Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шкарин, Теорема Пеано неверна в бесконечномерных F' -пространствах, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 1, 128–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:58:05

УДК 517

ТЕОРЕМА ПЕАНО НЕВЕРНА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ F' -ПРОСТРАНСТВАХ

С. А. Шкарин

Пусть E – ненормируемое пространство Фреше. Построено непрерывное отображение $f: E' \rightarrow E'$ (здесь E' – пространство линейных непрерывных функционалов на E с сильной топологией) такое, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ не имеет ни одного решения ни на одном интервале.

Библиография: 21 название.

1. Исторические замечания и обозначения. Будем говорить, что в локально выпуклом пространстве (ЛВП) E (все пространства ниже предполагаются вещественными и хаусдорфовыми) выполняется теорема Пеано ($E \in \mathbb{P}$), если для всякого непрерывного отображения $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ и всех $x_0 \in E$, $t_0 \in \mathbb{R}$ задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

имеет решение в некоторой окрестности точки t_0 . Будем говорить, что теорема Пеано выполняется в E в ослабленной формулировке ($E \in \mathbb{WP}$), если для всякого непрерывного отображения $f: E \rightarrow E$ дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет хотя бы одно решение хотя бы на одном интервале.

Справедливость теоремы Пеано для конечномерного E (см. [1]) является классическим результатом. В 1950 г. Д. Дьедонне [2] построил пример, показывающий, что в банаховом пространстве (БП) c_0 сходящихся к 0 последовательностей теорема Пеано неверна. В 1969 г. О. Г. Смоляновым была поставлена проблема описания класса тех ЛВП, в которых справедлива теорема Пеано. В 1970 г. Д. Йорком [3] и в 1972 г. А. Н. Годуновым [4] было независимо показано, что теорема Пеано неверна в пространстве ℓ_2 . В 1974 г. Годунов [5] доказал, что теорема Пеано в ℓ_2 неверна даже в ослабленной формулировке. Несправедливость теоремы Пеано в произвольном нерелексивном БП была показана А. Челлиной в 1972 г. в [6]. Вопрос о справедливости теоремы Пеано в БП был окончательно решен Годуновым в 1975 г. в работе [7], где он показал, что теорема Пеано в БП E верна в точности тогда, когда E конечномерно. В 1982 г. К. Астала [8] доказал, что теорема Пеано неверна во всяком секвенциально полном ЛВП, которое не является полурелексивным, и верна во всяком секвенциально полном ЛВП с компактной бочкой (из этих двух фактов вытекает, что в БП E со слабой топологией теорема Пеано выполняется в точности тогда, когда E релексивно). В 1993 г. автор [9] показал, что теорема Пеано неверна даже в ослабленной формулировке в произвольном ненормируемом пространстве Фреше. *Пространством Фреше* называется полное метризуемое ЛВП. (В

работе С.Г. Лобанова [10], 1993 г., независимо другим способом получен несколько более слабый результат: теорема Пеано неверна в ненормируемом пространстве Фреше.) Заметим также, что обыкновенным дифференциальным уравнениям в ЛВП посвящена обзорная статья [11].

В настоящей статье доказывается следующий результат, анонсированный автором в [12].

ТЕОРЕМА. Пусть E – пространство Фреше (ПФ) или сильное сопряженное к ПФ (т.е. пространство линейных непрерывных функционалов на пространстве Фреше с сильной топологией). Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) в E справедлива теорема Пеано;
- 2) пространство E конечномерно.

Всюду ниже символом E' обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на ЛВП E , а символом $L(E)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из E в E . Символами $\mathbb{R}^\omega$ и $\mathbb{R}_\omega$ будем обозначать соответственно топологическое произведение и локально выпуклую прямую сумму счетного числа вещественных прямых ($\omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел). F' -пространством называется пространство, сопряженное к пространству Фреше E , наделенное сильной топологией $\beta(E', E)$, т.е. топологией равномерной сходимости по системе всех ограниченных множеств в E (см. [14]). Если E – линейное пространство, а G – какое-нибудь линейное пространство линейных функционалов на E , разделяющее точки E , то символом $\sigma(E, G)$ будем обозначать слабую топологию на E , согласующуюся с двойственностью (E, G) (т.е. слабейшую топологию, относительно которой все функционалы из G непрерывны).

2. Теорема Пеано в подпространстве и факторпространстве. Будем говорить, что линейное подпространство F ЛВП E *квазидополняемо*, если оно замкнуто и существует непрерывное отображение $\rho: E/F \rightarrow E$, являющееся правым обратным к каноническому отображению $\pi: E \rightarrow E/F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теореме Э. Майкла о селекции (см. [13], подробное доказательство см. в [18]) всякое замкнутое линейное подпространство пространства Фреше квазидополняемо.

ЛЕММА 2.1. Пусть E – ЛВП, F – замкнутое линейное подпространство E . Тогда если F дополняемо, то F квазидополняемо, и если F квазидополняемо, то F является ретрактом E , т.е. существует непрерывное отображение $\sigma: E \rightarrow F$ такое, что $\sigma(x) = x$ при всех $x \in F$ (отображение σ называется ретракцией).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если F дополняемо, то искомое отображение ρ можно выбрать даже линейным (см. [14]). Если F квазидополняемо, ρ, π – отображения из определения квазидополняемости, то формула $\sigma(x) = x - \rho(\pi(x)) + \rho(0)$ задает искомую ретракцию.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть E – ЛВП, $E \in \mathbb{WP}$. Тогда $E/F, F$ принадлежат $\mathbb{WP}$ для всякого квазидополняемого подпространства $F \subseteq E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: E/F \rightarrow E$, $\pi: E \rightarrow E/F$ – те отображения, о которых говорится в определении квазидополняемости. Предположим, что E/F не принадлежит $\mathbb{WP}$. Тогда существует непрерывное отображение $f: E/F \rightarrow E/F$ такое, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ не имеет ни одного решения ни на одном интервале. Непрерывное отображение $g: E \rightarrow E$ определим формулой $g = \rho \circ f \circ \pi$. Поскольку $E \in \mathbb{WP}$, то найдется решение $x: I \rightarrow E$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x)$ на интервале I . Тогда

$$\dot{\pi}(x) = \pi(\dot{x}) = \pi \circ \rho \circ f \circ \pi(x) = f(\pi(x)).$$

Поэтому $y = \pi(x)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{y} = f(y)$ на I . Противоречие.

Предположим теперь, что F не принадлежит $\mathbb{WP}$. Тогда существует такое непрерывное отображение $f: F \rightarrow F$, что дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ не имеет ни одного решения ни на одном интервале. Непрерывное отображение $g: E \rightarrow E$ определим формулой $g(x) = f(x - \rho \circ \pi(x))$ (такое определение корректно, ибо $x - \rho \circ \pi(x) \in F$ для всякого $x \in E$). Поскольку $E \in \mathbb{WP}$, то найдется решение $x: I \rightarrow E$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x)$. Зафиксируем $t_0 \in I$. Тогда

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t g(x(\tau)) d\tau \quad \text{для любого } t \in I.$$

Так как $g(y) \in F$ для всякого $y \in E$, то $x(t) - x(t_0) \in F$ и, следовательно, $\pi(x(t)) = \pi(x(t_0))$. Значит,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau) - \rho \circ \pi(x(t_0))) d\tau.$$

Стало быть, $\dot{x}(t) = f(x(t) - \rho \circ \pi(x(t_0)))$. Полагая $y(t) = x(t) - \rho \circ \pi(x(t_0))$, получаем, что y – решение дифференциального уравнения $\dot{y} = f(y)$. Противоречие.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть в ЛВП E справедлива теорема Пеано. Тогда

- 1) если F квазидополняемое подпространство E , то $E/F \in \mathbb{P}$;
- 2) если F является ретрактом E , то $F \in \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) доказывается аналогично первой части теоремы 2.1. Докажем утверждение 2). Предположим, что F – ретракт E и F не принадлежит $\mathbb{P}$. Тогда существует непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \times F \rightarrow F$ такое, что задача Коши (1) не имеет решения ни на одном интервале, содержащем 0. Пусть $\sigma: E \rightarrow F$ – ретракция. Отображение $g: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ определим формулой $g(t, x) = f(t, \sigma(x))$. Поскольку $E \in \mathbb{P}$, то задача Коши $\dot{x} = g(t, x)$, $x(0) = 0$ имеет решение $x(t)$ на некотором интервале I , содержащем 0. Поскольку $g(t, x) \in F$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times E$, то

$$x(t) = \int_0^t g(\tau, x(\tau)) d\tau \in F$$

для любого $t \in I$. Следовательно, $\sigma(x(t)) = x(t)$ и $g(t, x(t)) = f(t, x(t))$. Стало быть, x – решение задачи Коши (1). Противоречие.

3. Теорема Пеано в F' -пространствах.

ЛЕММА 3.1. *Теорема Пеано в $\mathbb{R}_\omega$ неверна даже в ослабленной формулировке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f: \mathbb{R}_\omega \rightarrow \mathbb{R}_\omega$ определим формулой $f(x)_n = x_{n-1}$ при $n \geq 2$, $f(x)_1 = 1$. В силу непрерывности f достаточно показать, что обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$ не имеет ни одного решения ни на одном интервале. Пусть $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ и $x: I \rightarrow \mathbb{R}_\omega$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$. Тогда $\dot{x}_n = x_{n-1}$ при $n \geq 2$, $\dot{x}_1 = 1$. Индуктивно можно показать, что

$$x_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{c_j t^j}{j!},$$

где c_j – вещественные постоянные. Положим

$$A_n = \{t \in I : x_n(t) = 0\}, \quad A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n.$$

Поскольку x_n – полином степени $n-1$, то количество элементов A_n не превосходит $n-1$, следовательно, A не более, чем счетно. Стало быть, существует $s \in I \setminus A$. Из определения A получаем, что $x_n(s) \neq 0$ для всякого $n \geq 2$. Откуда $x(s) \notin \mathbb{R}_\omega$. Противоречие.

Заметим, что в работе [9] доказано, что теорема Пеано неверна в ослабленной формулировке и в пространстве $\mathbb{R}^\omega$. Из леммы 3.1 и последнего утверждения вытекает следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть E – ЛВП и существует линейное подпространство $F \subseteq E$ такое, что либо F изоморфно $\mathbb{R}^\omega$, либо E/F изоморфно $\mathbb{R}_\omega$. Тогда для E теорема Пеано неверна даже в ослабленной формулировке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий, наложенных на подпространство F , вытекает, что F дополняемо [15]. Осталось применить лемму 2.1 и теорему 2.1.

Абсолютно выпуклым называется выпуклое симметричное относительно нуля множество.

ЛЕММА 3.2. *Пусть B – ограниченное абсолютно выпуклое подмножество ЛВП E , $\delta \in (0, 1)$, K – компактное подмножество $(1-\delta)B$, $U \subseteq B$ открыто в B в индуцированной из E топологии и содержит K . Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K + \varepsilon B \subseteq U$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что такого ε не существует. Тогда найдутся точки $x_n \in K$, $y_n \in B$ такие, что $x_n + (y_n/n) \notin U$ при всех $n \geq 1$. В силу компактности K последовательность x_n имеет предельную точку $x \in K$, а в силу ограниченности B $y_n/n \rightarrow 0$. Следовательно, $x \in K \subseteq U$ является предельной точкой последовательности $x_n + (y_n/n)$, элементы которой содержатся в B при достаточно больших n . Это противоречит открытости U .

ЛЕММА 3.3. Пусть E – ПФ, F – топологическое пространство, E' – сильное сопряженное к E , $f: E' \rightarrow F$ – такое отображение, что сужение f на U° непрерывно при наделении U° слабой топологией $\sigma(E, E')$ для всякой окрестности нуля U в E (здесь символом A° обозначается полярное множество A , см. [14]). Тогда отображение f непрерывно.

Лемма 3.3 фактически означает, что топология индуктивного предела на

$$E' = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n^\circ,$$

где $\{U_n : n \in \omega\}$ – база окрестностей нуля в E' , а U_n° наделены топологией $\sigma(E, E')$ слабее, быть может нестрогие, чем сильная топология.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Пусть $\{U_n : n \in \omega\}$ – база окрестностей нуля в E , состоящая из замкнутых абсолютно выпуклых множеств такая, что $2U_{n+1} \subseteq U_n$ для всякого $n \in \omega$. Очевидно, достаточно доказать непрерывность f в нуле. Обозначим $a = f(0)$. Пусть W – открытая окрестность a в F . Индуктивно построим последовательность $\varepsilon_n \in (0, 2^{-n})$ такую, что $(\varepsilon_0 U_0^\circ + \dots + \varepsilon_{n-1} U_{n-1}^\circ + 2\varepsilon_n U_n^\circ) \subseteq f^{-1}(W)$ для всякого $n \in \omega$. В силу непрерывности f на U_0° в слабой топологии и слабой компактности U_0° (см. [14, теорема Алаоглу]) найдется $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что $2\varepsilon_0 U_0^\circ \subseteq f^{-1}(W)$. Предположим, что $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$, удовлетворяющие требуемым условиям, выбраны. По условию $G = f^{-1}(W) \cap U_n^\circ$ открыто в U_n° в слабой топологии, а в силу теоремы Алаоглу и непрерывности операции сложения в E' подмножество $\varepsilon_0 U_0^\circ + \dots + 2\varepsilon_{n-1} U_{n-1}^\circ \subseteq G \cap \frac{2}{3} U_n^\circ$ компактно. В силу леммы 3.2 существует $\varepsilon_n \in (0, 2^{-n})$ такое, что $(\varepsilon_0 U_0^\circ + \dots + \varepsilon_{n-1} U_{n-1}^\circ + 2\varepsilon_n U_n^\circ) \subseteq G$. Множество

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_0 U_0^\circ + \dots + \varepsilon_{n-1} U_{n-1}^\circ + \varepsilon_n U_n^\circ) \subseteq f^{-1}(W),$$

очевидно, абсолютно выпукло и пересекается с каждым U_n° по окрестности нуля в U_n° . В силу результата п. 6.7 гл. 4 книги [15] (описание базы окрестностей нуля в F' -пространстве) V является окрестностью нуля в E . Непрерывность f в нуле доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть E' – F' -пространство (E – соответствующее пространство Фреше), $L \subseteq E'$ – линейное подпространство E' , изоморфное $\mathbb{R}_\omega$. Тогда L квазидополняемо в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_n : n \in \omega\}$ – база окрестностей нуля в E такая, что $U_{n+1} \subseteq U_n$ для всякого $n \in \omega$. Очевидно,

$$E' = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n^\circ, \quad U_{n+1}^\circ \supseteq U_n^\circ$$

для всех $n \in \omega$. Индуктивно построим последовательность отображений $g_n: U_n^\circ \rightarrow L$, обладающих следующими свойствами:

- 1) g_n непрерывно как отображение из $(U_n^\circ, \sigma(E', E))$ в $(L, \beta(E', E))$;
- 2) $g_n(x) - g_n(y) = x - y$ при всех $x, y \in U_n^\circ$ таких, что $x - y \in L$;
- 3) $g_{n+1}|_{U_n^\circ} = g_n$.

Заметим сперва, что U_n° компактно в E' в топологии $\sigma(E', E)$, и, следовательно, множество $U_n^\circ \cap L$ ограничено в $L \subset E'$. Поскольку L изоморфно $\mathbb{R}_\omega$, то $M_n = \text{lin}(U_n^\circ \cap L)$ – конечномерное линейное подпространство L , причем

$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n, \quad M_n \subseteq M_{n+1} \quad \text{при всех } n \in \omega.$$

Символом $\text{lin}(A)$ обозначается линейная оболочка множества A . Так как всякое конечномерное линейное подпространство в произвольном ЛВП (см. [14]) дополняемо, существует $\pi_n \in L(E')$ – линейный непрерывный в топологии $\sigma(E', E)$ проектор на M_n . Отображение $g_0: U_0^\circ \rightarrow M_0 \subset L$ определим формулой $g_0 = \pi_0|_{U_0^\circ}$. Условие 1) для g_0 выполняется, так как π_0 – непрерывный линейный проектор в пространстве $(E', \sigma(E', E))$ с конечномерным образом. Пусть теперь $x, y \in U_0^\circ$, $x - y \in L$. Тогда $x - y \in M_0$ в силу определения M_0 . Стало быть, $g_0(x) - g_0(y) = \pi_0(x) - \pi_0(y) = \pi_0(x - y) = x - y$. Основание индукции построено. Пусть $n \geq 1$ и $g_j: U_j^\circ \rightarrow L$ при $j < n$, удовлетворяющие условиям 1)–3), уже построены. Обозначим $B = (I - \pi_n)(U_n^\circ)$, $A = (I - \pi_n)(U_{n-1}^\circ)$ ($I: E' \rightarrow E'$ – тождественный оператор). Рассмотрим отображение $\varphi: A \rightarrow M_n$, определяемое формулой $\varphi(x) = g_{n-1}(y) + x - y$, где $y \in U_{n-1}^\circ \cap (x + M_n)$ (значение $\varphi(x)$ не зависит от выбора такого y в силу условия 2) для g_{n-1}). Множества A и B компактны в топологии $\sigma(E', E)$ как непрерывные образы компактов U_{n-1}° и U_n° , и, следовательно, топологическое пространство $B_\sigma = (B, \sigma(E', E))$ нормально (см. [16]) и A – замкнутое подмножество B_σ . Тогда в силу конечномерности линейного пространства M_n по теореме Титце–Урысона (см. [16]) существует непрерывное отображение $\psi: B \rightarrow M_n$ такое, что $\psi|_A = \varphi$. Теперь для $x \in U_n^\circ$ положим $g_n(x) = \psi((I - \pi_n)(x)) + \pi_n(x)$. Очевидно, g_n – непрерывное отображение из $(U_n^\circ, \sigma(E', E))$ в конечномерное линейное подпространство $M_n \subset L$, следовательно, условие 1) для g_n выполняется. Пусть $x, y \in U_n^\circ$, $x - y \in L$. Тогда $x - y \in M_n$ по определению M_n , поэтому $(I - \pi_n)(x) = (I - \pi_n)(y)$, $\pi_n(x - y) = x - y$. Стало быть,

$$g_n(x) - g_n(y) = \psi((I - \pi_n)(x)) - \psi((I - \pi_n)(y)) + \pi_n(x - y) = x - y.$$

Осталось проверить условие 3). Пусть $x \in U_{n-1}^\circ$, $y \in U_{n-1}^\circ \cap x + M_n$. Тогда

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \psi((I - \pi_n)(x)) + \pi_n(x) = \varphi((I - \pi_n)(x)) + \pi_n(x) \\ &= g_{n-1}(y) + (I - \pi_n)(x) - y + \pi_n(x) = g_{n-1}(y) - y + x = g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

по условию 2) для g_{n-1} .

Теперь рассмотрим отображение $g: E' \rightarrow L$ такое, что $g|_{U_n^\circ} = g_n$ при всех $n \in \omega$. По лемме 3.3 и свойству 1) отображение g непрерывно как отображение из $(E', \beta(E', E))$ в $(L, \beta(E', E))$. Из условий 2), 3) вытекает, что

$$\begin{aligned} g(x) &= x \quad \text{при } x \in L, \\ g(x) - g(y) &= x - y \quad \text{при всех } x, y \in E \text{ таких, что } x - y \in L. \end{aligned} \tag{2}$$

Из свойств (2) немедленно вытекает, что (непрерывное) отображение $\rho: E' \rightarrow E'$, $\rho(x) = x - g(x)$, обладает следующими свойствами:

$$\forall x \in E' \quad \rho(x) \in x + L, \tag{3}$$

$$\forall x \in E', \quad y \in L \quad \rho(x + y) = \rho(x). \tag{4}$$

Свойство (4) позволяет корректно и однозначно определить (непрерывное) отображение $\tilde{\rho}: E'/L \rightarrow E'$ по формуле $\tilde{\rho}(x + L) = \rho(x)$. В силу (3) отображение $\tilde{\rho}$ является правым обратным к каноническому отображению $\pi: E' \rightarrow E'/L$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия леммы 3.4, которые выглядят странно на первый взгляд, на самом деле по существу. Это показывают примеры, приводимые в конце этого пункта. А именно, будут построены

- 1) банахово пространство, в котором не всякое замкнутое линейное подпространство является ретрактом всего пространства в слабой топологии;
- 2) F' -пространство в котором все замкнутые линейные подпространства являются ретрактами, но не все замкнутые линейные подпространства квазидополняемы;
- 3) ЛВП E и замкнутое линейное подпространство $L \subseteq E$ такое, что L изоморфно $\mathbb{R}_\omega$ и L не является ретрактом E .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно показать, что в монтелевском (см. [14]) F' -пространстве все замкнутые линейные подпространства квазидополняемы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для сильного сопряженного к ненормируемому ПФ E теорема Пеано неверна даже в ослабленной формулировке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку E – ненормируемое пространство Фреше, существует замкнутое линейное подпространство $L \subseteq E$ такое, что E/L изоморфно $\mathbb{R}^\omega$ (см. [17]). Тогда замкнутое линейное подпространство $L^\circ \subseteq E'$ изоморфно $\mathbb{R}_\omega$. Осталось применить лемму 3.4 и теорему 2.1.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть E – ПФ или F' -пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) в E справедлива теорема Пеано;
- 2) пространство E конечномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если пространство E нормируемо, то утверждение теоремы вытекает из [7]. Если E – ненормируемое ПФ, то утверждение теоремы вытекает из [9]. Если же E – ненормируемое F' -пространство, утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фактически (см. теорему 3.1 и [9]) доказано, что если E – ненормируемое пространство Фреше или сопряженное к ненормируемому пространству Фреше, то теорема Пеано в E неверна даже в ослабленной формулировке.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [20] доказано, что для всякого бесконечномерного банахова пространства E существует $f \in C(\mathbb{R} \times E, E)$ такая, что задача Коши (1) не имеет решения ни в одной окрестности нуля для всякого $x_0 \in E$. Из этой теоремы можно вывести, что если в банаховом пространстве E есть бесконечномерное замкнутое линейное подпространство F , на котором существует последовательность бесконечномерных непрерывных линейных проекторов $P_n: F \rightarrow F$ такая, что $P_n P_m = 0$ при всех $m, n, m \neq n$ (эти условия автоматически выполняются, если E имеет бесконечномерное подпространство с безусловным базисом), то теорема Пеано неверна в E даже в ослабленной формулировке.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = \ell_\infty$ – банахово пространство ограниченных последовательностей, наделенное слабой топологией; $Y \subset X$ – замкнутое линейное подпространство, состоящее из всех сходящихся к 0 последовательностей. Тогда Y не является ретрактом X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует ретракция $\pi: X \rightarrow Y$. Заметим, что отображение $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

является непрерывной метрикой на X . Функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ зададим формулой $f(x) = \rho(x, \pi(x))$. Ясно, что f непрерывна и $Y = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Тем самым, Y – множество типа G_δ в X . Но на самом деле можно проверить, что Y не является множеством типа G_δ в X (эта проверка является довольно трудным техническим упражнением).

ПРИМЕР 2. Пусть H – гильбертово пространство континуального веса, $X = H^\omega$, $\{e_c : c \in \mathbb{R}^\omega\}$ – некоторый ортонормированный базис в H , заиндексированный множеством всех вещественных последовательностей. Символом L обозначим замыкание в X линейной оболочки множества $\{(c_n e_c)_{n \in \omega} : c \in \mathbb{R}^\omega\}$. Ясно, что L – замкнутое линейное подпространство рефлексивного пространства Фреше X . Положим $E = X'$, $F = L^\circ \subset E$. Тогда в F' -пространстве E всякое замкнутое линейное подпространство является ретрактом, но F неквазидополняемо в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что пространство E является кружевным (stratifiable) (см. [19]). Тогда из основного результата работы [19] вытекает, что всякое замкнутое выпуклое подмножество E является ретрактом. Предположим теперь, что F квазидополняемо в E , т.е. существует непрерывное отображение $\rho: E/F \rightarrow F$, обратное справа к каноническому отображению $\pi: E \rightarrow E/F$. Очевидно, на E есть непрерывная норма, поэтому одноточечное подмножество E является множеством типа G_δ . Поскольку отображение $\rho: E/F \rightarrow \rho(E/F)$ является гомеоморфизмом, то одноточечное подмножество E/F тоже является множеством типа G_δ . Так как $E/F = L'$, а L – ПФ, то последнее утверждение означает, что в L есть ограниченное подмножество B с плотной линейной оболочкой. В силу ограниченности B существует последовательность $a \in (0, +\infty)^\omega$ такая, что $B \subset \{x \in X : \|x_n\| \leq a_n \text{ для всех } n \in \omega\}$. Положим $b_n = na_n$. Из определения L вытекает, что B содержится в замкнутой линейной оболочке L_b множества $\{(c_n e_c)_{n \in \omega} : c \in \mathbb{R}^\omega, c \neq b\}$. Но L_b является замкнутой гиперплоскостью в L , что противоречит плотности линейной оболочки множества B в L .

ПРИМЕР 3. Пусть $X = \ell_1$ – пространство вещественных последовательностей $x = (x_n)_{n \in \omega}$ таких, что

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty;$$

$Y \subset X$ – подпространство, состоящее из всех финитных последовательностей. Для всякой последовательности $c \in [1, +\infty)^\omega$ символом X_c обозначим множество последовательностей $x = (x_n)_{n \in \omega}$ таких, что

$$\|x\|_c = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |x_n| < \infty.$$

Очевидно, что $(X_c, \|\cdot\|)$ – банахово пространство и $Y \subset X_c \subseteq X$ для всякого $c \in [1, +\infty)^\omega$. Символом p_c обозначим произвольную полунорму на X такую, что $p_c(x) = \|x\|_c$ при всех $x \in X_c$ (построить такую норму можно, например, с помощью теоремы Хана–Банаха). Наделим линейное пространство X топологией, задаваемой семейством полунорм $\{p_c : c \in [1, +\infty)^\omega\}$. Тогда Y – замкнутое линейное подпространство хаусдорфова ЛВП X , изоморфное $\mathbb{R}_\omega$ и не являющееся ретрактом X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что семейство норм $\{(p_c)_Y : c \in [1, +\infty)^\omega\}$ задает сильнейшую локально выпуклую топологию на Y . Следовательно, Y изоморфно $\mathbb{R}_\omega$. Замкнутость Y в X теперь следует из полноты $\mathbb{R}_\omega$. Предположим, что $\pi : X \rightarrow X$ – ретракция. Тогда отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|\pi(x) - x\|_1$, непрерывно и $Y = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Значит, Y – множество типа G_δ в X , т.е. существует последовательность U_n открытых подмножеств X такая, что $\bigcap_{n \in \omega} U_n = Y$. Для всех $y \in Y$, $n \in \omega$ выберем $c = c(n, y) \in [1, +\infty)^\omega$ и $\varepsilon = \varepsilon(n, y) > 0$ такие, что $\{x \in X : p_{c(n, y)}(x - y) < \varepsilon(n, y)\} = V_y^n \subseteq U_n$. Ясно, что для всякого $n \in \omega$ множество $\{V_y^n \cap Y : y \in Y\}$ образует открытое покрытие Y . В силу линделёфовости (см. [16]) Y (Y изоморфно $\mathbb{R}_\omega$ и, следовательно, σ -компактно) из этого покрытия можно выделить счетное подпокрытие $\{V_k^n = V_{y_k^n}^n : k \in \omega\}$. Выберем теперь последовательность $c \in [1, +\infty)^\omega$ такую, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c(n, y_k^n)}{c_m} = 0$$

для всех $n, k \in \omega$. Положим $W_k^n = V_k^n \cap X_c$. Из определения полунорм $p_{c(n, y)}$ ясно, что W_k^n открыто в банаховом пространстве $(X_c, \|\cdot\|)$ и $W_k^n \subseteq U_n$, $W_k^n \cap Y = V_k^n \cap Y$. Тем самым,

$$Y = \bigcap_{n \in \omega} \left(\bigcup_{k \in \omega} W_k^n \right).$$

То есть Y – (плотное) множество типа G_δ в банаховом пространстве $(X_c, \|\cdot\|)$. По теореме Бэра Y – множество второй категории в этом банаховом пространстве. С другой стороны, Y является объединением последовательности конечномерных линейных пространств (каждое из которых, очевидно, нигде не плотно) и, значит, является множеством первой категории. Противоречие.

4. Нерешенные проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. Существует ли ЛВП E без счетно-компактной бочки, для которого теорема Пеано (или хотя бы теорема Пеано в ослабленной формулировке) верна?

ПРОБЛЕМА 2. Пусть теорема Пеано верна для ЛВП E и F . Верна ли теорема Пеано для $E \times F$ (или хотя бы для E^2)? Тот же вопрос о теореме Пеано в ослабленной формулировке.

ПРОБЛЕМА 3. Существует ли ЛВП, для которого теорема Пеано неверна, но верна теорема Пеано в ослабленной формулировке?

ПРОБЛЕМА 4. Получить какие-либо достаточные условия квазидополняемости и того, что замкнутое линейное подпространство ЛВП является его ретрактом. (В силу теорем 2.1 и 2.2 всякий такой результат автоматически “порождает” результат о теореме Пеано.)

Автор благодарен О. Г. Смолянову за постановку задачи и внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петровский И. Г. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1967.
- [2] Dieudonné J. Deux exemples singuliers d'équations différentielles // Acta Sci. Math. (Szeged) 1950. V. 12. P. 38–40.
- [3] Yorke J. A. A continuous differential equation in Hilbert space without existence // Funkcial. Ekvac. 1970. V. 13. P. 19–21.
- [4] Годунов А. Н. Контрпример к теореме Пеано в бесконечномерном гильбертовом пространстве // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1972. № 5. С. 19–21.
- [5] Годунов А. Н. Теорема Пеано в бесконечномерном гильбертовом пространстве неверна даже в ослабленной формулировке // Матем. заметки. 1974. Т. 13. № 3. С. 467–477.
- [6] Cellina A. On the nonexistence of solution of differential equations in nonreflexive spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. № 6. P. 1069–1072.
- [7] Годунов А. Н. О теореме Пеано в банаховых пространствах // Функциональный анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 1. С. 59–60.
- [8] Astala K. On Peano's theorem in locally convex spaces // Studia Math. 1982. V. 73. P. 213–223.
- [9] Шкарин С. А. Теорема Пеано в бесконечномерных пространствах Фреше неверна // Функциональный анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 90–92.
- [10] Лобанов С. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения с непрерывной правой частью в пространствах Фреше // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 4. С. 77–91.
- [11] Лобанов С. Г., Смолянов О. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 93–168.
- [12] Шкарин С. А. О теореме Пеано в локально выпуклых пространствах // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1064.
- [13] Mickael E. A selection theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. V. 17. № 6. P. 1404–1406.
- [14] Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
- [15] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [16] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [17] Bonnet J., Carreras P. Barrelled locally convex spaces. Stud. Math. Appl. V. 131. Amsterdam: North Holland, 1987.
- [18] Bessaga C., Pelczynski A. Selected topics in infinite dimensional topology. Warszawa: Polish scientific publ., 1975.
- [19] Borges C. J. R. Continuous extensions // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. № 5. P. 874–878.
- [20] Saint Raymond J. Une équation différentielle sans solution // Séminaire Initiation à l'Analyse / ed. G. Choquet, M. Rogalski, J. Saint Raymond. 20 année. V. 2, 1980/81. P. 7–12.
- [21] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1977.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.01.95
Исправленный вариант
01.12.95