поэтому договоримся о следующем. Последовательность модулей и гомоморфизмов $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ будем называть *короткой точной последовательностью* в том и только том случае, когда f – ядро g , а g – коядро f . Договоримся в настоящей работе короткую точную последовательность $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ обозначать $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$.

Известно (см., например, [4]), что если $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0$ – короткая точная последовательность, то $0 \rightarrow C^{\wedge} \xrightarrow{g^{\wedge}} B^{\wedge} \xrightarrow{f^{\wedge}} A^{\wedge} \rightarrow 0$ – также короткая точная последовательность (отображения $f^{\wedge}$ и $g^{\wedge}$ определяются стандартно).

Наконец, в некотором пояснении нуждаются определения инъективного и проективного объектов в категории $\mathcal{L}_\theta$, это опять-таки связано с наличием топологической структуры на объектах $\mathcal{L}_\theta$. Это можно сделать различными способами, для нас удобен следующий вариант. Модуль I называется инъективным в $\mathcal{L}_\theta$, если для любой короткой точной последовательности $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ категории $\mathcal{L}_\theta$ и любого непрерывного гомоморфизма $h: A \rightarrow I$ существует непрерывный гомоморфизм $h_1: B \rightarrow I$, такой, что $h = h_1 f$. Двойственным образом определяется проективный модуль.

Используя отмеченные выше свойства функтора двойственности $\hat{}$, сразу получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Модуль I инъективен в категории $\mathcal{L}_\theta$ тогда и только тогда, когда $I^\wedge$ – проективен в этой категории.*

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, договоримся об одном термине. Компактный θ -модуль K будем называть обобщенным тором, если и только если двойственный модуль $K^\wedge$ является проективным объектом в категории дискретных θ -модулей. Заметим, что в категории локально компактных абелевых групп обобщенный тор – это в точности группа вида T^σ , где $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, а σ – некоторый кардинал.

ЛЕММА. *В категории $\mathcal{L}_\theta$ справедливы следующие утверждения:*

- 1) дискретный θ -модуль, проективный в категории дискретных θ -модулей, проективен в категории $\mathcal{L}_\theta$;
- 2) обобщенный тор инъективен в категории $\mathcal{L}_\theta$;
- 3) модули, инъективные в категории $\mathcal{L}_\theta$, являются делимыми;
- 4) модули, проективные в категории $\mathcal{L}_\theta$, являются модулями без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ произвольная короткая точная последовательность в категории $\mathcal{L}_\theta$ и P – произвольный дискретный модуль, являющийся проективным в категории дискретных θ -модулей, $h: P \rightarrow C$ – произвольный непрерывный гомоморфизм. Тогда существует алгебраический гомоморфизм $h_1: P \rightarrow B$ такой, что $h = gh_1$, но так как P является дискретным, то h_1 непрерывен, что и доказывает проективность P в категории $\mathcal{L}_\theta$.

2) Это утверждение следует из теоремы 1 и определения обобщенного тора.

3) Пусть I – инъективный модуль в категории $\mathcal{L}_\theta$. Обозначим через $I^{(d)}$ модуль I , наделенный дискретной топологией. Тогда легко видеть, что $I^{(d)}$ инъективен в категории дискретных θ -модулей. Так как θ – дедекиндово кольцо, то $I^{(d)}$ является делимым (см., например, [5, гл. VII]). Значит, I делим.

4) Это утверждение следует из предыдущего и свойств функтора двойственности [4].

Прежде чем сформулировать основные результаты настоящей работы, напомним терминологию работы [4]. Нормирование v глобального поля $\mathbb{k}$ называется конечным относительно θ , если $v(\lambda) \leq 1$ для любого $\lambda \in \theta$ и бесконечным в противном случае. Пополнение, соответствующее бесконечному нормированию, будем также называть бесконечным. Заметим, что бесконечные пополнения глобального поля изоморфны полям $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или полю формальных степенных рядов от t^{-1} над некоторым конечным полем. Легко проверить, что бесконечные пополнения глобального поля $\mathbb{k}$ не содержат открытых θ -подмодулей и не содержат компактных θ -подмодулей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{O}$ – кольцо целых величин глобального поля $\mathbb{k}$. Следующие условия для локально компактного $\mathcal{O}$ -модуля эквивалентны:

- 1) I инъективен относительно коротких точных последовательностей компактно порожденных $\mathcal{O}$ -модулей;
- 2) I инъективен в категории локально компактных $\mathcal{O}$ -модулей;
- 3) I изоморфен модулю вида $B \oplus T$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, а T – обобщенный тор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть модуль I инъективен относительно класса компактно порожденных $\mathcal{O}$ -модулей. Заметим сначала, что I является делимым. Действительно, рассматривая кольцо $\mathcal{O}$ как циклический модуль над самим собой и обозначая полученный модуль тем же символом $\mathcal{O}$, для произвольных $\lambda \in \mathcal{O}$ и $a \in I$ зададим (непрерывные) гомоморфизмы $f_\lambda: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и $g: \mathcal{O} \rightarrow I$, положив $f_\lambda(\mu) = \lambda\mu$ для произвольного $\mu \in \mathcal{O}$ и $g(\mu) = \mu a$. Последовательность $0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{f_\lambda} \mathcal{O} \xrightarrow{j} \mathcal{O}/f_\lambda(\mathcal{O}) \longrightarrow 0$ будет короткой точной последовательностью компактно порожденных $\mathcal{O}$ -модулей и, используя инъективность I относительно таких последовательностей, получим, что найдется элемент $b \in I$ такой, что $\lambda b = a$.

Пусть теперь $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} L \xrightarrow{j} L/M \longrightarrow 0$ – произвольная короткая точная последовательность в категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$. Будем считать морфизм i топологическим вложением, т.е. будем считать, что M подмодуль L . Пусть теперь f – произвольный непрерывный гомоморфизм $f: M \rightarrow I$. Покажем, что f продолжается до непрерывного гомоморфизма $g: L \rightarrow I$. Пусть N – произвольный открытый компактно порожденный подмодуль модуля L . По условию $f|_{L \cap N}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $f_1: N \rightarrow I$. Зададим f_2 из внешней прямой суммы $M \oplus N$ в I , положив для произвольных $m \in M$, $h \in N$ $f_2((m, h)) = f(m) + f_1(h)$. Ядро канонического гомоморфизма модуля $M \oplus N$ на $M + N$ состоит из элементов вида $(-m, m)$, где $m \in M \cap N$ и ясно, что все эти элементы лежат в ядре f_2 . Значит, f_2 индуцирует алгебраический гомоморфизм f_3 модуля $M + N$ в I такой, что $f_3(m + h) = f(m) + f_1(h)$ для произвольных $m \in M$, $h \in N$. Далее, f_3 продолжает f_1 , так как f – гомоморфизм. f_3 – непрерывен, так как N открыт в L . Так как I является делимым, следовательно, инъективным в категории дискретных $\mathcal{O}$ -модулей, то f_3 продолжается до алгебраического гомоморфизма $g: L \rightarrow I$. $M + N$ открыт в L , поэтому g также непрерывен.

2) $\implies$ 3). Докажем сначала, что I изоморфен модулю вида $B \oplus T$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, а T – компактный модуль. Действительно, из теоремы о строении компактных модулей над кольцом целых величин глобального поля [4, теорема 2] имеем $I \cong B \oplus M$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, а модуль M содержит открытый компактный подмодуль T . Если $M/T \neq 0$, то пусть f – произвольный ненулевой гомоморфизм из $\mathcal{O}$ в дискретный модуль M/T . Так как по лемме $\mathcal{O}$ является проективным модулем в $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, то найдется гомоморфизм $f_1: \mathcal{O} \rightarrow M$ такой, что $f = hf_1$, где h – естественная проекция $h: M \rightarrow M/T$. Так как I инъективен в $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, то и M является инъективным в $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, поэтому существует непрерывный гомоморфизм $g_1: \tilde{\mathbb{k}} \rightarrow M$, где $\tilde{\mathbb{k}}$ – бесконечное пополнение $\mathbb{k}$, такой, что $f_1 = g_1 i$, где i – естественное вложение $i: \mathcal{O} \rightarrow \tilde{\mathbb{k}}$. Полагая $g = hg_1$, получим ненулевой непрерывный гомоморфизм $g: \tilde{\mathbb{k}} \rightarrow M/T$ и в силу дискретности M/T ядро гомоморфизма g должно быть собственным подмодулем в $\tilde{\mathbb{k}}$, что невозможно, поэтому $M/T = \{0\}$, $I \cong B \oplus T$. В таком случае T также будет инъективным объектом в $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, поэтому по

теореме 1 $T^\wedge$ будет дискретным проективным модулем в $\mathcal{L}_\theta$, следовательно, $T^\wedge$ – дискретный проективный в категории дискретных θ -модулей, поэтому по определению T – обобщенный тор.

3) $\implies$ 1). Докажем, что модуль вида $B \oplus T$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, а T – обобщенный тор, инъективен относительно класса коротких точных последовательностей компактно порожденных θ -модулей. Для этого достаточно, очевидно, показать инъективность относительно указанного класса обобщенного тора и бесконечного пополнения поля $\mathbb{k}$. Инъективность обобщенного тора утверждается в лемме. Докажем, что бесконечные пополнения поля $\mathbb{k}$ инъективны относительно коротких точных последовательностей компактно порожденных θ -модулей. Итак, пусть $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_2/L_1 \rightarrow 0$ короткая точная последовательность компактно порожденных θ -модулей. Будем считать, что L_1 является подмодулем L_2 . Представим каждый из модулей L_1 и L_2 в виде $L_i \cong B_i \oplus K_i \oplus D_i$, $i = 1, 2$, где B_1, B_2 конечные прямые суммы бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, K_1, K_2 – компактные модули, а D_1 и D_2 – прямые суммы конечного числа идеалов кольца θ (это возможно согласно предложению 1 из [4]). Положим $W_i = B_i \oplus D_i$, $i = 1, 2$. Модули W_i допускают топологическое вложение в прямую сумму конечного числа модулей вида $\mathbb{k}$, поэтому W_i не имеют компактных θ -подмодулей, так как $\mathbb{k}$ обладает этим свойством. Пусть теперь $\pi: L_2 \rightarrow W_2$ – каноническая проекция с ядром K_2 и $\alpha: W_1 \rightarrow W_2$ – ограничение π на W_1 . Тогда $\text{Ker } \alpha = W_1 \cap K_2 = \{0\}$, поэтому α – непрерывный мономорфизм. Так как K_2 компактный подмодуль, то гомоморфизм π замкнут (см., например, [6, теорема 5.18]). Теперь W_1 – замкнутый подмодуль L_1 , который в свою очередь является замкнутым подмодулем L_2 , следовательно, $\alpha(W_1)$ замкнуто в W_2 и поэтому локально компактно. Далее, так как W_1 компактно порожден, то α открыто отображает W_1 на его образ в W_2 . Таким образом, α топологически изоморфным образом отображает W_1 на $\alpha(W_1)$.

Договоримся теперь об одном обозначении. Для произвольных объектов X и Y категории $\mathcal{L}_\theta$ через $\text{Hom}(X, Y)$ обозначим множество всех непрерывных гомоморфизмов из X в Y .

Пусть теперь $f \in \text{Hom}(L_1, \mathbb{k})$ и A – подмодуль $\alpha(W_1)$. Ясно, что $f(K_1) = \{0\}$; так как $\alpha^{-1}: A \rightarrow W_1$ – модульный изоморфизм (топологический), то $(f|_{W_1})\alpha^{-1} \in \text{Hom}(A, \mathbb{k})$. Предположим сначала, что существует $g \in \text{Hom}(W_2, \mathbb{k})$ такой, что $g|_A = (f|_{W_1})\alpha^{-1}$. Определим $f_1: L_2 \rightarrow \mathbb{k}$, положив для произвольных $x \in W_2$ и $y \in K_2$: $f_1(x + y) = g(x)$. Ясно, что $f_1 \in \text{Hom}(L_2, \mathbb{k})$. Если теперь $s + t \in L_1$, где $s \in W_1$ и $t \in K_1$, то $f(s + t) = f(s) + f(t) = f(s)$, так как $f(K_1) = \{0\}$, однако $g(\alpha(s)) = f(s)$ по выбору g . Следовательно, $f(s + t) = g(\alpha(s))$. С другой стороны, $f_1(s + t) = f_1(s) + f_1(t) = f(s)$, так как $f_1(K_1) = \{0\}$. Если теперь $s = x + y$, где $x \in W_2$ и $y \in K_2$, то по определению f_1 получим $f_1(s) = g(x)$, но $x = \alpha(s)$, следовательно, $f_1(s) = g(\alpha(s)) = f(s + t)$ и $f_1|_{L_1} = f$.

Таким образом, проблема сводится к случаю, когда W_1 подмодуль W_2 и остается доказать, что для любого $f \in \text{Hom}(W_1, \mathbb{k})$ существует $g \in \text{Hom}(W_2, \mathbb{k})$ такой, что $g|_{W_1} = f$. Ясно, что W_2 можно вложить как замкнутый подмодуль в конечную прямую сумму модулей вида $\mathbb{k}$, которую мы обозначим через W . Пусть $W_1 \cong \mathbb{k}^n \oplus I_1 \oplus \dots \oplus I_m$, где I_j – идеалы кольца θ , $j = 1, \dots, m$. Пусть $W'_1 = \mathbb{k}^n \oplus \theta^m$ и $I = I_1 \oplus \dots \oplus I_m$, а $f' = f|_I$. Так как I – дискретный θ -модуль, а $\mathbb{k}$ – делимый и, следовательно, инъективный в категории дискретных θ -модулей модуль, то существует алгебраический гомоморфизм $f'': \theta^m \rightarrow \mathbb{k}$, продолжающий f' , но в силу дискретности модуля θ^m го-

гоморфизм f'' является непрерывным. Пусть теперь $x \in W'_1$ и $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \tilde{\mathbb{k}}$, $x_2 \in \mathcal{O}^m$. Положим $\tilde{f}(x) = f(x_1) + f''(x_2)$. Ясно, что $\tilde{f} \in \text{Hom}(W'_1, \tilde{\mathbb{k}})$ и $\tilde{f}|_{W_1} = f$, а также, что W'_1 – замкнутый подмодуль W . Пусть теперь $x_1, \dots, x_n$ – базис $\mathbb{k}^n$ (как векторного пространства), $y_1, \dots, y_m$ – базис $\mathcal{O}^m$ (как свободного модуля). Система элементов $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ линейно независима в W и может быть продолжена до базиса W : $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_t$. Если теперь $x \in W$ и

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^m b_i y_i + \sum_{i=1}^t c_i z_i,$$

то полагаем

$$g'(x) = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{f}(x_i) + \sum_{i=1}^m b_i \tilde{f}(y_i).$$

Ясно, что $g'|_{W_1} = f$ и $g' \in \text{Hom}(W, \tilde{\mathbb{k}})$. Полагая $g = g'|_{W_2}$, получим нужный нам гомоморфизм.

ТЕОРЕМА 3. *Модуль P проективен в категории локально компактных $\mathcal{O}$ -модулей тогда и только тогда, когда он изоморфен модулю вида $B \oplus P_1$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, а P_1 – дискретный модуль, проективный в категории дискретных $\mathcal{O}$ -модулей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение сразу следует из теорем 1 и 2 и изоморфизма $\tilde{\mathbb{k}} \cong \mathbb{k}$, где $\tilde{\mathbb{k}}$ – бесконечное пополнение $\mathbb{k}$ (по поводу последнего изоморфизма см., например, [2]).

В оставшейся части статьи опишем объекты категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$, обладающие инъективными и проективными резольвентами. Будем считать, что непрерывные гомоморфизмы, фигурирующие в резольвентах, являются строгими в смысле [7], т.е. $f: A \rightarrow B$ является строгим в точности тогда, когда f открыто отображает A на $f(A)$. Это требование становится естественным, если иметь в виду, что с помощью резольвент можно будет определять производные функторы и строгость морфизмов будет необходимой с тем, чтобы остаться в категории отделимых модулей.

ТЕОРЕМА 4. *Модуль M категории $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}$ обладает инъективной резольвентой тогда и только тогда, когда M является компактно порожденным (это эквивалентно тому, что M изоморфен модулю вида $B \oplus K \oplus D$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, K – компактный модуль, а D является прямой суммой конечного числа идеалов кольца $\mathcal{O}$). Модуль M обладает проективной резольвентой тогда и только тогда, когда $M^{\wedge}$ является компактно порожденным (это эквивалентно тому, что модуль M изоморфен модулю вида $B \oplus H \oplus T$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений поля $\mathbb{k}$, H – дискретный модуль, а T – модуль характеров конечной прямой суммы идеалов кольца $\mathcal{O}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть локально компактный модуль M обладает инъективной резольвентой $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots$. Тогда $\varepsilon(M) \cong M$ – локально компактный и, следовательно, замкнутый подмодуль модуля J_0 , так как J_0 – инъективный, то J_0 является компактно порожденным (теорема 2 и предложение 1 из [4]). Следовательно, и M компактно порожден.

Обратно, пусть M – компактно порожденный модуль. Представим его в виде $M \cong B \oplus K \oplus D$, где B – прямая сумма конечного числа бесконечных пополнений $\mathbb{k}$, K – компактный модуль, а D является прямой суммой конечного числа идеалов кольца θ . Представим дискретный модуль $K^\wedge$ в виде фактор-модуля свободного модуля F , тогда в силу дедекиндовости кольца θ ядро естественного гомоморфизма $\varphi: F \rightarrow K^\wedge$ является проективным в категории дискретных θ -модулей. Поэтому имеется короткая точная последовательность дискретных θ -модулей $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F \rightarrow K^\wedge \rightarrow 0$. Применяя к ней функтор двойственности, получим короткую точную последовательность компактных модулей

$$0 \rightarrow K \rightarrow F^\wedge \rightarrow F_1^\wedge \rightarrow 0. \quad (1)$$

Заметим, что в (1) $F^\wedge$ и $F_1^\wedge$ – обобщенные торы. Далее, имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow 0 \rightarrow 0. \quad (2)$$

Пусть теперь $\mathbb{k}_\infty = \mathbb{Q}_\infty \otimes \mathbb{k}$, здесь через $\mathbb{Q}_\infty$ обозначено естественное бесконечное относительно $\mathbb{Z}$ пополнение $\mathbb{Q}$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел или кольцо полиномов $\mathbb{F}[t]$, а $\mathbb{Q}$ – поле частных $\mathbb{Z}$. Если I – идеал кольца θ , то имеется короткая точная последовательность $0 \rightarrow I \rightarrow \mathbb{k}_\infty \rightarrow \mathbb{k}_\infty/I \rightarrow 0$, причем легко видеть, что $\mathbb{k}_\infty/I \cong I^\wedge$, т.е. $\mathbb{k}_\infty/I$ является инъективным объектом в категории $\mathcal{L}_\theta$. Таким образом, если $D \cong I_1 \oplus \dots \oplus I_m$, то существует короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow D \rightarrow \mathbb{k}_\infty^m \rightarrow \mathbb{k}_\infty/I_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k}_\infty/I_m \rightarrow 0. \quad (3)$$

Из последовательностей (1)–(3) очевидным образом строится инъективная резольвента модуля M .

Утверждения относительно проективных резольвент следуют из теории двойственности.

Заметим, что в доказательстве теоремы 4 фактически содержится больше, а именно, построенные резольвенты оказываются короткими. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ. *Если объект категории $\mathcal{L}_\theta$ обладает инъективной (проективной) резольвентой, то он обладает короткой инъективной (проективной) резольвентой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крючков Н. И. Свойства функтора Ext в категории локально компактных модулей // III международная конференция по алгебре памяти М. И. Каргаполова. Тезисы докл. Красноярск, 1993. С. 188–189.
- [2] Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
- [3] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
- [4] Levin M. D. Locally compact modules // J. Algebra. 1973. V. 24. P. 25–55.
- [5] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [6] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
- [7] Бурбаки Н. Элементы математики. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.