Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Угланов, Четыре контрпримера к теореме Фубини,
Матем. заметки, 1997, том 62, выпуск 1, 124–127

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:51:07

УДК 517

ЧЕТЫРЕ КОНТРИПРИМЕРА К ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ

А. В. Угланов

Работа относится к теории законоопределенных мер. Главные результаты: теорема Фубини в общем виде не верна; жордановы составляющие переходной меры не обязаны быть переходными мерами; операция взятия жордановых составляющих не обязана коммутировать с операцией умножения на начальную меру; произведение σ -ограниченных мер может не быть σ -ограниченной мерой.

Библиография: 2 названия.

В работе [1] в весьма общей форме была доказана теорема Фубини; грубо говоря, теорема устанавливает равенство

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \nu \times \mu(dx, dy) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) \nu(x, dy) \right] \mu(dx). \quad (1)$$

Здесь X, Y – измеримые пространства, f – вектор-функция на $X \times Y$, ν – переходная мера из X в Y , μ – вектор-мера на X . (Одна из мер ν, μ должна быть скалярной. В настоящей работе вектор-меры и функции затрагиваться не будут, поэтому точных определений и формулировок мы не приводим. Необходимые же скалярные понятия будут даны.) Но если в скалярном знакопостоянном случае (ν, μ – скалярные неотрицательные меры, f – скалярная функция) теорема Фубини доказывается просто, причем в исчерпывающей общности (X, Y – произвольные измеримые пространства, ν, μ – произвольные меры), то в векторном случае доказательство достаточно сложно и, главное, пришлось делать специальные предположения относительно X, Y, ν, μ . В [1] отмечалось, что вопрос о справедливости теоремы Фубини в общем случае остается открытым. Приводимый ниже пример 1 дает отрицательный ответ на этот вопрос: уже в скалярном, но знакопеременном случае теорема Фубини в общем виде неверна. Примеры 2, 3, фактически также опровергающие этот вид теоремы Фубини, носят более общий характер; они дают отрицательный ответ на интересные и давно стоявшие вопросы: должны ли жордановы составляющие переходной меры быть переходными мерами? Если составляющие все же являются переходными мерами, то должна ли операция взятия составляющих коммутировать с операцией произведения переходной меры на начальную? Несколько особняком стоит пример 4: хотя он и не опровергает теорему Фубини, но показывает, что пользоваться ей нужно с известной осторожностью: произведение σ -ограниченных мер может не быть σ -ограниченной мерой.

Уточним используемые в статье понятия. Пусть $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ – измеримые пространства, (Σ_X, Σ_Y) – σ -алгебры. Мерой (числовой) на X называется счетно-аддитивная функция $\mu: \Sigma_X \rightarrow \mathbb{R}^1$; положительной мерой на X называется счетно-аддитивная

функция $\mu: \Sigma_X \rightarrow [0, \infty]$ (т.е. μ может принимать значение $+\infty$). Переходной (положительной переходной) мерой из X в Y называется функция $\nu: X \times \Sigma_Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ (соответственно, $\nu: X \times \Sigma_Y \rightarrow [0, \infty]$), удовлетворяющая условиям:

- 1) при любом $x \in X$ функция $\nu(x, \cdot)$ есть мера (положительная мера) на X ;
- 2) при любом $A \in \Sigma_Y$ функция $\nu(\cdot, A)$ измерима.

Множество мер на X обозначим через $M(X)$, множество переходных мер из X в Y обозначим через $M(X, Y)$; такой же смысл для соответствующих положительных объектов имеют обозначения $M^+(X)$, $M^+(X, Y)$.

Для $\mu \in M(X)$ через $|\mu| \in M(X)$ будем обозначать меру, являющуюся полным изменением меры μ . Все рассматриваемые ниже интегралы – лебеговы; при этом функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется μ -интегрируемой, если она $|\mu|$ -интегрируема, интеграл $\int_X f d\mu$ определяется естественным образом как разность интегралов по положительной и отрицательной (жордановым) частям меры μ .

Для $x \in X$, $A \subset X \times Y$ положим $S_x(A) = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$. Предположим, меры $\mu \in M(X)$ и $\nu \in M(X, Y)$ таковы, что при любом $A \in \Sigma_X \times \Sigma_Y$ функция $x \mapsto \nu(x, S_x(A))$ (автоматически являющаяся Σ_X -измеримой) μ -интегрируема; тогда положим

$$\nu \times \mu: \Sigma_X \times \Sigma_Y \rightarrow \mathbb{R}^1 : A \mapsto \int_X \nu(x, S_x(A)) \mu(dx). \quad (2)$$

Известно [1], что функция $\nu \times \mu$ есть мера на $X \times Y$.

Напомним еще, что σ -алгебра называется сепарабельной, если она порождается некоторым счетным семейством множеств.

Переформулируем теперь применительно к скалярному случаю результат из [1].

ТЕОРЕМА (Фубини). Пусть Σ_Y – сепарабельная σ -алгебра, $\mu \in M(X)$, $\nu \in M(X, Y)$, произведение $\nu \times \mu$ определено и функция $f: X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ является $\nu \times \mu$ -интегрируемой. Тогда $|\mu|$ -почти при всех x функция $y \mapsto f(x, y)$ $\nu(x, \cdot)$ -интегрируема, функция

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) \nu(x, dy)$$

μ -интегрируема и справедливо равенство (1).

При доказательстве теоремы существенно использовались установленные в [1] (в предположениях теоремы) соотношения

$$|\nu| \in M(X, Y), \quad (3)$$

$$|\nu \times \mu| = |\nu| \times |\mu|. \quad (4)$$

Среди условий теоремы (и подавно соотношений (3), (4)) лишним может быть только одно – условие сепарабельности Σ_Y ; мы покажем, что опустить это условие нельзя. Далее везде (кроме замечания после примера 3): $X = [0, 1]$; Σ_X – борелевская (или лебеговская, безразлично) σ -алгебра; μ – мера Лебега; $Y = X^{[0, 1]}$ – множество всех функций из $[0, 1]$ в $[0, 1]$; $\Sigma_Y = \Sigma_X^{[0, 1]}$ – σ -алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами Y ; $\rho = \mu^{[0, 1]}$ – мера в Y , являющаяся прямым произведением мер μ (так что $(Y, \Sigma_Y, \rho) = (X, \Sigma_X, \mu)^{[0, 1]}$; подробнее о несчетных произведениях вероятностных пространств см., например, [2]); $L_2 = L_2(Y, \Sigma_Y, \rho)$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых относительно ρ действительных функций на Y ; $e_x \in L_2$: $e_x(y) = \sqrt{2} \cos \pi y(x)$ ($x \in X$). Основой приводимых ниже примеров 1–3 является следующее предложение.

ЛЕММА. Для функции

$$\nu: X \times \Sigma_Y \rightarrow [-1, 1]: \nu(x, A) = (e_x, 1_A) = \int_A e_x(y) \rho(dy) \quad (5)$$

справедливы включения $\nu \in M(X, Y)$, $|\nu| \in M(X, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{e_x : x \in X\}$ есть ортонормированная в L_2 система, то (неравенство Бесселя) для любого $A \in \Sigma_Y$ существует лишь счетное множество точек $x \in X$ таких, что $(e_x, 1_A) \neq 0$. Отсюда сразу следует включение $\nu \in M(X, Y)$ и равенство

$$\nu \times \mu = 0. \quad (6)$$

Пусть $A \in \Sigma_Y$. Тогда [2, III.3] существует множество $X_0 = X_0(A)$ такое, что: 1) множество $X \setminus X_0$ счетно; 2) для любых $y, z \in Y$ справедлива импликация

$$(y \in A) \wedge (y(x) = z(x) \forall x \in X \setminus X_0) \implies z \in A. \quad (7)$$

Для точек $x_1, x_2 \in X_0$ рассмотрим отображение $T: Y \rightarrow Y: Ty(x) = y(x)$, если $x \neq x_1$, $x \neq x_2$; $Ty(x_1) = y(x_2)$; $Ty(x_2) = y(x_1)$. Ясно, что отображение T измеримо. Представляя (Y, Σ_Y, ρ) в виде $(X, \Sigma_X, \mu)^2 X^{[0,1] \setminus \{x_1\} \cup \{x_2\}}$ и пользуясь инвариантностью меры μ^2 при ортогональных преобразованиях квадрата (точнее: при отражениях относительно биссектрисы), получаем, что отображение T сохраняет меру ρ : $\rho(T^{-1}B) = \rho(B) \forall B \in \Sigma_Y$, так что для индуцированной отображением T меры $T\rho$ справедливо равенство $T\rho = \rho$. Отсюда, из формулы замены переменных в интеграле, импликации (7) и включения $x_1, x_2 \in X_0$ получаем

$$\begin{aligned} |\nu|(x_1, A) &= \int_A |e_{x_1}(y)| \rho(dy) = \int_A |e_{x_1}(y)| T\rho(dy) \\ &= \int_{T^{-1}A} |e_{x_1}(Ty)| \rho(dy) = \int_A |e_{x_2}(y)| \rho dy = |\nu|(x_2 A). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $x \mapsto |\nu|(x, A)$ постоянна на множестве X_0 и, следовательно, измерима. Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Возьмем переходную меру ν , определенную равенством (5). Для любого $x \in X$ имеем

$$|\nu|(x, Y) = \int_Y |e_x(y)| \rho(dy) = \sqrt{2} \int_0^1 |\cos \pi t| \mu(dt) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}. \quad (8)$$

Если теперь $g: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ есть функция, равная ∞ на множестве положительной μ -меры, то полагая $f: X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]: f(x, y) = g(x)$, из (6) получаем $\nu \times \mu$ -интегрируемость f . Но в силу (8) заключение о $\nu(x, \cdot)$ -интегрируемости функции $y \mapsto f(x, y)$ μ -почти при всех x неверно, т.е. нарушается первое утверждение теоремы Фубини.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вышеприведенная формулировка теоремы Фубини может быть изменена так, что требование $\nu \times \mu$ -интегрируемости f ослаблено требованием ее $\overline{\nu \times \mu}$ -интегрируемости (пространство $(X \times Y, \overline{\Sigma_X \times \Sigma_Y}, \overline{\nu \times \mu})$ есть пополнение пространства $(X \times Y, \Sigma_X \times \Sigma_Y, \nu \times \mu)$ по мере $|\nu \times \mu|$, см. [1, § 5, п. 4]). К такой измененной теореме возможно построение более содержательных контрпримеров. Именно, беря ν ту же, что и выше, и полагая последовательно $f(x, y) = 1/y(x)$, $f(x, y) = (1/x) \cos \pi y(x)$, $f(x, y) = \cos \pi y(x)$ получим соответственно нарушение первого, второго и третьего утверждений теоремы.

ПРИМЕР 2. Пусть $B \subset X$ есть какое-то неизмеримое множество. Положим $\nu: X \times \Sigma_Y \rightarrow [-1, 1]: \nu(x, A) = 1_B(e_x, 1_A)$; так же, как и при доказательстве леммы получаем $\nu \in M(X, Y)$. С другой стороны (см. равенство (8)), $\{x \in X : |\nu|(x, Y) > 0\} = B$, так что функция $x \mapsto |\nu|(x, Y)$ неизмерима, т.е. не выполняется (3).

ПРИМЕР 3. Опять возьмем ν , определенную равенство (5); в силу второго утверждения леммы мера $|\nu| \times \mu$ корректно определена. Теперь (8) дает равенство $|\nu| \times \mu(X \times Y) = 2\sqrt{2}/\pi$, а (6) – равенство $|\nu \times \mu| = 0$. Таким образом, не выполняется (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть (X, Σ_X) , (Y, Σ_Y) – измеримые пространства, $\nu \in M(X, Y)$, $x \in X$, $A^+(x)$ – положительная часть разложения Хана для меры $\nu(x, \cdot) \in M(Y)$. Множество $A^+(x)$ определено с точностью до $|\nu|(x, \cdot)$ -меры нуль. Пример 3 показывает, что, вообще говоря, нельзя для каждого $x \in X$ выбрать $A^+(x)$ так, чтобы выполнялось включение $\bigcup_x \{x, A^+(x)\} \in \Sigma_X \times \Sigma_Y$.

Перед следующим примером заметим, что если $\mu \in M^+(X)$, $\nu \in M^+(X, Y)$, то произведение $\nu \times \mu$ всегда корректно определено равенством (2) (интеграл “разрешено” принимать значение $+\infty$); при этом $\nu \times \mu \in M^+(X \times Y)$. Напомним еще, что мера $\rho \in M^+(Z)$ (Z – измеримое пространство) называется σ -ограниченной, если существует последовательность измеримых множеств $Z_n \subset Z$ такая, что $Z = \bigcup Z_n$ и для всех n $\rho(Z_n) < \infty$. Есть соответствующее определение и для векторных мер. В [1] (для векторного случая) требовалась σ -ограниченность мер $\nu(x, \cdot)$ ($\forall x \in X$), $\nu \times \mu$. Естественен вопрос: вытекает ли σ -ограниченность $\nu \times \mu$ из σ -ограниченности $\nu(x, \cdot)$, μ ?

ПРИМЕР 4. Для $y \in Y$ обозначим через $\delta_y \in M^+(Y)$ меру (Дирака) единичной массы, сосредоточенную в точке y . Для $x \in X$ через $1_x \in Y$ обозначим индикаторную функцию одноточечного множества $\{x\}$. Пусть $\{r_n\}$ есть множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$. Положим $\nu: X \times \Sigma_Y \rightarrow [0, \infty]: \nu(x, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{r_n 1_x}(A)$. Пусть $A \in \Sigma_Y$, $X_0 = X_0(A)$ – то же, что и в доказательстве леммы. Если $0 \in A$, то для всех $x \in X_0$, $n = 1, 2, \dots$, выполняется включение $r_n 1_x \in A$, откуда $\nu(x, A) = \infty$. Если $0 \notin A$, то, аналогично, $\nu(x, A) = 0$ для всех $x \in X_0$. Таким образом, в обоих случаях функция $x \mapsto \nu(x, A)$ измерима, т.е. $\nu \in M^+(X, Y)$. Полагая для $x \in X$ $Y_n = \{y \in Y : y(x) = r_n\}$, $Y_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ видим, что $\nu(x, Y_0) = 0$, $\nu(x, Y_n) = 1$, так что мера $\nu(x, \cdot)$ σ -ограничена.

Пусть $B \in \Sigma_X \times \Sigma_Y$. Снова пользуясь результатом [2, III.3] (теперь применительно к пространству $(X \times X^{[0,1]}, \Sigma_X \times \Sigma_X^{[0,1]})$), возьмем множество $X_0 \subset [0, 1]$ со счетным дополнением такое, что сечение $S_x(B)$ не зависит от x при $x \in X_0$. Обозначая это общее сечение через $A \in \Sigma_Y$, получим равенство $\nu \times \mu(B) = \nu \times \mu(X \times A) = \int_0^1 \nu(x, A) \mu(dx)$. Но выше было найдено, что либо $\nu(x, A) = \infty$ μ -почти при всех x , либо $\nu(x, A) = 0$ μ -почти при всех x . Таким образом, либо $\nu \times \mu(B) = \infty$, либо $\nu \times \mu(B) = 0$, так что мера $\nu \times \mu$ не является σ -ограниченной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Угланов А. В. Теорема Фубини для векторных мер // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 3. С. 423–432.
- [2] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.